- Yukawa Wechselwirkungen zwischen Higgs-Teilchen und den Spin-1/2 Teilchen.

All diese Wechselwirkungen unterscheiden sich drastisch.

Das Gravitationsgesetz von Newton beschreibt Gravitation als die wechselseitige Anziehung von Massen (z.B. Apfel-Erde, Erde-Mond, Sonne-Erde). Die Kraft zwischen zwei Massenpunkten ist anziehend und zeigt entlang der Verbindungslinie zwischen den beiden Massen. Sie ist außerdem proportional zum Produkt der beiden Massen (m_1, m_2) und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands. Sind die Massen an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$, so ist ihr Abstand

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{4.13}$$

Die Gravitationskraft auf die Masse 1 ist dann

$$\boxed{\vec{F}_{12} = G\,\frac{m_1\, m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}} \tag{4.14}$$

Gravitationsgesetz von Newton

Gravitationskonstante

$$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$$

Die Massen m_1, m_2 müssten hier nicht notwendigerweise die trägen Massen sein. Sie werden in diesem Gravitationsgesetz daher *schwere Massen* genannt. Wegen actio = reactio ist

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{4.15}$$

Gravitationskraft auf der Erde: Es sei M_E die Masse der Erde und m_K die Masse eines Körpers auf der Erdoberfläche. Nach obiger Gleichung wirken entgegengesetzt gleich große Kräfte auf die Erde und den Körper. Allerdings ist die Masse der Erde in der Regel viel größer, so dass die Beschleunigung der Erde vernachlässigbar klein gegenüber der des Körpers ist,

$$\frac{a_E}{a_K} = \frac{m_K}{M_E} \ll 1$$

Wir können also näherungsweise annehmen, dass nur der Körper m_K beschleunigt wird. Wenn der Körper eine Höhe h über der Erdoberfläche hat, so ist der Abstand zum Mittelpunkt der Erde

$$r_{12} = R_E + h$$

In der Näherung $h \ll R_E$ gilt dann $r_{12} \approx R_E$ und

$$\left|\vec{F}\right| \approx G\,\frac{M_E\, m_K}{R_E^2} =: m_K\, g \tag{4.16}$$

Hier ist $M_E = 5{,}9723 \cdot 10^{24}$ kg und $R_E = 6378$ km ist der Radius der Erde. Wir haben hier offenbar vorausgesetzt, dass man hier den Abstand des Körpers vom Mittelpunkt der Erde einsetzen kann. Wir werden dies weiter unten begründen. Die mit dieser Gleichung definierte Erdbeschleunigung g ist

$$g \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{4.17}$$

Der Messwert von g weicht allerdings örtlich um bis zu 0,5% von diesem Zahlenwert ab, da die Erde keine perfekte Kugel ist und es auch Gebiete gibt, in denen die Dichte der Erde etwas größer oder kleiner ist als im Mittel.

Träge und schwere Masse Wir hatten bisher die träge Masse definiert über das Aktionsprinzip

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$$

also als eine Eigenschaft, die angibt, wie träge ein Körper auf eine beliebige äußere Kraft reagiert (d.h. beschleunigt wird).

Die schwere Masse hingegen ist die Eigenschaft eines Körpers, die angibt, wie stark er an der Gravitations teilnimmt.

In einem berühmten Experiment wurde von Eötvös et al. gezeigt, dass das Verhältnis von träger und schwerer Masse für viele verschiedene Stoffe gleich ist. Der relative Unterschied ist, mit heutigen Methoden gemessen, kleiner als 10^{-10}. Wir werden daher im Folgenden annehmen, dass für alle Stoffe gilt

Eötvös Experiment, 1890

$$\boxed{m_{\text{träge}} = m_{\text{schwer}}} \tag{4.18}$$

Dies ist auch eines der wichtigsten Postulate der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein.

Damit gilt konkret für die Erdbeschleunigung

$$\left|\vec{F}\right| = m_{\text{träge}}\, a = G\frac{M_E\, m_{\text{schwer}}}{R_E^2} = m_{\text{schwer}}\, g$$

und damit

$$F = m\,a = m\,g \tag{4.19}$$

Damit werden alle Körper mit der gleichen Erbeschleunigung fallen, unabhängig von ihrem Material.

