

Physik 5

Teilchen und Kerne

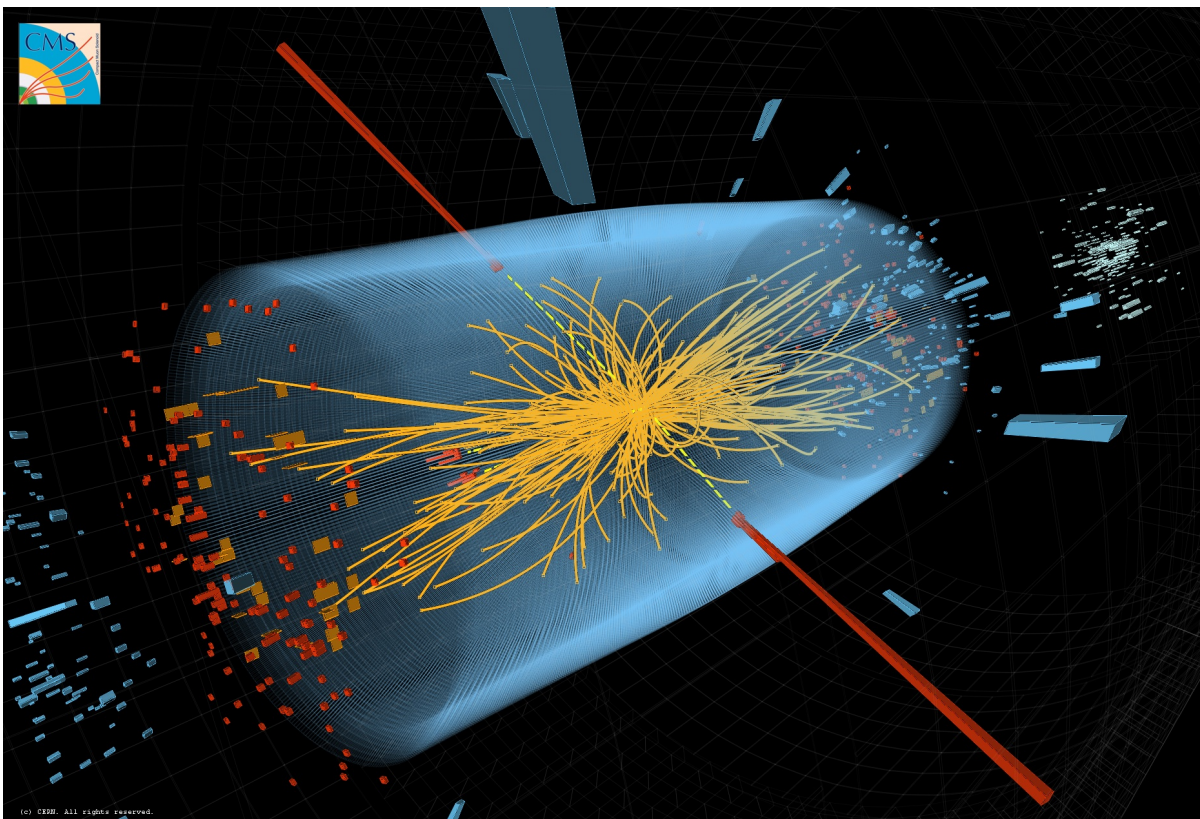
Notizen zur Vorlesung im Wintersemester 2018-2019

Peter Schleper

16. Oktober 2018

Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg
peter.schleper@physik.uni-hamburg.de

http://www.desy.de/~schleper/lehre/physik5/WS_2018_19



Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort	5
2 Einleitung	8
2.1 Bausteine der Materie	8
2.2 Elementare Teilchen	9
2.3 Experimentelle Methoden	11
2.4 Kräfte	14
2.5 Hadronen	17
2.6 Kerne	18
3 Natürliche Einheiten	19
4 Relativistische Kinematik	21
4.1 4-er Vektoren	21
4.2 Skalarprodukt und Lorentztransformation	22
4.3 4-er Impulse	23
4.4 Schwerpunktsenergie	25
4.5 Zwei-Körper-Zerfall	27
5 Wirkungsquerschnitt	28
5.1 Streuprozesse	28
5.2 Rutherford-Streuung klassisch	32
5.3 Rutherford-Streuung	34
6 Detektoren zur Messung elementarer Teilchen	38
6.1 Übersicht	38
6.2 Geladene Teilchen	38
6.2.1 Ionisation und Bethe-Bloch-Formel	38
6.2.2 Bremsstrahlung	43
6.3 Spurdetektoren	44
6.3.1 Impulsmessung im Magnetfeld	44
6.3.2 Nebelkammern und Blasenkammern	44
6.3.3 Gas-Detektoren	48
6.3.4 Halbleiter-Detektoren	53
6.4 Photonen und elektromagnetische Schauer	55
6.5 Hadronische Schauer	57
6.6 Kalorimeter	58
6.7 Detektorkonzepte und Identifizierung von Teilchen	59
7 Relativistische Quantenmechanik	62
7.1 Schrödinger-Gleichung	62
7.2 Klein-Gordon-Gleichung	63
7.3 Dirac-Gleichung	65
7.3.1 Algebra und Hamilton	66
7.3.2 Bestimmung der γ -Matrizen	66

7.3.3	Drehimpuls und Spin	68
7.3.4	Lösungen der Dirac-Gleichung	69
7.3.5	Antimaterie	70
8	Streuprozesse und Zerfälle in der Quantenmechanik	72
8.1	Fermi's Goldene Regel	72
8.2	Fermi's Regel im Schwerpunktsystem	74
8.3	Zerfallsgesetz	76
8.4	Breit-Wigner Verteilung und virtuelle Teilchen	78
9	Struktur der Hadronen und Kerne	80
9.1	Rutherford-Streuung	80
9.2	Mott-Wirkungsquerschnitt	81
9.3	Formfaktor	82
9.4	Messungen der Proton- und Kernstrukturen	83
10	Wechselwirkungen und Symmetrien	88
10.1	Yukawa Potential und Reichweite der Kräfte	88
10.2	Quantenfelder und Feynman-Graphen	90
10.3	Beispiele	94
10.4	Fundamentale Graphen	96
10.4.1	Elektromagnetismus	96
10.4.2	Starke Wechselwirkung	97
10.4.3	Schwache Wechselwirkung	98
10.5	Quantenzahlen und Erhaltungssätze	99
10.6	Symmetrie	101
10.6.1	Klassische Impulserhaltung	102
10.6.2	U(1) Phaseninvarianz und Ladung in der Quan-	
	tenmechanik	103
10.6.3	U(1) Eichinvarianz und Elektromagnetismus	104
10.6.4	Vorhersagen der Eichtheorien	106
11	Schwache Wechselwirkung	107
11.1	Historie der Schwachen Wechselwirkung	107
11.2	Fermi-Konstante und W-Propagator	108
11.3	Paritätsverletzung und V-A Theorie	109
11.4	Standard-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung	112
11.5	SU(2) Symmetrie der schwachen Wechselwirkung	114
11.6	Neutrino-Streuung	116
11.6.1	Geladener Strom	116
11.6.2	Neutrale Ströme: Z^0 Austausch	117
11.7	Entdeckung von W und Z	118
11.8	Z^0 -Physik an e^+e^- Beschleunigern	119
11.9	WW Produktion in e^+e^- Kollisionen	124
11.10	W und Z Produktion in $p\bar{p}$ Kollisionen	125
12	Elektroschwache Symmetriebrechung: Higgs	128
12.1	Der Higgs-Mechanismus im Standard-Modell	129
12.2	Fermion-Higgs Kopplung und Fermion-Massen	131
12.3	Eigenschaften des Higgs-Teilchens	132
12.4	Higgs Zerfälle	133

12.5 Entdeckung des Higgs-Bosons	134
12.6 Zusammenfassung der Resultate zum Higgs vom LHC	137
13 Flavour und Mischung der Fermionen	141
13.1 Übergänge zwischen Quarks verschiedener Genera- tionen	141
13.2 Massen und Mischungen der Neutrinos	144
14 Starke Wechselwirkung	146
14.1 Quarks und Gluonen	146
14.2 Potential der QCD	148
14.3 Fragmentation und Jets	150
14.4 Proton-Struktur	152
14.5 Farbe und $SU(3)_C$	155
15 Kerne	157
15.1 Untersuchungsmethoden zur Kernphysik	157
15.2 Eigenschaften der Kerne	157
15.2.1 Ausdehnung des Kerne	157
15.2.2 Massen und Bindungsenergien der Kerne	158
15.3 Kernmodelle	160
15.3.1 Tröpfchen-Modell der Kerne	160
15.3.2 Fermi-Gas-Modell der Kerne	162
15.3.3 Schalenmodell	162
15.4 Kernzerfälle	163
15.4.1 α -Zerfall der Kerne	163
15.4.2 β -Zerfälle der Kerne	165
15.4.3 γ -Zerfälle und innere Konversion	169
15.5 Anwendungen der Kernphysik	169
16 Kosmologie und Physik jenseits des Standard-Modells	170
16.1 Grenzen des Standard-Modells	170
16.2 Phasen und Phasenübergänge im Kosmos	172
16.3 Kerne im Kosmos	173
16.3.1 Sterne und die Entstehung der Elemente	173
16.3.2 Big Bang Nukleonsynthese	174
16.4 Teilchen-Epochen im frühen Universum	175
16.5 Dunkle Materie und Dunkle Energie	176
Anhang	178

1 Vorwort

Scheinbar besteht die uns umgebende Natur und auch wir selber aus Atomen mit einem zentralen Kern und einer Hülle aus Elektronen, die über elektrische Kräfte (oder Photonen) aneinander gebunden sind. Die Kerne wiederum bestehen aus Protonen und Neutronen, aus deren Zahl sich im Wesentlichen die Masse der Atome, ihre elektrische Ladung und die Chemie der Atome ergibt.

