Übungen zur Einführung in die Physik der Quantengase

Blatt 1, mit Lösungen

Übung 1: Optische Blochgleichung für ein Zwei-Niveau-Atom

Die optische Blochgleichung für ein Zwei-Niveau-Atom ohne Spontanemission lautet
$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{F} \times \vec{B}$ mit dem Bloch-Vektor $\vec{B} = (u,v,w)$ und dem Feldvektor $\vec{F} = (\omega_1, 0, \delta)$.
(a) Zeigen Sie, dass der Bloch-Vektor um den Feldvektor mit der Frequenz $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2}$ präzediert.

Hinweis: Stellen Sie sowohl $\vec{B}$ als auch $\vec{F}$ durch die Einheitsvektoren
$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\Omega}(\delta, 0, -\omega_1)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0)$, $\vec{\varepsilon}_3 = \frac{1}{\Omega}(\omega_1, 0, \delta)$ dar.

<u>Lösung</u>

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\varepsilon}_1\vec{B}\right) = \Omega\ \vec{\varepsilon}_1\left(\vec{\varepsilon}_3 \times \vec{B}\right) = \Omega\ \left(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_3\right)\vec{B} = -\ \Omega\ \vec{\varepsilon}_2\vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\varepsilon}_2\vec{B}\right) = \Omega\ \vec{\varepsilon}_2\left(\vec{\varepsilon}_3 \times \vec{B}\right) = \Omega\ \left(\vec{\varepsilon}_2 \times \vec{\varepsilon}_3\right)\vec{B} = \quad \Omega\ \vec{\varepsilon}_1\vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\varepsilon}_3\vec{B}\right) = \Omega\ \vec{F}\left(\vec{F} \times \vec{B}\right) = 0$$

Und somit

$$\vec{\varepsilon}_1\vec{B} = B_\perp \cos(\Omega t + \phi)$$

$$\vec{\varepsilon}_2\vec{B} = B_\perp \sin(\Omega t + \phi)$$

$$\vec{B} = B_\perp \cos(\Omega t + \phi)\ \vec{\varepsilon}_1 + B_\perp \sin(\Omega t + \phi)\ \vec{\varepsilon}_2 + B_\parallel\ \vec{\varepsilon}_3$$

Normierung erfordert: $B_\perp^2 + B_\parallel^2 = 1$

(b) Zeigen Sie dass $\rho_{ee} = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2}\sin^2(\frac{1}{2}\Omega t)$ falls $\rho_{ee}(0) = 0$.

<u>Lösung</u>

Es gilt:

$$(0,0,-1) = \frac{\omega_1}{\Omega}\,\vec{\varepsilon}_1 - \frac{\delta}{\Omega}\,\vec{\varepsilon}_3$$
$$\vec{B}(t=0) = B_\perp\,\cos(\phi)\,\vec{\varepsilon}_1 + B_\perp\sin(\phi)\,\vec{\varepsilon}_2 + B_\parallel\,\vec{\varepsilon}_3$$

Und somit $\quad \vec{B}(t=0) = (0,0,-1) \quad \Rightarrow \quad \phi = 0,\ B_\perp = \frac{\omega_1}{\Omega},\ B_\parallel = -\frac{\delta}{\Omega}$

und deshalb $\quad \vec{B}(t) = \frac{\omega_1}{\Omega}\cos(\Omega t)\,\vec{\varepsilon}_1 + \frac{\omega_1}{\Omega}\sin(\Omega t)\,\vec{\varepsilon}_2 - \frac{\delta}{\Omega}\,\vec{\varepsilon}_3$

$$w = \hat{z}\vec{B} = \left(-\frac{\omega_1}{\Omega}\,\vec{\varepsilon}_1 + \frac{\delta}{\Omega}\,\vec{\varepsilon}_3\right)\vec{B}(t) = -\frac{\omega_1^{\ 2}}{\Omega^2}\cos(\Omega t) - \frac{\delta^2}{\Omega^2}$$
$$\rho_{ee} = \frac{1}{2}(1+w) = \frac{\omega_1^{\ 2}}{\Omega^2}\frac{1}{2}\big(1-\cos(\Omega t)\big) = \frac{\omega_1^{\ 2}}{\Omega^2}\sin^2(\Omega t/2)$$

