Anhang zur Vorlesung „Laserkühlung“

Andreas Hemmerich WS 2015

Maxwells Gleichungen

E = elektrische Feldstärke
H = magnetische Feldstärke

D = dielektrische Verschiebung
B = magnetische Induktion

P = Polarisation
M = Magnetisierung

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

$$B = \mu_0 H + M$$

$S = E \times H$ Poynting-Vektor

$u = \frac{1}{2}\left(DE + BH\right)$ elektromagnetische Energiedichte

$\rho = \rho_w + \rho_P$ elektrische Ladungsdichte $\rho_P = -\nabla P$

$\eta = \eta_w + \eta_M$ magnetische Ladungsdichte $\eta_M = -\nabla M$

$j = j_w + j_P + j_M$ elektrische Stromdichte $j_P = \dot{P}, \quad j_M = \dfrac{1}{\mu_0} \nabla \times M$

$\ell = \ell_w + \ell_P + \ell_M$ magnetsiche Stromdichte $\ell_M = \dot{M}\,, \quad \ell_P = -\dfrac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times P$

$$\nabla D = \rho_w$$

$$\nabla B = \eta_w$$

$$\nabla \times E = -\dot{B} - \ell_w$$

$$\nabla \times H = \dot{D} + j_w$$

$$\nabla E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla H = \frac{1}{\mu_0}\eta$$

$$\nabla \times D = -\frac{1}{c^2}\dot{H} - \varepsilon_0 \ell$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c^2}\dot{E} + \mu_0 j$$

$$\nabla S + H\dot{B} + E\dot{D} + Ej_w + H\ell_w = 0$$

Experiment: keine wahren magnetischen Ladungen oder Ströme

$$\eta_w = 0\,, \quad \ell_w = 0$$

Strahlungsfelder in Nicht-Leitern

$\rho_w = 0\ ,\ \ j_w = 0$

$$E(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E(r)\,e^{-i\omega t} + E(r)^* e^{i\omega t}\right)$$

$$B(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B(r)\,e^{-i\omega t} + B(r)^* e^{i\omega t}\right)$$

analog für D, H

Maxwell

$$\nabla \times E = i\omega\, B$$

$$\nabla \times H = -i\omega\, D$$

$$\nabla D = \nabla B = 0$$

Materie

P, M induziert durch E, H

$$P = \varepsilon_0 \chi\, E \qquad \Rightarrow \qquad D = \varepsilon\, E\ ,\ \ \varepsilon = \varepsilon_0\,(1+\chi)$$

$$M = \mu_0 \xi\, H \qquad\qquad B = \mu\, H\ ,\ \ \mu = \mu_0\,(1+\xi)$$

$\chi = \chi(E,\omega)\ ,\ \xi = \xi(H,\omega)$ einheitenlose komplexe Tensoren

(elektrische und magnetische Suszeptibilität)

Klassische Optik

$$\xi(H,\omega) = \xi^{(1)}(\omega)$$

$$\chi(E,\omega) = \chi^{(1)}(\omega) + \sum_{\nu_1 \in \{1,2,3\}} \chi^{(2)}_{\nu_1}(\omega)\, E_{\nu_1} + \sum_{\nu_1,\nu_2 \in \{1,2,3\}} \chi^{(3)}_{\nu_1,\nu_2}(\omega)\, E_{\nu_1} E_{\nu_2} + \ldots$$

Lineare Optik

Nichtlineare Optik

Kerr-Effekt

Nichtlineare Optik

Vierwellenmischung

$\xi^{(1)}(\omega)$, $\chi^{(1)}(\omega)$, $\chi^{(2)}_{\nu_1}(\omega)$, $\chi^{(3)}_{\nu_1,\nu_2}(\omega)$, ... komplexe Matrizen

Lineare isotrope Dielektrika

$\varepsilon = \varepsilon(\omega)\,,\ \mu = \mu_0$ komplexe Skalare

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \nabla \times E &= i\omega\, B \\ \nabla \times B &= -i\omega\, \mu\varepsilon\, D \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\Delta E + k^2\, E = 0 \\ &k^2 \equiv \mu\varepsilon\, \omega^2 \end{aligned}$$

Brechungsindex: $n \equiv c\sqrt{\mu\,\varepsilon} = n_{Re} + i\, n_{Im} = \sqrt{1+\chi} \approx 1 + \frac{1}{2}\chi$

Phasengeschwindigkeit: $\tilde{c} \equiv \dfrac{c}{n_{Re}}$

Absorptionskoeffizient: $\kappa \equiv 2\,\dfrac{\omega}{c}\, n_{Im}$

Beispiel:

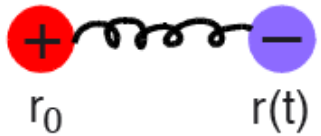
$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad \vec{B} = \frac{1}{\omega}\,\vec{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{k}\,\vec{E} = \vec{k}\,\vec{B} = 0\,,\quad \vec{k}^2 = \mu\varepsilon\,\omega^2$$

$\vec{k} = k\,\hat{u}\,,\ r = \hat{u}\vec{r}\,,\quad \hat{u} \equiv$ reeller Einheitsvektor $\Rightarrow$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(i\frac{\omega}{c}\, n_{Re}\,\hat{u}\vec{r}\right) \exp\left(-\frac{\omega}{c}\, n_{Im}\,\hat{u}\vec{r}\right) = \vec{E}_0 \exp\left(i\frac{\omega}{\tilde{c}}\, r\right) \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\, r\right)$$

Lorentz-Modell



$$m\left(\ddot{q} + \gamma\,\dot{q} + \omega_0^2\,q\right) = e\,E(t) \qquad\qquad q(t) = r(t) - r_0$$

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_0\,e^{-i\omega t} + E_0^*\,e^{i\omega t}\right),\ q(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_0\,e^{-i\omega t} + q_0^*\,e^{i\omega t}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \text{induziertes Dipolmoment}:\quad e q_0 = \frac{e^2}{\sqrt{2}\,m\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)}\,E_0 = \alpha\,E_0$$

Atomare Polarisierbarkeit

Mehrere Resonanzen:

$$\alpha = \frac{e^2}{\sqrt{2}\,m}\sum_n \frac{f_n}{\left(\omega_n^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)}\ ,\quad Z = \sum_n f_n \quad \text{Ordnungszahl}$$

Oszillatorstärken f_n gewinnt man aus quantenmechanischer Behandlung

Makroskopische Suszeptibilität: $\chi = \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{n}\, \alpha \quad , \quad \bar{n} = \text{Teilchendichte}$

Makroskopische Polarisation: $\vec{P}(r) = \underbrace{\bar{n}(r)}_{\text{Teilchendichte}} \; \underbrace{e\, \vec{q}_0}_{\text{Dipolmoment pro Teilchen}} = \varepsilon_0\, \chi\, \vec{E}(r)$