Dieses Weltbild ist sicher zu naiv und so nicht richtig. Beginnend in den 1930er Jahren hat sich zunächst durch experimentelle Entdeckungen in der Höhenstrahlung, später vor allem an hochenergetischen Teilchenbeschleunigern und zunehmend durch theoretische Erkenntnisse ein Weltbild entwickelt, das sich heute das Standard-Modell der Teilchenphysik nennt. Zu diesen Entdeckungen gehört die Anti-Materie (1932), die Entdeckung von insgesamt 12 fundamentalen Teilchen, die ähnliche Eigenschaften wie das Elektron haben, sowie von über hundert weiteren Teilchen, die ähnlich wie Proton und Neutron als gebundene Zustände von sogenannten Quarks interpretiert werden können. Aus diesen Beobachtungen wurde zunächst theoretisch gefolgert, dass die Photonen nur die einfachste Spielart eines allgemeineren Konzepts sind, das auf Symmetrien der Natur beruht, und mit dem zusätzlich zur elektromagnetischen Kraft auch zwei weitere Naturkräfte formuliert werden können, diese sogenannte "schwache" und die "starke" Kraft. Obwohl sie theoretisch sehr ähnlich wie der Elektromagnetismus formuliert werden besitzen sie jedoch auch fundamental andere Eigenschaften. Die schwache Kraft erlaubt Umformungen verschiedener Teilchensorten ineinander, und die starke Kraft bindet die Quarks zu Protonen und Neutronen und diese wiederum zu Atomkernen.

Zu den fundamentalen Erkenntnissen gehört es, dass das Konzept der Symmetrien Vorhersagen von Naturgesetzen erlaubt und Beziehungen zwischen den Zahlenwerten von ansonsten scheinbar unabhängigen Naturkonstanten erfordert. Viele der daraus resultierenden Vorhersagen wurden später experimentell bestätigt, zuletzt die Vorhersage des Higgs-Teilchens durch seine Entdeckung im Jahr 2012.

Das Standard-Modell ist allerdings in seiner derzeitigen Form nicht in der Lage vorherzusagen oder zu erklären, wie sich das Universum aus der heißen Phase nach dem Urknall in seinen jetzigen Zustand entwickelt hat. Hierzu fehlen entscheidende Komponenten wie das Fehlen von Anti-Materie sowie die Existenz großer Mengen dunkler Materie und möglicher dunkler Energie. Erklärungen hierfür erfordern die Verletzung von Symmetrien (CP-Verletzung) oder neue, bisher unbekannte Symmetrien und erhaltene Quantenzahlen, möglicherweise aber auch Effekte durch die Gravitation, die als einzige Naturkraft bisher nicht ins Standard-Modell inkorporiert werden konnte. Es liegt nahe, dass diese Effekte Erweiterungen

Standard-Modell der Teilchenphysik

des Standard-Modells in Energiebereichen oberhalb der jetzigen im Labor erreichten Energien erfordern. Das Standard-Modell ist daher als Approximation an eine allgemeinere Theorie zu verstehen, die aber bereits ausreichend genau ist, um experimentelle Beobachtungen im Rahmen ihrer jetzigen Präzision und bei ihren jetzigen Energien vorherzusagen.

Im Folgenden wird dieses Standard-Modell der Teilchenphysik - Stand 2016 - beschrieben sowie einige der Experimente, die zu seiner Entwicklung geführt haben. Die Kernphysik wird als Phänomen der starken Wechselwirkung eingeführt. Abschließend werden kosmologische Beobachtungen und Erweiterungen des Standard-Modells andiskutiert.

Auf eine historische Einführung in die Entwicklung der Teilchenphysik wird hier verzichtet. Einen Eindruck kann man jedoch anhand der Liste der Nobelpreise für dieses Thema gewinnen.

Liste der Nobelpreise mit Bezug zur Teilchenphysik :

Jahr	Name	Begründung
2015	T. Kajita, A. McDonald	Neutrino-Masse
2013	F. Englert, P. Higgs	Higgs-Mechanismus
2008	Y. Nambu, M. Kobayashi, T. Masukawa	Spontane Symmetrie-Brechung 6 Quarks, CKM-Matrix
2004	D. Gross, D. Politzer, F. Wilczek	Asymptotische Freiheit in der QCD
2002	R. Davis, M. Koshiba	Neutrino-Oszillationen
1999	G. t'Hooft, M. Veltman	Elektroschwache Wechselwirkung
1995	M.L. Perl, F. Reines	Entdeckung des τ -Neutrinos
1992	G. Charpak	Vieldraht-Proportionalkammer
1990	J.I. Friedmann, H.W. Kendall, R. Taylor	Entdeckung der Quarks in der Elektronstreuung an Protonen
1988	L. Ledermann, M. Schwartz, J. Steinberger	Entdeckung des μ -Neutrinos
1984	C. Rubbia, S. van der Meer	W/Z Entdeckung und stochastische p -Kühlung
1980	J. Cronin, V. Fitch	CP-Verletzung im K^0 -Zerfall
1979	S. Glashow, A. Salam, S. Weinberg	Elektroschwache Wechselwirkung
1976	B. Richter, S. Ting	J/Ψ Entdeckung (c -Quark)
1969	M. Gell-Mann	Quark-Modell der Hadronen
1965	R. Feynman, J. Schwinger, S. Tomonaga	Quantenelektrodynamik
1963	E.P. Wigner	Symmetrien in der Teilchenphy- sik
1961	R. Hofstadter	Struktur der Nukleonen
1960	D. A. Glaser	Erfindung der Blaskammer
1959	E. Segre, O. Chamberlain	Entdeckung des Antiprotons
1958	P. Tscherenkow, I. Frank, I. Tamm	Tscherenkow-Effekt
1957	C.N. Yang, T.-D. Lee	Paritätsverletzung in der schwa- chen Wechselwirkung
1951	J. Cockroft, E. Walton	Beschleuniger
1950	C. Powell	Photographische Methode zur Entdeckung der Mesonen
1949	H. Yukawa	Kernkraft und Vorhersage der Mesonen (Pionen)
1948	P.S.M. Blackett	Nebelkammer, Teilchen in der kosmischen Strahlung
1936	V.F. Hess, C.D. Anderson	kosmische Strahlung und Entdeckung des Positrons
1935	J. Chadwick	Entdeckung des Neutrons
1933	E. Schrödinger, P. Dirac	Quantenmechanik
1927	A. Compton, C. Wilson	Compton-Effekt, Nebelkammer

2 Einleitung

2.1 Bausteine der Materie	8
2.2 Elementare Teilchen	9
2.3 Experimentelle Methoden	11
2.4 Kräfte	14
2.5 Hadronen	17
2.6 Kerne	18

2.1 Bausteine der Materie

Die Natur bei kleinen Längenskalen wird geprägt durch

- Elektronen, u -Quarks und d -Quarks. Diese Teilchen sind vermutlich elementar und punktförmig, d.h. sie haben keine innere Ausdehnung. Sicher ist, dass ihr Radius sehr klein ist,

$$R \leq 10^{-19} \text{m}$$

- u - und d -Quarks bilden gebundene Systeme, unter anderem

$$\text{Proton } p = uud \quad (2.1)$$

$$\text{Neutron } n = udd \quad (2.2)$$

deren Masse $\approx 1 \text{ GeV}/c^2$ und Radius $\approx 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ beträgt.

- Protonen und Neutronen bilden die Kerne der Atome. Volumen, Masse und Ladung der Kerne ergeben sich im Wesentlichen aus der Anzahl der beteiligten Protonen und Neutronen. Die Protonen stoßen sich elektrisch ab. Die Bindung der Kerne muss daher durch eine neue Kraft entstehen, der Starken Wechselwirkung.
- Neutrale Atome sind gebundene Systeme aus einem Kern mit einer entsprechenden Anzahl von Elektronen in einer äußeren Hülle. Eigenschaften wie z.B. der Radius der Hülle von typisch 10^{-10} m können durch elektromagnetische Wechselwirkung und Quanteneffekte erklärt werden.
- Aus den Eigenschaften der Atome folgen auch die Eigenschaften der Moleküle und Festkörpern sowie der chemischen Bindungen.

