A Potential einer Kugel

Das Gravitationspotenial der Erde (oder irgend einer anderen Kugel) besitzt zwei auf den ersten Blick erstaunliche Eigenschaften. Sei R_E der Radius der Kugel und a der Abstand eines Punktes vom Zentrum der Kugel. Dann gilt:

- Außerhalb der Kugel ($a \geq R_E$) hängt das Potential nur vom Abstand zum Zentrum der Kugel ab, $E_{pot} = E_{pot}(a)$.
- Innerhalb der Kugel ($a < R_E$) hängt es nur von dem Teil der Masse ab, der näher beim Zentrum liegt. Die Massenanteile der Kugel weiter außerhalb bei $|\vec{r}| > a$ spielen keine Rolle.

Zum Beweis berechnen wir das Potential als Summe der Beiträge von vielen kleinen Massenanteilen dM der gesamten Kugel, d.h. wir integrieren das Gravitationspotential in Kugelkoordinaten.

Konkret wählen wir ein Koordinatensystem mit Ursprung im Zentrum der Kugel. Das Potential soll ausgerechnet werden an einem beliebigen Punkt $\vec{a}$ im Abstand a auf der z-Achse. Wir betrachten ein kleines Volumenelement $dx \cdot dy \cdot dz$ mit Masse $dM = \varrho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ am Ort $\vec{r}$ der Kugel. Der Abstand zwischen $\vec{a}$ und $\vec{r}$ sei

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad R(\theta) = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta} \tag{A.1}$$

Hier ist θ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und der z-Achse. Das Potential aufgrund von dM am Ort $\vec{a}$ ist

$$dE_{pot} = -G\frac{dM}{R(\theta)} = -G\varrho\frac{dx \cdot dy \cdot dz}{R(\theta)} = -G\varrho\frac{r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta}{R(\theta)} \tag{A.2}$$

Bei einer symmetrischen Kugel hängt die Dichte ϱ nicht von φ und θ ab. Wir integrieren daher über diese beiden Größen und erhalten so das Potential einer Kugelschale mit Radius r, Dicke dr und Masse $dM_{KS} = \varrho 4\pi r^2 \, dr$. Das Integral über $d\varphi$ ergibt 2π. Das Integral über θ findet man durch Substitution [6]. Insgesamt ist damit das

[6]
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{ar\sin\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}} = \frac{ar\sin\theta}{R} \qquad \Rightarrow \qquad d\theta = \frac{R\,dR}{ar sin\theta} \tag{A.3}$$

$$\int \frac{\sin\theta}{R}\,d\theta = \int \frac{1}{ar}\,dR = \frac{1}{ar}R \tag{A.4}$$

Einsetzen der Grenzen für θ

$$\begin{aligned} R(\theta = 0) &= \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar} = \sqrt{(a-r)^2} = |a - r| \\ R(\theta = \pi) &= \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar} = \sqrt{(a+r)^2} = |a + r| \end{aligned} \tag{A.5}$$

ergibt

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{R}\,d\theta = \frac{1}{ar}\left(|a+r| - |a-r|\right) \tag{A.6}$$

Potential über einer Kugelschale

$$\begin{aligned} dE_{pot,KS} &= -G\varrho r^2\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{R(\theta)}\,d\theta \\ &= -G\,dM_{KS}\frac{1}{2ar}\,\left(|a+r|-|a-r|\right) \end{aligned} \tag{A.7}$$

Außerhalb der Kugelschale, d.h. für $a \geq r > 0$, ist

$$dE_{pot,KS} = -G\,\frac{dM_{KS}}{a} \qquad \Rightarrow \qquad F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\,E_{pot,KS} = -G\,\frac{dM_{KS}}{a^2} \tag{A.8}$$

Das Potential hängt also nicht mehr von der Größe r der Kugelschale ab, sondern nur vom Abstand des Punktes $\vec{a}$ vom Zentrum der Kugel. Die Masse der Kugelschale scheint also komplett im Zentrum zu liegen.

Innerhalb der Kugelschale, d.h. für $r > a > 0$, ist

$$dE_{pot,KS} = -G\,\frac{dM_{KS}}{r} \qquad \Rightarrow \qquad F = 0 \tag{A.9}$$

Die potentielle Energie hängt hier also gar nicht mehr von der Position a innerhalb der Kugelschale ab, so dass also dort auch keine Kraft mehr wirkt.

Aufgabe A.1: Gravitation im Innern der Erde: Begründen Sie anhand des Ergebnisses für Kugelschalen, dass das Gravitationspotential im Innern einer homogenen Kugel (ϱ konstant) vom Abstand a vom Zentrum abhängt in der Form

$$E_{pot,Kugel} \sim a^2 \qquad\qquad F_{Kugel} \sim a \tag{A.10}$$

B Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen

Für jeden Vektor $\vec{b}$ gilt in einem Bezugssystem mit Einheitsvektoren $\vec{e}_i$

$$\vec{b} = \sum_i b_i \, \vec{e}_i \tag{B.1}$$

In einem anderen relativ dazu bewegten Bezugssystem mit Einheitsvektoren $\vec{e}_i'$ ist der gleiche Vektor

$$\vec{b} = \sum_i b_i' \, \vec{e}_i' \tag{B.2}$$

Rotiert dieses System, so sind die Einheitsvektoren $\vec{e}_i'$ zeitabhängig und erfüllen wie alle rotiernden Vektoren die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i'}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i' \tag{B.3}$$

Die Zeitabhängigkeit von $\vec{b}$ ist damit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{b}_i}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \frac{\mathrm{d}b_i'}{\mathrm{d}t} \vec{e}_i' + \sum_i b_i' \frac{\mathrm{d}\vec{e}_i'}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{b}_i'}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{b} \end{aligned} \tag{B.4}$$

Wir betrachten nun eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ in einem dazu um $\vec{r}_0(t)$ versetzten und rotierenden System,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) \tag{B.5}$$

Die Geschwindigkeit auf dieser Bahnkurve ist

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} &= \dot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ &= \dot{\vec{r}}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \end{aligned} \tag{B.6}$$

wobei $\vec{v}'$ die im rotierenden System gemessene Geschwindigkeit ist. Nochmaliges Ableiten ergibt die Beschleunigungen,

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right) \\ &= \ddot{\vec{r}}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \end{aligned} \tag{B.7}$$

mit der im rotierenden System gemessenen Beschleunigung $\vec{a}'$. Für die Kraft im rotierenden System folgt

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} \underbrace{-m\ddot{\vec{r}}_0}_{\text{Trägheitsk.}} \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis-K.}} \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Fliehkraft}} \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{beschl. Rot.}} \tag{B.8}$$