also in ihrer mathematischen Form invariant unter der Symmetrie-Transformation sein. Mit einer solchen Symmetrie ist verbunden, dass eine bestimmte Eigenschaft des Systems im System selber nicht beobachtbar ist.

10.6.1 Klassische Impulserhaltung

Als Beispiel wird ein isoliertes System aus zwei Teilchen mit Ortskoordinaten $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ betrachtet. Der Raum sei homogen. Dann ist prinzipiell nur die relative Position der beiden Teilchen zueinander beobachtbar, aber nicht die absolute Position des Systems im Raum. Damit kann auch der Ursprung des Koordinatensystems beliebig gewählt werden. Die Bewegungsgleichungen des System müssen also invariant sein unter der räumlichen Translation (Symmetrie-Transformation)

$$\vec{x}_i \rightarrow \quad \vec{x}_i{}' = \vec{x}_i + \vec{x}_0 \tag{10.10}$$

Das Potential zwischen den beiden Teilchen kann daher nicht von der absoluten Position im Raum abhängen, sondern nur von der relativen Position der beiden Teilchen zueinander,

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{10.11}$$

denn explizit ist

$$x_1' - \vec{x}_2' = (\vec{x}_1 + \vec{x}_0) - (\vec{x}_2 + \vec{x}_0) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \tag{10.12}$$

und damit auch

$$V'(\vec{x}_1' - \vec{x}_2') = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{10.13}$$

Die Kraft auf die beiden Teilchen ist nach Newton:

$$\partial_t \vec{P}_1 = \vec{F}_1 = -\nabla_1 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{10.14}$$

$$\partial_t \vec{P}_2 = \vec{F}_2 = -\nabla_2 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = +\nabla_1 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{10.15}$$

Der Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ ist daher erhalten,

$$\partial_t \vec{P} = \partial_t \vec{P}_1 + \partial_t \vec{P}_2 = 0 \tag{10.16}$$

Aus der Nicht-Beobachtbarkeit der absoluten Ortes folgt also die Erhaltung des Gesamtimpulses.

Mit Hilfe des Hamilton-Lagrange Formalismus lässt sich in der klassischen Physik allgemein zeigen, dass Symmetrien mit Erhaltungsgrößen zusammenhängen.

Symmetrie	nicht beobachtbar	Transformation	Erhaltungsgröße
Raum ist homogen	Position im Raum	Translation $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{x}_0$	Impuls
Raum ist isotrop	Orientierung	Rotation $\varphi' = \varphi + \varphi_0$	Drehimpuls
Zeit ist homogen	absolute Zeit	Zeit-Versch. $t' = t + t_0$	Energie

10.6.2 U(1) Phaseninvarianz und Ladung in der Quantenmechanik

Die Transformation eines quantenmechanischen Zustands $|\psi\rangle$ sei

$$|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \qquad \langle\Psi'| = \langle\psi|\,U^\dagger \tag{10.17}$$

Eine Symmetrietransformation soll Observablen unverändert lassen. Dies gilt insbesondere für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit,

$$\langle\psi'\,|\,\psi'\rangle = \left\langle\psi\,\middle|\,U^\dagger U\,\middle|\,\psi\right\rangle = \langle\psi\,|\,\psi\rangle \tag{10.18}$$

so dass U unitär sein muss, $U^\dagger = U^{-1}$. Allgemein lassen sich unitäre Operatoren darstellen als

$$U = e^{-i\alpha Q} \tag{10.19}$$

globale Eichinvarianz

wobei a ein freier reeller Parameter (Zahl) und Q ein Operator sein soll, der Generator der Transformation genannt wird. Die e-Funktion ist hier als Tayler-Entwicklung aufzufassen. Wegen

$$1 = U^\dagger U = e^{+i\alpha Q^\dagger}\cdot e^{-i\alpha Q} = e^{i\alpha(Q^\dagger - Q)} \tag{10.20}$$

muss Q also hermitesch und damit eine Observable sein, $Q^\dagger = Q$. Ist der Zustand $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand des Operators, $Q\,|\psi\rangle = q\,|\psi\rangle$, so entspricht die Transformation einfach einer Änderung der Phase des Zustands,

$$U\,|\psi\rangle = e^{-i\alpha Q}\,|\psi\rangle = e^{-i\alpha q}\,|\psi\rangle \tag{10.21}$$