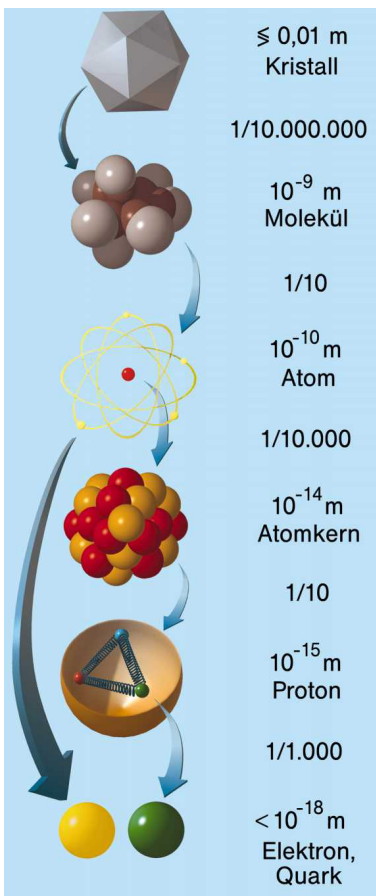


Abb. 2.1
Struktur der Materie vom Quark zum Kristall.

Aus diesen Zusammenhängen zwischen den elementaren Quanten (e, u, d) und den daraus zusammengesetzten, zunehmend komplexeren Strukturen leitet sich das Ziel der Teilchenphysik ab:

- Ziel der Teilchenphysik ist es, alle Naturgesetze und Teilchen durch wenige fundamentale Prinzipien und Naturgesetze zu erklären.
- Ziel der Kernphysik ist es, aus den Eigenschaften der Protonen und Neutronen die Eigenschaften der Atomkerne abzuleiten, und umgekehrt.

2.2 Elementare Teilchen

Experimentell findet man, dass es außer den Elektronen, u - und d -Quarks viele weitere Teilchen gibt. Inzwischen weiss man aber, dass die allermeisten dieser Teilchen nicht elementar sind, sondern ähnlich dem Proton aus Quarks aufgebaut sind.

Nach bisherigen Kenntnissen elementar sind tatsächlich nur die folgenden 17 Teilchen (siehe Tabellen [2.1](#), [2.2](#)):

Die Fermionen: Sie lassen sich in jeweils drei Generationen von Leptonen und Quarks einteilen.

Leptonen	ν_e	ν_μ	ν_τ
	e	μ	τ
Quarks	u	c	t
	d	s	b

- Leptonen e, μ, τ : Zusätzlich zum Elektron gibt es mit dem Myon (μ) und dem Tau (τ) zwei weitere geladene Teilchen, die zwar viel schwerer sind, aber ansonsten praktisch die gleichen Eigenschaften haben (elementar, Spin 1/2, el. Ladung $-e$, gleiche schwache Wechselwirkung).
- Leptonen ν_e, ν_μ, ν_τ : Zu jedem geladenen Lepton gibt es ein weiteres neutrales Teilchen (Neutrino). Neutrinos haben eine sehr viel kleinere Masse, aber ansonsten ähnliche Eigenschaften (elementar, Spin 1/2, gleiche schwache Wechselwirkung).
- Quarks u, d, c, s, t, b : Parallel zu den sechs Leptonen gibt es auch sechs Quarks. Diese tragen elektrische Ladung:

$$u, c, t : +\frac{2}{3} e \quad (2.3)$$

$$d, s, b : -\frac{1}{3} e \quad (2.4)$$

Sie sind ebenfalls elementar und haben Spin 1/2. Zusätzlich tritt jedes Quark in drei verschiedenen Variationen auf, den drei "Farben" (rot, grün und blau). Die Farben entsprechen den "Ladungen" der starken Wechselwirkung. Durch diese drei weiteren Ladungen ziehen sich Quarks gegenseitig an und bilden daher stark gebundene Systeme, die Hadronen.

- Anti-Teilchen: Zu jedem Lepton und Quark gibt es ein Anti-Teilchen. Es hat jeweils genau die gleiche Masse und Spin, aber entgegengesetzte Ladung und bei den Quarks auch entgegengesetzte Farbe (anti-rot, anti-grün, anti-blau).

Anti-Materie

	Name	Masse (GeV)	Ladung (e)	Farbe
Spin 0				
H	Higgs	125,09	0	-
Spin 1/2				
neutrale Leptonen				
ν_e	e-Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
ν_μ	μ -Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
ν_τ	τ -Neutrino	$< 10^{-9}$	0	-
geladene Leptonen				
e	Elektron	0,000511	-1	-
μ	Myon	0,106	-1	-
τ	Tau	1,777	-1	-
up-artige Quarks				
u	up-Quark	0,0022	+2/3	ja
c	charm-Quark	1,27	+2/3	ja
t	top-Quark	173	+2/3	ja
down-artige Quarks				
d	down-Quark	0,0047	-1/3	ja
s	strange-Quark	0,096	-1/3	ja
b	bottom-Quark	4,18	-1/3	ja
Spin 1				
Eich-Bosonen				
γ	Photon	0	0	-
W^\pm	W-Boson	80,385	± 1	-
Z^0	Z-Boson	91,1876	0	-
g	Gluon	0	0	ja

Tabelle 2.1 Tabelle der 17 fundamentalen Quanten des Standard-Modells sortiert nach ihrem Spin. Gelistet ist außerdem die Masse (in GeV), die elektrische Ladung in Einheiten der Elementarladung und ob die Teilchen bezüglich der starken Wechselwirkung Farbe tragen. Nicht gezeigt ist das hypothetische Graviton mit Spin 2, das das Austauschquant der Gravitation sein würde.

linkshändige Doubletts						
Lepton-Generationen			Quark-Generationen			I_3
$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$+1/2$ $-1/2$
rechtshändige Singletts						
Lepton-Generationen			Quark-Generationen			I_3
$\nu_{eR}, e_R,$	$\nu_{\mu R}, \mu_R,$	$\nu_{\tau R}, \tau_R,$	$u_R, d_R,$	$c_R, s_R,$	t_R, b_R	0

Tabelle 2.2 Tabelle der Spin 1/2 Fermionen des Standard-Modells, sortiert in die jeweils drei Generationen der Leptonen und der Quarks. Der schwache Isospin (dritte Komponente I_3) entspricht der Ladung der schwachen Wechselwirkung. Nur linkshändige Teilchen (Index L) tragen schwachen Isospin, rechtshändige Teilchen (Index R) dagegen nicht.

Die Eich-Bosonen: Hierzu gehören das masselose Photon (γ), das masselose Gluon (g) und die schweren Z^0 - und W^\pm - Bosonen. Sie haben alle Spin-1. Der Name Eichboson stammt aus dem Konzept der Eichtheorien, mit denen die Kräfte (Wechselwirkungen) in der Natur und ihre Existenz vorhergesagt werden können.

Das Higgs-Boson: Es hat als einziges Teilchen Spin-0.

Die Bosonen sind unmittelbar mit den Kräften in der Natur verbunden, siehe Kapitel [2.4](#)

2.3 Experimentelle Methoden

Die sehr kleinen Längenskalen (≤ 1 fm) lassen sich nach der Unschärferelation der Quantenmechanik nur mit sehr hohen Teilchenimpulsen untersuchen,

$$\Delta P_x \cdot \Delta x \geq \hbar \quad (2.5)$$

Möchte man also z.B. mit einem Elektron ein Streuexperiment durchführen, um die innere Struktur des Protons ($\Delta x \approx 1$ fm) zu untersuchen, so braucht man mindestens Elektronimpulse der Größenordnung

$$\Delta P_x \geq \frac{\hbar}{1 \text{ fm}} \geq 200 \text{ MeV}/c \quad (2.6)$$

Ein Vergleich zur Elektronmasse von $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ zeigt, dass das Elektron hoch-relativistisch sein muss. Die Analyse von Prozessen in der Teilchenphysik und zumeist auch der Kernphysik müssen daher immer auf Basis relativistischer Kinematik und relativistischer Quantenmechanik durchgeführt werden.

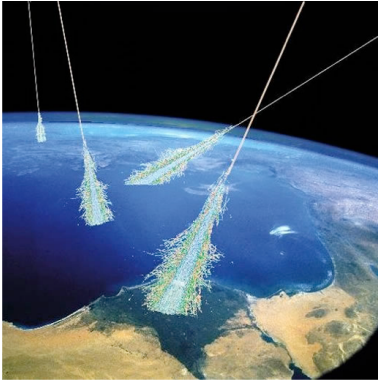


Abb. 2.2
Darstellung von hochenergetischen Teilchen, die aus dem Kosmos auf die Atmosphäre treffen und dort zahlreiche neue Teilchen erzeugen.