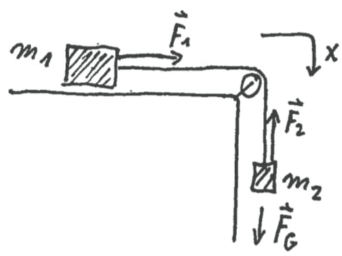

Abb. 4.1
Beschleunigung auf der Luftkissenbahn

Aufgabe 4.1: In Abb. 4.1 sind zwei Massen (m_1,m_2) mit einem Faden verbunden. Auf die zweite Masse wirkt zusätzlich die Gewichtskraft $F_g = m_2 g$.
Lösung: Damit folgt nach Newton

$$m_1\, a_1 = F_1 \qquad m_2\, a_2 = F_2 + F_g \tag{4.20}$$

Wegen Actio = Reactio gilt $F_1 = -F_2$. Der Faden wird immer gespannt bleiben, d.h. die Geschwindigkeit der Massen ist gleich und die Beschleunigungen ebenso, $a_1 = a_2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} m_2\, a &= -m_1\, a + m_2\, g \\ a &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, g \end{aligned} \tag{4.21}$$

Die Beschleunigung ist damit immer kleiner als g.

4.3 Federkraft

Bei Federn werden die elastischen Eigenschaften eines Materials ausgenutzt, um bei Auslenkung aus der Ruhelage eine in Gegenrichtung wirkende Kraft zu verursachen.

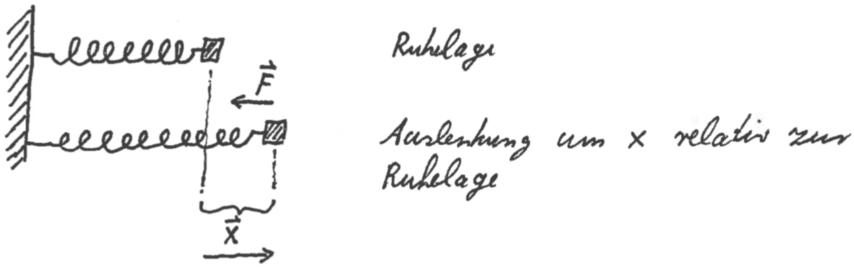

Abb. 4.2 Feder auf einem Tisch vor (oben) und nach (unten) der Auslenkung.

Wir betrachten eine Feder, die flach auf einem Tisch liegt. Relativ zu ihrer Ruhelage wird sie um eine Strecke $\vec{x}$ ausgelenkt. Experimentell findet man, dass auf die angehängte Masse eine Kraft wirkt, die proportional zur Auslenkung ist.

$$\boxed{F = -k\,x} \tag{4.22}$$

Federkonstante k

Nach Newton wirkt eine Beschleunigung auf die Masse m,

$$\boxed{m\,\ddot{x} = -k\,x} \tag{4.23}$$

Bewegungsgleichung

Diese Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir werden später sehen, dass viele physikalische Systeme durch Bewegungsgleichungen dieser mathematischen Form beschrieben werden können.

Hängt man wie in Abb. 4.3 eine Feder senkrecht auf, so wird sie durch ihr Eigengewicht ein wenig länger. Hängt man nun eine Masse an die Feder, so wird sie aufgrund der Gewichtskraft $F = m\,g$ um eine weitere Strecke x_0 ausgelenkt. In dieser neuen Position liegt ein Gleichgewicht der Kräfte vor,

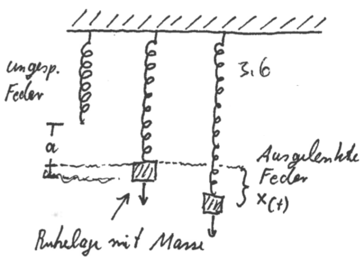

Abb. 4.3 Senkrecht hängende Feder.

$$F_G + F_{\text{Feder}} = m\,g - k\,x_0 = 0 \tag{4.24}$$

Lenkt man nun die Feder um eine weitere Strecke x aus, so bewirkt die entstehende Kraft eine Beschleunigung der Masse,

$$m\,\ddot{x} = m\,g - k\,(x_0 + x) \tag{4.25}$$

Mit obiger Gleichung für die Gleichgewichtslage gilt

$$m\,\ddot{x} = -k\,x \tag{4.26}$$

Die Bewegungsgleichung ist also die gleiche wie bei der waagerechten Auslenkung, die Feder wird einfach nur durch die Gewichtskraft vorgespannt.

Tatsächlich ist das in Gl. 4.22 formulierte Gesetz nur in einem Bereich gültig, in dem die Auslenkung nicht zu groß ist. Bei immer größer werdender Auslenkung ist der Zusammenhang zwischen Kraft und Auslenkung nicht mehr linear. Man kann den linearen Zusammenhang einfach als den ersten Term einer Taylor-Entwicklung der tatsächlichen Funktion $F(x)$ auffassen, bei dem alle Terme außer dem linearen weggelassen wurden, da sie klein genug sind.

4.4 Seilspannung

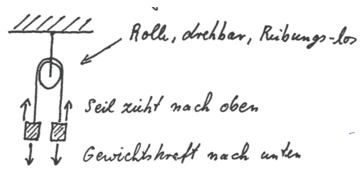

Abb. 4.4
Zur Seilspannung.