Sowohl $|\psi\rangle$ als auch der transformierte Zustand $|\psi'\rangle$ müssen die Schrödinger-Gleichung erfüllen

$$i\partial_t\,|\psi\rangle = H\,|\psi\rangle \qquad i\partial_t\,|\psi'\rangle = H\,|\psi'\rangle = HU\,|\psi\rangle \tag{10.22}$$

Ist U nicht explizit von der Zeit abhängig, so folgt

$$i\partial_t\,|\psi'\rangle = i\partial_t\,|U\psi\rangle = Ui\partial_t\,|\psi\rangle = UH\,|\psi\rangle = HU\,|\psi\rangle \tag{10.23}$$

H und U kommutieren also. Damit ist der Erwartungswert von U und von Q eine Erhaltungsgröße

$$i\partial_t\,\langle\psi\,|\,U\,|\,\psi\rangle = 0 \qquad i\partial_t\,\langle\psi\,|\,Q\,|\,\psi\rangle = i\partial_t q = 0 \tag{10.24}$$

Die erhaltene Größe q wird Ladung genannt. Dieser einfache Fall, bei dem die unitäre Transformation nur von einem Parameter α abhängt, wird $U(1)$-Transformation genannt. Zwei Beispiele hierfür sind in der Natur tatsächlich vorhanden, die $U(1)_{em}$ der elektrischen Ladung q und die $U(1)_Y$ der elektroschwachen Hyperladung Y (siehe Kapitel zur schwachen Wechselwirkung.).

10.6.3 U(1) Eichinvarianz und Elektromagnetismus

Es reicht für die Invarianz der Aufenthaltswahrscheinlichkeit völlig aus, dass lokal, also an jedem Ort und zu jeder Zeit, die Bedingung

$$\psi'^{*}\psi' = \psi^{*}\psi \tag{10.25}$$

erfüllt ist. Der Parameter α muss also keine universelle Konstante sein, sondern kann selber eine Funktion von Ort und Zeit sein,

$$\Psi' = U\,\Psi = e^{-i\alpha(x,t)\,Q}\,\Psi \tag{10.26}$$

lokale Eichinvarianz

Da die Phase und damit auch α prinzipiell nicht beobachtbar ist, kann man dies sogar zu einem Postulat erklären. Dies ist die Grundidee der Eichtheorie, mit der man alle Eigenschaften des Elektromagnetismus (und auch der schwachen und starken Wechselwirkung) ableiten kann.

Sehr allgemein kann man dies zeigen, indem man eine Lagrange-Dichte für die Dirac-Gleichung einführt und hierfür lokale Eichinvarianz fordert. Im Folgenden wird dagegen nicht die Lagrange-Dichte sondern direkt die Bewegungsgleichung, also die Dirac-Gleichung, betrachtet.

In allen quantenmechanischen Wellengleichungen für freie Teilchen

$$\underbrace{i\partial_t\Psi = -\frac{\nabla^2}{2m}\Psi}_{\text{Schrödinger}} \qquad \underbrace{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\Phi}_{\text{Klein-Gordon}} \qquad \underbrace{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0}_{\text{Dirac}}$$

tauchen Ableitungen nach Ort und Zeit auf, die bei einer lokalen Eichtransformation die Form der Wellengleichung ändern. Zum Beispiel geht bei der Dirac-Gleichung der Massenterm und der kinetische Term durch eine $U(1)$ Eichtransformation über in

$$m\Psi' = e^{-i\alpha q}\,m\Psi \tag{10.27}$$

$$\partial_\mu\Psi' = e^{-i\alpha q}\,\partial_\mu\,\Psi - iqe^{-i\alpha q}\,(\partial_\mu\alpha)\;\Psi \tag{10.28}$$

Der letzte Term rechts ändert die Form der Dirac-Gleichung für Ψ', die Bewegungsgleichung 10.27 ist also nicht eichinvariant. Wir verallgemeinern daher die Dirac-Gleichung zu einer verbesserten, d.h. eichinvarianten Gleichung mit der sogenannten *kovarianten Ableitung D_μ*.