Astro-Teilchenphysik: In der Natur lassen sich hochenergetische Teilchen in der kosmischen Strahlung (Höhenstrahlung) beobachten. Diese besteht hauptsächlich aus Protonen und Elektronen, die in Supernova-Explosionen beschleunigt werden und extrem hohe Energien erreichen können. Abb. 2.2 zeigt, dass in Reaktionen dieser Teilchen mit den Teilchen in der Atmosphäre zahlreiche weitere Teilchen neu entstehen und selbst auf der Erde noch nachgewiesen werden können. Bis Ende der 1930er Jahre wurden so auch Teilchen entdeckt, die auf der Erde bis dahin unbekannt waren. Hierzu gehören Anti-Elektronen, Myonen und Pionen. Die Rate hochenergetischer Teilchen ist allerdings sehr gering. Die höchsten beobachteten Energien betragen ca 10^{20} eV. Der Fluss von Muonen aus der kosmischen Strahlung auf der Erde beträgt etwa $100 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$.

Kernreaktionen sind dagegen für das Brennen der Sonne verantwortlich. So entsteht bei der Umwandlung von Protonen und Elektronen in Neutronen und Neutrinos ein Neutrinofluss von $10^{13} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$. Ein noch viel größerer Neutrinofluss entsteht, wenn ein Stern in einer Supernova explodiert. Trotz der großen Entfernung konnten solche Neutrinos experimentell nachgewiesen werden.

Kosmologie Sehr bedeutsam für die Teilchenphysik ist die Überlegung, dass unmittelbar nach dem Urknall sehr hohe Temperaturen (Energien) und Dichten vorgelegen haben müssen. Zu dieser Zeit muss es also ein thermodynamisches Gleichgewicht zwischen allen Teilchensorten gegeben haben, deren Massen kleiner als die typischen Energien der jeweiligen Teilchen sind. Die Quantenphysik der Teilchen ist damit auch verantwortlich dafür, wie sich aus diesem Zustand das jetzige Universum mit Galaxien, Sternen und chemischen Elementen gebildet hat. Viele dieser Phänomene sind inzwischen erklärbar. Nicht verstanden sind aber z.B. die Tatsache, dass es viel mehr Materie als Antimaterie gibt, dass sich überhaupt Galaxien bilden konnten ("Dunkle Materie") oder dass das Universum sich beschleunigt ausdehnt ("Dunkle Energie").

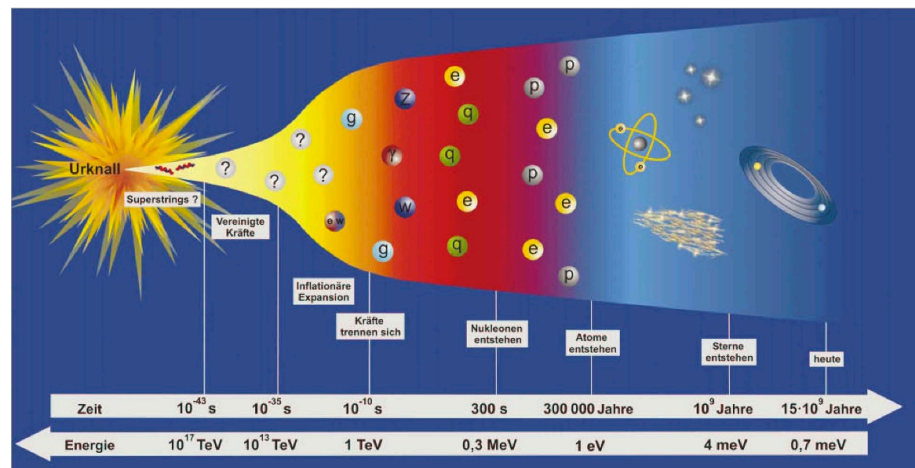


Abb. 2.3 Entwicklung des Universums.

Teilchenphysik an Beschleunigern Künstlich lassen sich höchste Energien erzielen, wenn man Elektronen, Protonen oder deren Anti-Teilchen in großen Teilchenbeschleunigern wie dem “Large Hadron Collider” (LHC) beschleunigt (Abb. 2.4 und 2.5). Die höchste erreichte Energie bisher ist 6500 GeV. Abb. 2.6 zeigt eine Proton-Proton-Reaktion am LHC mit vielen neu erzeugten Teilchen. Der Vorteil dieser Experimente liegt darin, bei genau bekanntem Anfangszustand nahezu alle Quanten im Endzustand einzeln beobachten zu können. Auf diese Weise wurden die entscheidenden Entdeckungen auf dem Weg zum Standardmodell gemacht,

- die Quark-Struktur der Protonen und Neutronen
- aller Fermionen der 2. und 3. Generation
- die Eichbosonen und
- zuletzt 2012 das Higgs-Teilchen.

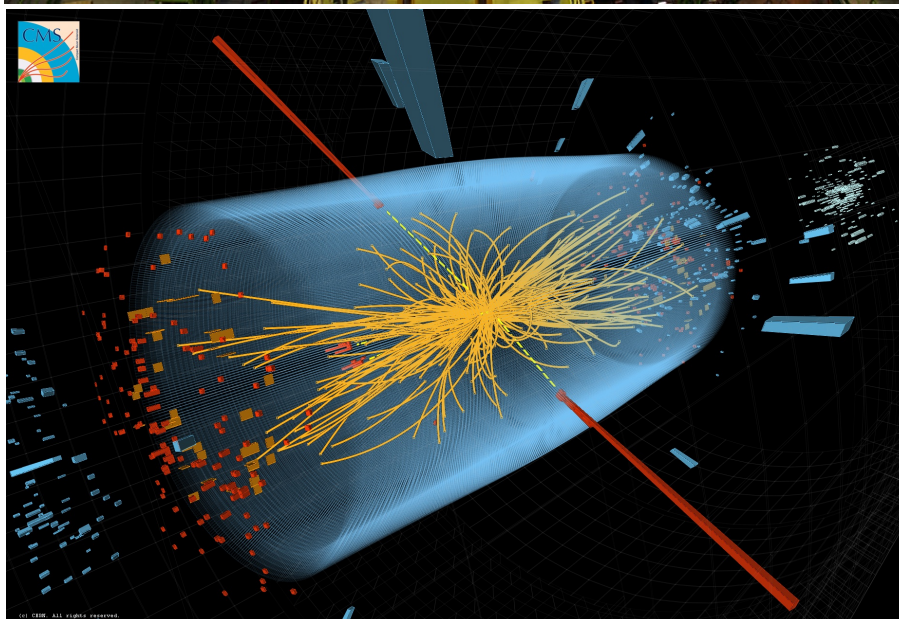
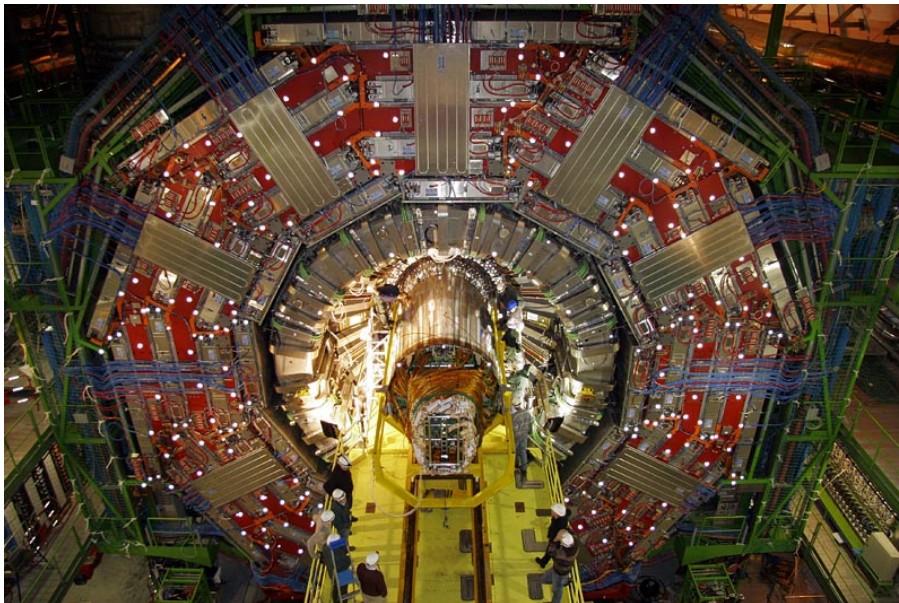


Abb. 2.6 Foto des CMS Experiments am LHC und Bild eines Kandidaten für den Zerfall eines Higgs-Bosons.