Hängt man wie in Abb. 4.4 zwei gleichgroße Massen an einem Seil über eine bewegliche Rolle auf, so stellt sich ein Gleichgewicht ein. Nach Newton's Axiomen muss die Summe der Kräfte auf jede Masse also gleich Null sein. Die Gewichtskraft jeder Masse wird also durch die Spannung im Seil kompensiert. Die Seilspannung ist eine elastische Eigenschaft des Seils, ähnlich wie bei einer Feder. Allerdings ist die Federkonstante so groß, dass die Auslenkung (Verlängerung des Seils) vernachlässigbar klein ist.

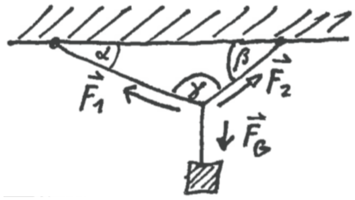

Abb. 4.5
Addition von Kräften.

Aufgabe 4.2: Hängt man eine Masse wie in Abb. 4.5 auf, so ergibt sich eine quadratische Beziehung zwischen den Kräften für $\gamma = 90^0$.
Lösung: Die Gleichgewichtsbeziehung lautet

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\vec{F}_G = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{4.27}$$

Falls der Winkel γ zwischen den Seilen 90^0 beträgt, so ist $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 0$. Damit folgt

$$F_G^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\vec{F}_1\vec{F}_2 = F_1^2 + F_2^2 \tag{4.28}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht experimentell überprüfen.

4.5 Reibung

Mit Reibung bezeichnet man allgemein einen Widerstand gegen die Bewegung eines Körpers durch seine Umgebung. Die Reibungskraft $\vec{F}_R$ zeigt daher entgegen der Geschwindigkeit des Körpers. Man unterscheidet verschiedene Formen der Reibung.

Coulomb-Reibung zwischen Oberflächen: In diesem Fall ist die Reibungskraft proportional zur Kraft F_N, mit der die Oberflächen aneinandergedrückt werden,

Abb. 4.6

$$\boxed{F_R = \mu\, F_N} \tag{4.29}$$

Diese Form der Reibung entsteht durch elektrische Kräfte (Coulomb-Wechselwirkung) zwischen den Oberflächen.

Reibungskoeffizient μ

μ	Haft	Gleit
Stahl-Stahl	0,74	0,57
Teflon-Teflon	0,04	0,03

- Haftreibung: Wenn die Oberflächen zueinander ruhen ($v = 0$), muss zunächst eine Mindestkraft aufgebracht werden, um eine Bewegung herzustellen.

- Gleitreibung: Liegt bereits eine Geschwindigkeit vor, so ist die Reibung deutlich geringer.

Reibung lässt sich relativ einfach durch eine schiefe Ebene messen. Stellt man die Ebene schief, so gerät der Körper bei einem bestimmten Winkel ins Rutschen. Die Haftreibung ergibt sich für diesen Winkel aus $F_R = -F_{\|}$,

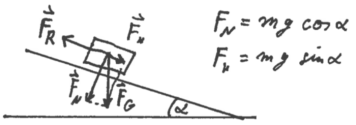

Abb. 4.7

$$m\,g\,\sin\alpha = \mu\, m\, g\,\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \tan\alpha \tag{4.30}$$

Stokes-Reibung: In Flüssigkeiten erfahren relativ kleine und langsame Körper eine Reibungskraft. Ist die Geschwindigkeit v klein genug, so ist die Strömung wirbelfrei. Dies gilt z.B. für kleine Kugeln in Flüssigkeiten. Die Reibungskraft ist in diesem Fall proportional zur Geschwindigkeit v und zum Radius r der Kugel,

$$F_R = 6\,\pi\, r\,\eta\, v \tag{4.31}$$

Hier ist η die Viskosität der Flüssigkeit. Wird die Kugel durch die Gewichtskraft beschleunigt und durch die Reibungskraft abgebremst, so stellt sich nach kurzer Zeit eine konstante Geschwindigkeit v_0 ein, entsprechend

$$m\,g - 6\,\pi\, r\,\eta\, v = 0 \tag{4.32}$$

Newton-Reibung: Bei schnellen Bewegungen großer Körper z.B. in Luft ist die Verdrängung der Luft der wichtigere Effekt. Es handelt sich also weniger um einen Oberflächeneffekt. Bei einer Querschnittsfläche A senkrecht zur Geschwindigkeit v ist die Reibungskraft proportional zur Dichte ρ der Luft,

$$F_R = \frac{1}{2}\, c_W\, \rho\, A\, v^2 \tag{4.33}$$

Hier ist c_W ein Faktor, der die Form und Windschnittigkeit des Körpers zusammenfasst. Diese Newton-Reibung wächst quadratisch mit der Geschwindigkeit.