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 \tag{10.29}$$

Es soll lokale Eichinvarianz gelten, d.h.

$$(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\Psi' = e^{-i\alpha q}\,(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi = 0 \tag{10.30}$$

Dies ist der Fall, wenn

$$D'_\mu\Psi' = e^{-i\alpha q}D_\mu\Psi \tag{10.31}$$

Diese Bedingung für D_μ kann man erfüllen mit dem Ansatz

$$\boxed{D_\mu \Psi = (\partial_\mu + iqA_\mu(\vec{x},t))\,\Psi} \tag{10.32}$$

denn

$$D'_\mu \Psi' = (\partial_\mu + iqA'_\mu)\left(e^{-i\alpha q}\Psi\right) \tag{10.33}$$
$$= e^{-i\alpha q}\left[(\partial_\mu \Psi) - iq\,(\partial_\mu \alpha)\,\Psi + iqA'_\mu\,\Psi\right] \tag{10.34}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist tatsächlich gleich $D_\mu\Psi$ falls

$$\boxed{A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha} \tag{10.35}$$

Eichung des Potentials

Offenbar darf A_μ um den Gradienten einer skalaren Funktion verändert werden, ohne dass sich die Bewegungsgleichung ändert. Da $\alpha = \alpha(\vec{x},t)$ sind auch die vier Komponenten von A_μ Funktionen von Ort und Zeit. Es muss daher als ein Potential aufgefasst werden.[16] Damit ist die eichinvariante Dirac-Gleichung für ein Teilchen im Potential A_μ

$$\boxed{[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\,\Psi = 0} \tag{10.39}$$

Multipliziert man von links mit γ^0 so folgt daraus

$$\boxed{i\partial_t\Psi = H\Psi = \gamma^0\vec{\gamma}(\vec{P} - q\vec{A})\Psi + m\gamma^0\Psi + q\varphi\Psi} \tag{10.40}$$

Dies entspricht der schon von der Schrödinger-Gleichung bekannten Form der *minimalen Kopplung*, d.h. der Ersetzung der Operatoren $E, \vec{P}$ durch

$$\vec{P} \to \vec{P} - q\vec{A}, \qquad E \to E - q\varphi \tag{10.41}$$

bei der Einführung des Elektromagnetismus. Die minimale Kopplung ist also eine Folge der Forderung nach lokaler Eichinvarianz.

Der Ausdruck in der obigen Gleichung

$$q \cdot A^\mu \cdot \psi \tag{10.42}$$

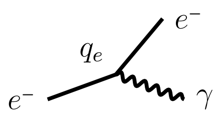

Abb. 10.45

entspricht der Wechselwirkung eines Fermions der Ladung q mit dem elektromagnetischen Feld. Die Ladung q oder genauer $i\gamma^\mu q$ ist genau der Vertexfaktor in einem Feynman-Diagramm, bei dem ein Fermion ein Photon abstrahlt.

[16] Die Eichung des Potentials ist bereits aus der klassischen Elektrodynamik bekannt, wenn man die Komponenten von A_μ mit dem skalaren Potential $\varphi(\vec{x},t)$ und Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t)$ identifiziert,

$$A^\mu = \begin{pmatrix}\varphi\\ \vec{A}\end{pmatrix}^\mu \tag{10.36}$$

für die ja Eichtransformationen der Form

$$\varphi' = \varphi + \partial_t\alpha(\vec{x},t) \qquad \vec{A}' = \vec{A} - \nabla\alpha(\vec{x},t) \tag{10.37}$$

das elektrische Feld und das Magnetfeld unverändert lassen,

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{10.38}$$

10.6.4 Vorhersagen der Eichtheorien

Eichfelder:
Photon: Elektromagn. WW
$W^{\pm}, Z^0$: Schwache WW
Gluon: Starke WW

Eichtheorien machen ganz allgemein die folgenden Aussagen, die tatsächlich alle experimentell bestätigt worden sind:

- Er werden neue Vektorfelder A_μ vorhergesagt.
- Die Quanten von Vektorfeldern haben Spin 1.
- Die dimensionslose *Ladung* q von Ψ ist erhalten, aber der Zahlenwert ist nicht vorhergesagt und eine echte Naturkonstante.
- Die Vektorfelder sind auf ganz bestimmte Weise in den Bewegungsgleichungen mit den Fermionen Ψ gekoppelt, $q \cdot A_\mu \cdot \gamma^\mu \Psi$. Dies entspricht den fundamentalen Vertizes der jeweiligen Theorie.
- Diese γ^μ Kopplungen implizieren, dass die Chiralität der Fermionen an jedem Vertex erhalten bleibt.
- Die Vektorfelder A_μ haben keine Masse m_A, denn ein zusätzlicher Massenterm wie $m_A A^\mu$ wäre nicht eichinvariant. Dies gilt für Photon und Gluon. Die Massen von W, Z sind dagegen nicht Null. Der Grund hierfür ist der Higgs-Mechanismus.