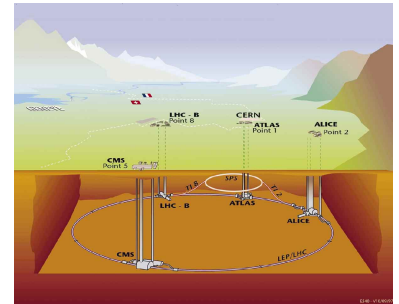


Abb. 2.4 Schematische Darstellung des LHC Beschleunigers am CERN.

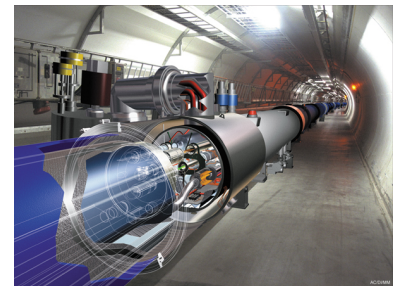


Abb. 2.5 Schematische Darstellung der Magnete im LHC.

2.4 Kräfte

Das wichtigste quantitative Konzept zur Beschreibung von Teilchenreaktionen ist natürlich die Quantenmechanik, allerdings nicht in Form der Schrödinger-Gleichung, denn diese ist nicht-relativistisch und bietet außerdem auch keine Möglichkeit, die Entstehung von neuen Teilchen zu beschreiben. Generell muss daher in Berechnungen anstelle der nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung eine relativistische Formulierung der Quantenmechanik verwendet werden. Aus Einsteins berühmter Äquivalenz von Energie und Masse

$$E = m c^2$$

folgt direkt zumindest prinzipiell die Möglichkeit, aus der kinetischen Energie von Teilchen im Anfangszustand die Masse neuer Teilchen zu erzeugen. In Abb. 2.6 wurde die Energie im Anfangszustand tatsächlich nur zu wenigen Prozent in Masse umgewandelt, der Rest findet sich in der kinetischen Energie der entstandenen Teilchen.

Historisch hat sich aus der Verbindung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie die Quantenfeldtheorie entwickelt. In dieser spielen Symmetrien eine besondere Rolle und führen zu Erhaltungssätzen für Ladungen und zu Wechselwirkungen zwischen Teilchen. Mit diesem Konzept der sogenannten "Eichtheorien" ist es gelungen, drei der vier Kräfte in der Natur zu formulieren:

- **Die elektromagnetische Wechselwirkung** betrifft außer den Neutrinos alle Leptonen und Quarks in genau der gleichen Weise. Allerdings ist die Ladung der Quarks geringer. Die Wechselwirkung wird durch den Austausch von Photonen vermittelt. Zusätzlich zu elastischen Prozessen wie

$$e^- p \rightarrow e^- p$$

werden aber auch Prozesse wie Paarvernichtungs- und Erzeugungsprozesse

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

beschrieben, die in der Natur tatsächlich beobachtet werden.

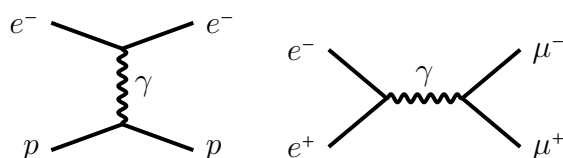


Abb. 2.8 Feynman-Diagramme: Elastische Elektron-Proton-Streuung (links) und Paarvernichtung/Paarerzeugung (rechts) durch Austausch von Photonen. Die Zeit läuft hier von links (Anfangszustand) nach rechts (Endzustand).

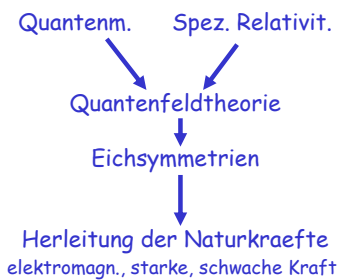


Abb. 2.7

Schema der theoretischen Konzepte in der Teilchenphysik.

Photon

- **Die starke Wechselwirkung** zwischen den Quarks erfolgt nach fast den gleichen Regeln wie beim Elektromagnetismus. Die Wechselwirkung wird durch den Austausch von Gluonen vermittelt. Es gibt Prozesse wie

Gluon

$$u s \rightarrow u s$$

$$u \bar{u} \rightarrow t \bar{t}$$

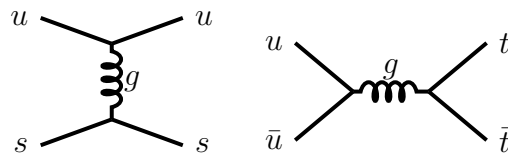


Abb. 2.9 Streuung und Paarvernichtung/Paarerzeugung durch Gluon-Austausch.

Da die Gluonen ebenfalls Farbe tragen, gibt es auch Reaktionen wie

$$g g \rightarrow u \bar{u} \quad g g \rightarrow g g$$

- **Die schwache Wechselwirkung** erlaubt als einzige die Umwandlung von Teilchensorten in andere Teilchensorten. Sie wird durch den Austausch von W^\pm und Z^0 vermittelt.

 W^\pm, Z^0

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$$

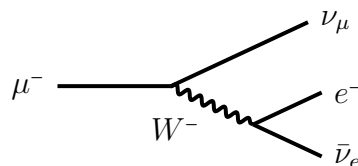


Abb. 2.10 Zerfall eines Myons in ein Myon-Neutrino sowie - durch W -Austausch - in ein Elektron und ein Anti-Elektronneutrino.

- **Yukawa-Wechselwirkungen** gibt es zwischen dem Higgs-Teilchen und allen Fermionen. Aus diesen Yukawa-Kopplungen lassen sich die Massen der Fermionen ausrechnen. Das Higgs-Teilchen reagiert auch mit W^\pm - und Z^0 -Bosonen, allerdings sind dies Eichwechselwirkungen. Auch aus diesen folgt die Masse von W^\pm und Z^0 .

Higgs

Die folgende Abbildung [10.16](#) beschreibt alle Teilchen und Wechselwirkungen im Standard-Modell.

Das Standard Modell

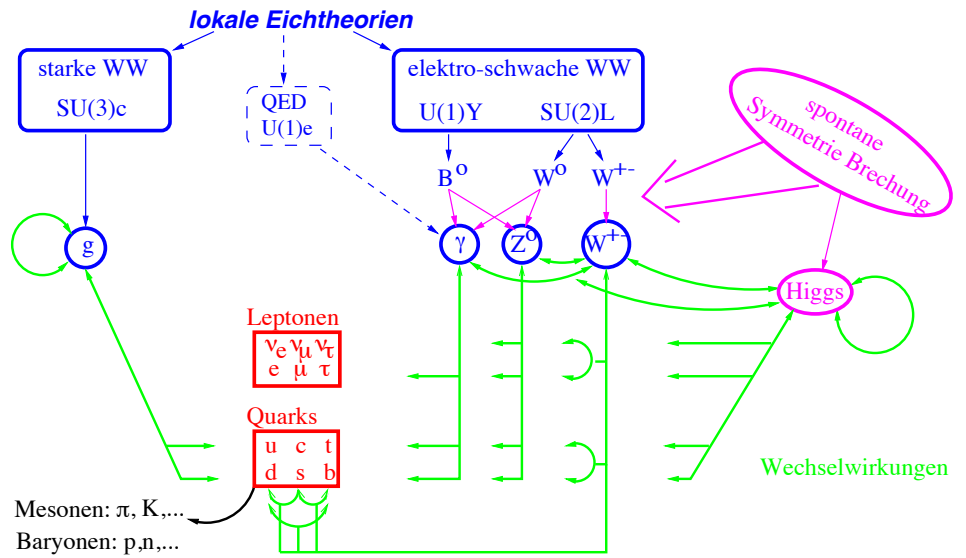


Abb. 2.11 Schema des Standard-Modells mit allen Teilchen. Grüne Pfeile stellen Wechselwirkungen dar.

Sicher ist das Standard-Modell keine *Theory of Everything* (TOE) sondern nur unser derzeitiges Bild der Naturgesetze (Tabelle 16.1). Abb. 2.12 zeigt bereits erreichte, aber auch weitere, zumindest konzeptionell angedachte Schritte einer Vereinigung der Naturgesetze. Ein Ziel dieser Schritte ist sicher auch ein Verständnis der frühen Phasen und Phasenübergänge im frühen Universum (Abb. 2.3).

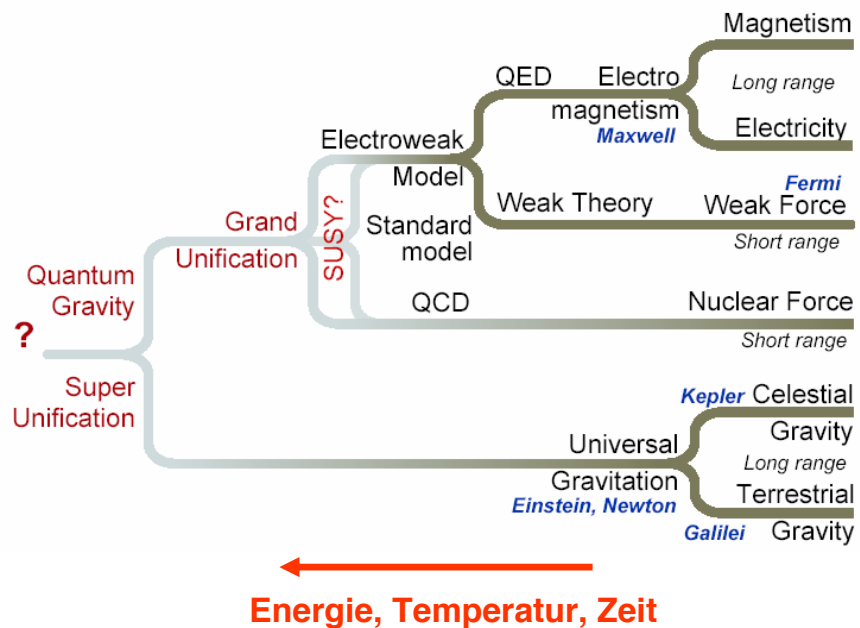


Abb. 2.12 Schema der Vereinheitlichungen der Wechselwirkungen.

Mesonen: $q + \bar{q}'$				
	mit \bar{u}, \bar{d}	mit \bar{s}	mit \bar{c}	mit \bar{b}
hb	u, d: Pionen			
	$u\bar{d} : \pi^+(0,1396)$			
	$u\bar{u}, d\bar{d} : \pi^0(0,1350)$			
	s: Kaonen			
	$s\bar{u} : K^-(0,494)$			
	$s\bar{d} : \bar{K}^0(0,498)$			
	c: D-Mesonen			
	$c\bar{d} : D^+(1,869)$	$c\bar{s} : D_s^+(1,97)$		
	$c\bar{u} : D^0(1,865)$		$c\bar{c} : J/\Psi(3,09)$	
	b: B-Mesonen			
$b\bar{u} : B^-(5,279)$		$b\bar{c} : B^-(6,40)$		
$b\bar{d} : \bar{B}^0(5,279)$	$b\bar{s} : \bar{B}_s^0(5,47)$		$b\bar{b} : \Upsilon(9,46)$	
Baryonen: $q + q' + q''$				
	mit u, d	mit s	mit c	mit b
	leichte Quarks			
	$uud : p(0,9383)$			
	$udd : n(0,9396)$			
	$uuu : \Delta^{++}(1,23)$			
	$ddd : \Delta^-(1,23)$			
	schwere Quarks	$uds : \Lambda^0(1,12)$	$udc : \Lambda_c^+(2,29)$	$udb : \Lambda_b^0(5,62)$
		$uss : \Xi^0(1,32)$	$usc : \Xi_c^+(2,47)$	
		$sss : \Omega^-(1,67)$		

Tabelle 2.3 Tabelle mit einigen Beispielen der leichtesten Hadronen (Mesonen und Baryonen). Gelistet ist der Quark-Inhalt, das verwendete Symbol sowie (in Klammern in GeV) die Masse des Hadrons.

2.5 Hadronen

Quarks bilden aufgrund der starken Wechselwirkung gebundene Systeme, die insgesamt Hadronen genannt werden. Weit über hundert derartige Teilchen sind bekannt.

- **Mesonen** aus jeweils einem Quark und einem Anti-Quark. Sie haben Spin $0, 1, 2, \dots$ (Summe der Spins und der Bahndrehimpulse). Die Masse der Mesonen ergibt sich aus der Masse der Quarks, und ihrer Bindungsenergie. Die leichtesten Mesonen sind die Pionen. Top-Quarks bilden keine Mesonen, da sie zu schnell zerfallen.
- **Baryonen** aus jeweils drei Quarks. Sie haben Spin $1/2, 3/2, \dots$. Die leichtesten Baryonen sind Proton und Neutron. Anti-Baryonen bestehen aus drei Anti-Quarks.
- Ob es weitere gebundene Systeme gibt, z.B. aus mehr als 3 Quarks oder nur aus Gluonen, ist nicht abschliessend geklärt.

Mesonen und Baryonen sind Hadronen

2.6 Kerne

Kerne bestehen aus Protonen und Neutronen. Trotz der elektromagnetischen Abstoßung der Protonen untereinander sind Kerne mit über 100 Protonen möglich, solange die Anziehung zwischen Protonen und Neutronen überwiegt. Diese anziehende Kernkraft ist ein Resultat der starken Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen eng benachbarter Protonen/Neutronen. Stabile Kerne sind energetisch günstig, bei höherer Protonenzahl oder Neutronenzahl treten spontane Zerfälle auf, bis wieder ein stabiler Kern vorliegt. Die Kernbindungsenergie ist maximal für Eisen und beträgt etwa 8 MeV pro Nukleon.

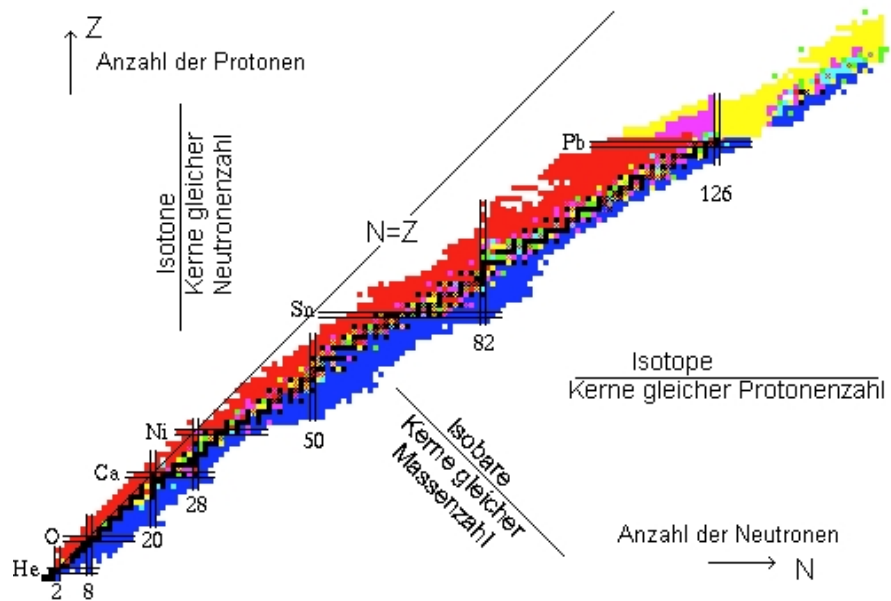


Abb. 2.13 Nuklid-Karte: Darstellung der Atomkerne mit verschiedenen Anzahlen von Protonen (y-Achse) und Neutronen (x-Achse). Schwarz dargestellt sind stabile Kerne. Instabile Kerne sind farbig dargestellt.

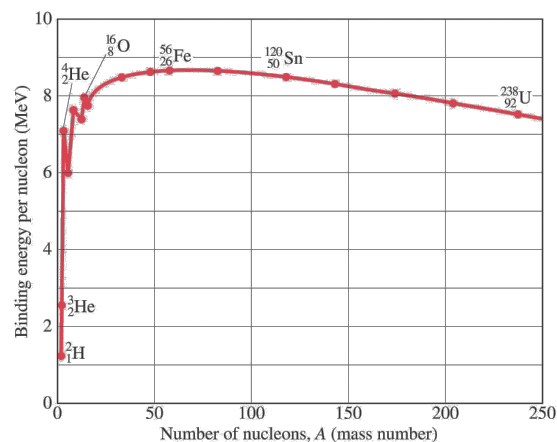


Abb. 2.14 Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Anzahl der Nukleonen in einem Kern.

3 Natürliche Einheiten

In der klassischen Physik sind Prozesse langsam und makroskopisch, so dass die SI-Einheiten

$$\text{kg, m, s}$$

praktisch sind. Sie sind allerdings historisch willkürlich gewählt worden und erfordern daher in den Naturgesetzen zusätzliche Konstanten, deren Zahlenwerte daher ebenfalls willkürlich sind:

$$\hbar_{SI} = 6,58211889 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s} \quad (3.1)$$

$$c_{SI} = 299792458 \text{ m/s} \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{0SI} = 8,854187817 \cdot 10^{-34} \text{ Cb}^2/(\text{Jm}) \quad (3.3)$$

$$k_{BSI} = 1,38064852 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (3.4)$$

$$G_{NSI} = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \quad (3.5)$$

$$(\hbar c)_{SI} = 197,3269602 \text{ MeV fm} \quad (3.6)$$

Die SI-Einheiten sind für relativistische und quantenmechanische Prozesse in der Teilchenphysik und Kernphysik aber keine günstige Wahl. Max Planck erkannte als erster, dass sich alle anderen Einheiten auf eine einzige Einheit zurückführen lassen, wenn man Relativitätstheorie und Quantentheorie als gegeben annimmt. Dieses "natürliche Einheitensystem" (oder "Planck'sche Einheitensystem") ist heute Standard in vielen Bereichen.

Insbesondere kann alle diese Konstanten vermeiden, indem man nur eine einzige Einheit verwendet und alle Zahlenwerte zu 1 setzt.

$$\boxed{\hbar = 1 \quad c = 1 \quad \epsilon_0 = 1 \quad k_B = 1 \quad G_N = 1} \quad (3.7)$$

- Energie: Die Basiseinheit sei 1 eV (oder MeV, GeV) als Einheit der Energie.
- Masse und Impuls: Mit $c = 1$ folgt aus der relativistischen Beziehung

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{P}^2 c^2$$

dass Energien, Massen und Impulse alle die Dimension der Energie haben.

$$\boxed{[\text{Energie}] = [\text{Impuls}] = [\text{Masse}] = \text{GeV}} \quad (3.8)$$

- Zeit: Mit $\hbar = 1$ lautet z.B. die Unschärferelation

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq 1$$

Zeiten haben also offenbar die Dimension $[\text{Zeit}] = \text{GeV}^{-1}$.

- Länge: Mit $c = 1$ haben Zeit und Länge die gleiche Dimension, also

$$\boxed{[\text{Zeit}] = [\text{Länge}] = \text{GeV}^{-1}} \quad (3.9)$$

- Geschwindigkeiten β sind dimensionslos.
- Drehimpuls und Spin: Mit $\hbar = 1$ sind Drehimpulse in der Quantenmechanik nur noch Zahlen, $S = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

Dies macht viele Formeln viel übersichtlicher. Für die Berechnung experimenteller Ergebnisse muss von diesem natürlichen Einheitensystem in SI Einheiten (m, kg, s) umgerechnet werden. Dies ist immer möglich durch einfache Dimensionsbetrachtungen. Praktische Zahlenwerte der Umrechnungsfaktoren hierfür sind

$$\boxed{c_{SI} \approx 30 \frac{\text{cm}}{\text{ns}} \quad (\hbar c)_{SI} \approx 200 \text{ MeV fm}} \quad (3.10)$$

Beispiel Länge $x = 1 \text{ MeV}^{-1}$:

$$\rightarrow x_{SI} = x \cdot \frac{(\hbar c)_{SI}}{\hbar c} = 1 \text{ MeV}^{-1} \frac{200 \text{ MeV fm}}{1} = 200 \text{ fm}$$

Beispiel Zeit $t = 1 \text{ MeV}^{-1}$:

$$\rightarrow t_{SI} = t \cdot \hbar = 6,6 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

Die Feinstrukturkonstante ist dimensionslos und damit in SI- und natürlichen Einheiten gleich. Aus der Messung der Feinstrukturkonstante in der Atomphysik

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137,036}$$

folgt in natürlichen Einheiten ($\epsilon_0 = 1$, $\hbar c = 1$) für die Elementarladung

$$\boxed{\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}, \quad e \approx 0,303} \quad (3.11)$$

Die Elementarladung ist also in natürlichen Einheiten dimensionslos und von der Größenordnung 1.

4 Relativistische Kinematik

4.1 4-er Vektoren	21
4.2 Skalarprodukt und Lorentztransformation	22
4.3 4-er Impulse	23
4.4 Schwerpunktsenergie	25
4.5 Zwei-Körper-Zerfall	27

4.1 4-er Vektoren

Aus der experimentellen Beobachtung, dass die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Inertialsystemen gleich ist, und der theoretischen Beobachtung, dass die Maxwellgleichungen ihre Form unter Lorentztransformationen nicht ändern, hat Einstein diespezielle Relativitätstheorie entwickelt. Sie basiert auf der Forderung, dass alle Inertialsysteme S gleichberechtigt sind:

- Die Naturgesetze (Maxwell-Gl., ...) haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.
- Die Naturkonstanten (c, \hbar, \dots) haben in allen Inertialsystemen die gleichen Zahlenwerte.

Hieraus allein folgen Zeitdilatation und Längenkontraktion sowie die Formeln für die Lorentz-Transformationen. Da Ort- und Zeit-Koordinaten gleichermaßen transformiert werden müssen, ist die einfachste Notation die der Vierervektoren im Minkowski-Raum:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Die Zeit wird hier mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert, damit alle Komponenten des Vierervektors die Dimension einer Länge haben. In natürlichen Einheiten wird $c = 1$ gesetzt, also:

$$x = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Notation:

4-er Vektor: x

3-er Vektor: \vec{x}

Betrag des 3-er Vektors: $|\vec{x}|$.

Die "0-te" Komponente¹ des 4-er Vektors ist die Zeit, $x_0 = t$.

Neben den Ort-Zeit Vierervektoren werden später auch weitere 4-er Vektoren definiert, z.B. der Energie-Impuls 4-er Vektor oder das elektromagnetische 4-er Potential $A = (\varphi, \vec{A})$.

¹In älteren Büchern werden auch andere Konventionen verwendet.

4.2 Skalarprodukt und Lorentztransformation

Lorentztransformationen erlauben die Umrechnung von beliebigen 4-er Vektoren zwischen verschiedenen Inertialsystemen. Aus Sicht eines Systems S' , das sich mit Geschwindigkeit $\beta_s = v_s/c < 1$ und

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_s^2}}$$

in x -Richtung bewegt, gilt (wenn der Ursprung von S und S' zur Zeit $t = 0, t' = 0$ übereinander liegt):

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s & 0 & 0 \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s t - \gamma_s\beta_s x \\ \gamma_s x - \gamma_s\beta_s t \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

also

$$x' = \Lambda x$$

mit der 4×4 Matrix Λ .

Das Skalarprodukt zweier 4-er Vektoren

$$a = (t_a, x_a, y_a, z_a), \quad b = (t_b, x_b, y_b, z_b)$$

ist definiert als²

$$a b = t_a t_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \quad (4.5)$$

oder

$$\boxed{a b = t_a t_b - \vec{a} \vec{b}} \quad (4.6)$$

² Wir verwenden auch im Folgenden immer die weit verbreitete (+---) Vorzeichenkonvention für die Definition des Skalarprodukts. In älteren Büchern wird manchmal auch (-++) benutzt. Praktisch ist auch die Schreibweise mit dem "Metrischen Tensor" g

$$a b = a^T g b = (t_a, x_a, y_a, z_a) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_g \begin{pmatrix} t_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Eine weitere Alternative ist die Verwendung von kovarianten

$$a^\mu = (t_a, x_a, y_a, z_a)$$

und kontravarianten

$$a_\mu = (t_a, -x_a, -y_a, -z_a)$$

4-er Vektoren, so dass mit der Einstein'schen Summenkonvention das Skalarprodukt einfach gleich $ab = a^\mu b_\mu$ ist.

Aufgabe 4.1: Zeigen Sie, dass Skalarprodukte von Vierervektoren Lorentz-invariant sind,

$$\boxed{a' b' = a b} \quad (4.7)$$

Die Norm eines Vierervektors ist sein eigenes Skalarprodukt,

$$a a = a^2 = t_a^2 - \vec{a}^2$$

Für einen Lichtstrahl, der bei $t = 0$ in x -Richtung durch den Ursprung läuft, $x(t = 0) = 0$, gilt $x = ct$. Die Norm des entsprechenden 4-er Vektors $x = (ct, x, 0, 0)$ ist also

$$(ct)^2 - x^2 = 0 \quad (4.8)$$

Wegen der Lorentz-Invarianz des Skalarprodukts ist dies offenbar für alle Inertialsysteme gültig, wenn c in allen diesen Systemen gleich ist.

Allgemeiner kann das Quadrat eines 4-er Vektors positiv, null oder negativ sein. Man unterscheidet daher

$$\text{Zeit-artige 4-er Vektoren } a^2 > 0 \quad (4.9)$$

$$\text{Licht-artige 4-er Vektoren } a^2 = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{Raum-artige 4-er Vektoren } a^2 < 0 \quad (4.11)$$

4.3 4-er Impulse

Ähnlich wie im normalen 3-dim Raum sollte es auch in der 4-dim Raum-Zeit einen 4-er Impuls geben. Zur Ableitung betrachten wir ein Teilchen mit Koordinaten (t, \vec{x}) , Geschwindigkeit β und Lorentz-faktor γ ,

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}}$$

Ein kleines Linienelement ist dann

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (d\vec{x})^2 = (dt)^2 (1 - \vec{\beta}^2) = (dt)^2 / \gamma^2$$

In seinem eigenen Ruhesystem sind die Koordinaten (τ, \vec{x}') mit der Eigenzeit τ und Position $\vec{x}' = \text{const}$. In diesem System ist das Linienelement

$$(ds')^2 = (d\tau)^2$$

Aus der Lorentz-Invarianz des Linienelements,

$$(ds')^2 = (ds)^2$$

folgt die Zeitdilatation,

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 / \gamma^2 \quad (4.12)$$

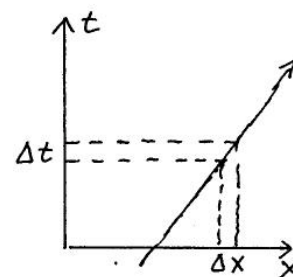


Abb. 4.1
Linienelement eines Teilchens mit $\beta \neq 0$.

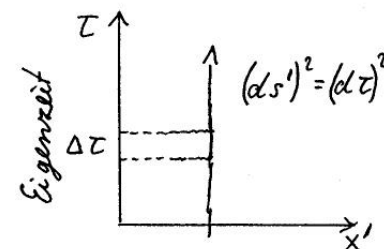


Abb. 4.2
Linienelement eines Teilchens in seinem eigenen Ruhesystem.

Der 4-er Impuls wird definiert als

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = m \frac{dx}{d\tau} \quad (4.13)$$

Die 0-te Komponente, $p_0 = E$, (die Zeit-artige Komponente) wird Energie genannt. Die Masse³ m und Eigenzeit sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Damit ist

$$p = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \gamma \\ \vec{\beta} \gamma \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Damit folgt:

$$E = \gamma m \quad \vec{P} = \gamma \vec{\beta} m \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{P}}{E} \quad (4.15)$$

Die Norm des 4-er Impulsvektors

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) m^2 = m^2 \quad (4.16)$$

ist die Masse² und damit tatsächlich Lorentz-invariant. Damit ist die relativistische Beziehung zwischen Energie, Impuls und Masse (Dispersionsbeziehung)⁴:

$$p^2 = E^2 - \vec{P}^2 = m^2 \quad (4.17)$$

Die kinetische Energie ist definiert als

$$E_{kin} = E - m = (\gamma - 1) m \quad (4.18)$$

Im Ruhesystem eines Teilchen is $\vec{P} = 0$, so dass $E = m$. Damit lassen sich folgende kinematischen Grenzfälle für Teilchenimpulse unterscheiden:

ruhend:	$\beta = 0$	$\gamma = 1$	$\vec{P} = 0$	$E = m$
langsam:	$\beta \ll 1$	$\gamma \gtrsim 1$	$ \vec{P} \ll m$	$E = m + \frac{1}{2}m\beta^2 + \dots \beta^4 + \dots$
ultrarelativ.:	$\beta \lesssim 1$	$\gamma \gg 1$	$ \vec{P} \gg m$	$E \approx \vec{P} $
Masse-los:	$\beta = 1$	$\gamma = \infty$	$ \vec{P} = E$	

Aufgabe 4.2: Berechnen Sie für ein langsames Teilchen ($\beta \ll 1$) die ersten Terme der Taylor-Entwicklung für $E = \gamma m$ bis zur Potenz β^4 .

³Mit Masse ist immer die Ruhemasse gemeint.

⁴Setzt man c explizit ein, so entspricht dies $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.

Die Lorentz-Transformation eines 4-er Impulses erfolgt wie bei anderen 4-er Vektoren auch (wie in Gl. 4.3 auch hier in x -Richtung):

$$p' = \Lambda p$$

$$\begin{pmatrix} E' \\ P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s \beta_s & & \\ -\gamma_s \beta_s & \gamma_s & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s E - \gamma_s \beta_s P_x \\ \gamma_s P_x - \gamma_s \beta_s E \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.3: In einem Inertialsystem S habe ein Teilchen die Geschwindigkeit $\vec{\beta} = (0,0,\beta)$. Wie lautet die Lorentztransformation in das Ruhesystem S^* des Teilchens?

Aufgabe 4.4: Zeigen Sie, dass aus $\vec{\beta} = \vec{P} / E$ und $\beta'_x = P'_x / E'$ das Additionstheorem für Geschwindigkeiten folgt:

$$\beta'_x = \frac{\beta_x - \beta_s}{1 - \beta_x \beta_s}$$

4.4 Schwerpunktsenergie

Gegeben sei ein System aus mehreren Teilchen i mit Massen m_i und 4-er Impulsen $p_i = (E_i, \vec{P}_i)$. Der gesamte 4-er Impuls ist dann

$$p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix} = p_1 + p_2 + \dots \quad (4.19)$$

Im Schwerpunktsystem der Teilchen gilt $\vec{P}^* = \sum_i \vec{P}_i^* = 0$, so dass

$$(p^*)^2 = (E^*)^2 - (\vec{P}^*)^2 = (E_1^* + E_2^* + \dots)^2 \quad (4.20)$$

Die so definierte Schwerpunktsenergie des Teilchen-Systems

$$E_{CMS} = \sqrt{(p^*)^2} = E_1^* + E_2^* + \dots \quad (4.21)$$

wird auch die ‘invariante Masse’ des Teilchen-Systems genannt, denn sie ist das Quadrat eines 4-er Vektors und damit Lorentz-invariant. Verwendet wird oft auch die Abkürzung

$$\boxed{\sqrt{s} = E_{CMS} = \sqrt{p^2}} \quad (4.22)$$

Wegen der Lorentz-invarianz von p^2 lässt sich die Schwerpunktsenergie in einem beliebigen Inertialsystem berechnen, ohne explizit

Invariante Masse

eine Lorentz-Transformation ausführen zu müssen. Für zwei Teilchen ist

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \quad (4.23)$$

Damit folgt

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{P}_1 \vec{P}_2) \quad (4.24)$$

oder auch

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2 \quad (4.25)$$

Beispiel: "Fixed-Target" Streuung an einem ruhenden Teilchen

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{P}_1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s = E_{CMS}^2 = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 m_2$$

Die Schwerpunktsenergie steigt hier also nur langsam mit der Teilchenenergie,

$$E_{CMS} \sim \sqrt{E_1} \quad (4.26)$$

Beispiel: Kollision von zwei Teilchen mit gleichem Impuls

$$p_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{P}_1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} E_2 \\ \vec{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ -\vec{P}_1 \end{pmatrix}$$

Im CMS-System gilt $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$, so dass sich eine lineare Abhängigkeit mit der Energie ergibt,

$$E_{CMS} = E_1 + E_2 \quad (4.27)$$

Hochenergie-Experimente werden daher bevorzugt an Kollidern mit entgegengesetzt laufenden Teilchen durchgeführt, so dass das Schwerpunktsystem das Laborsystem ist.

Beispiel: Ultra-relativistische Kollision

$$E_1 \approx |\vec{P}_1| \quad E_2 \approx |\vec{P}_2| \quad \vec{P}_1 \vec{P}_2 = -|\vec{P}_1| |\vec{P}_2|$$

und damit

$$E_{CMS} \approx \sqrt{4 E_1 E_2} \quad (4.28)$$

Beim HERA Elektron-Proton-Kollider mit $E_e = 27,5 \text{ GeV}$ und $E_p = 920 \text{ GeV}$ ergibt sich $E_{CMS} = 318 \text{ GeV}$.

4.5 Zwei-Körper-Zerfall

Für den Zerfall $a \rightarrow bc$ gilt Energie und Impuls-Erhaltung,

$$p_a = p_b + p_c \quad \begin{pmatrix} E_a \\ \vec{P}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_b + E_c \\ \vec{P}_b + \vec{P}_c \end{pmatrix}$$

Die Masse von Teilchen a ist daher die Schwerpunktsenergie der Teilchen $b + c$,

$$\boxed{m_a^2 = p_a^2 = (p_b + p_c)^2 = (E_b + E_c)^2 - (\vec{P}_b + \vec{P}_c)^2} \quad (4.29)$$

Für die Messung von m_a benötigt man also Energien und Impulse der Zerfallsprodukte. Bei bekannten Massen m_b, m_c reichen auch entweder die Impulse oder die Energien.

Im Schwerpunktsystem von Teilchen a lässt sich die Energie der Zerfallsprodukte (hier E_b^*) berechnen aus

$$m_c^2 = (p_c^*)^2 = (p_a^* - p_b^*)^2 \quad (4.30)$$

$$= m_a^2 + m_b^2 - 2(E_a^* E_b^* - \vec{P}_a^* \vec{P}_b^*) \quad (4.31)$$

$$= m_a^2 + m_b^2 - 2(m_a E_b^*) \quad (4.32)$$

wobei in diesem System $E_a^* = m_a$ und $\vec{P}_a^* = 0$ benutzt wurde. Es folgt

$$\boxed{E_b^* = \frac{m_a^2 + m_b^2 - m_c^2}{2m_a}} \quad (4.33)$$

Aufgabe 4.5: Zeigen Sie, dass mit dieser Formel [4.33](#) auch $E_b^* + E_c^* = \sqrt{s}$ gilt.

Für Zerfallsprodukte ohne Masse oder für $m_a \gg m_b, m_c$ folgt

$$E_b^* = E_c^* = \frac{m_a}{2} \quad (4.34)$$