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass der Hamiltonoperator
$H = \hbar\omega_0\ b^\dagger b + vb + v^* b^\dagger, \quad b = |g\rangle\langle e|\ ,\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mu E\ e^{-i\omega t} + \mu E^* e^{i\omega t}\right)$ in der mitrotierenden Basis nach Drehwellennäherung (Vernächlässigung der schnell rotierenden Terme) lautet:

$$H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ \omega_1 & -2\delta \end{pmatrix}$$

<u>Lösung</u>

Transformation ins rotierende Bezugssystem $|\tilde{e}\rangle = e^{-i(\omega t+\phi)}|e\rangle\ ,\ |\tilde{g}\rangle = |g\rangle$. Es gilt für beliebigen Zustand $\quad |\psi\rangle = \tilde{\psi}_g|g\rangle + \tilde{\psi}_e|\tilde{e}\rangle = \tilde{\psi}_g|g\rangle + \tilde{\psi}_e\ e^{-i(\omega t+\phi)}|e\rangle$. Für Schrödingergleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ folgt

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}_g}{\partial t}\left|g\right\rangle + i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}_e}{\partial t}\left|\tilde{e}\right\rangle + \hbar\omega\ \tilde{\psi}_e\left|\tilde{e}\right\rangle$$

$$H\left|\psi\right\rangle = \hbar\omega_0\ \tilde{\psi}_e\left|\tilde{e}\right\rangle + v\ e^{-i(\omega t+\phi)}\ \tilde{\psi}_e\left|g\right\rangle + v^* e^{i(\omega t+\phi)}\ \tilde{\psi}_g\left|\tilde{e}\right\rangle$$

und somit $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_g\\ \tilde{\psi}_e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & u\\ u^* & -\hbar\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_g\\ \tilde{\psi}_e\end{pmatrix}$ wobei

$u = v\ e^{-i(\omega t+\phi)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mu E\ e^{-i(2\omega t+\phi)} + \mu E^* e^{-i\phi}\right) \approx \frac{\hbar}{2}\omega_1$ (Drehwellennäherung !).

Damit folgt im mitrotierenden System $H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & \omega_1\\ \omega_1 & -2\delta\end{pmatrix}$

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände des Hamiltonoperators in der mitrotierenden Basis in der Drehwellennäherung.

Das Ergebnis lautet: $E_\pm = -\frac{\hbar\delta}{2}\left(1 \pm \frac{\Omega}{|\delta|}\right)$

$\left|+\right\rangle = -\sin(\theta)\left|g\right\rangle + \cos(\theta)\left|e\right\rangle$, $\left|-\right\rangle = \cos(\theta)\left|g\right\rangle + \sin(\theta)\left|e\right\rangle$ mit $\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\omega_1}{\delta}\right)$.

Zeichnen Sie die Eigenwerte in Abhängigkeit von der Verstimmung δ mit und ohne Wechselwirkung. Diskutieren Sie die Unterschiede für δ >0 bzw. δ <0. Welche Bedeutung hat der Winkel θ im Blochvektorbild?

<u>Lösung</u>

Das charakteristische Polynom für die Matrix $\begin{pmatrix}0 & \omega_1\\ \omega_1 & -2\delta\end{pmatrix}$ ist $x^2 + 2\delta\ x - \omega_1^2 = 0$ mit den

Lösungen $x = -\delta \pm \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2} = -\delta\left(1 \pm \frac{\Omega}{\delta}\right)$. Die Eigenwerte von H sind also

$E_\pm = -\frac{\hbar\delta}{2}\left(1 \pm \frac{\Omega}{|\delta|}\right)$, wobei "±" so gewählt werden, dass für $\omega_1 = 0$ unabhängig vom Vorzeichen der Verstimmung δ gilt: $E_- = 0$, $E_+ = -\hbar\delta$.

Ansatz für Eigenvektoren

$\left|+\right\rangle = -\sin(\theta)\left|g\right\rangle + \cos(\theta)e^{i\phi}\left|e\right\rangle$, $\left|-\right\rangle = \cos(\theta)\left|g\right\rangle + \sin(\theta)e^{-i\phi}\left|e\right\rangle$ führt zu den Eigenwertgleichungen

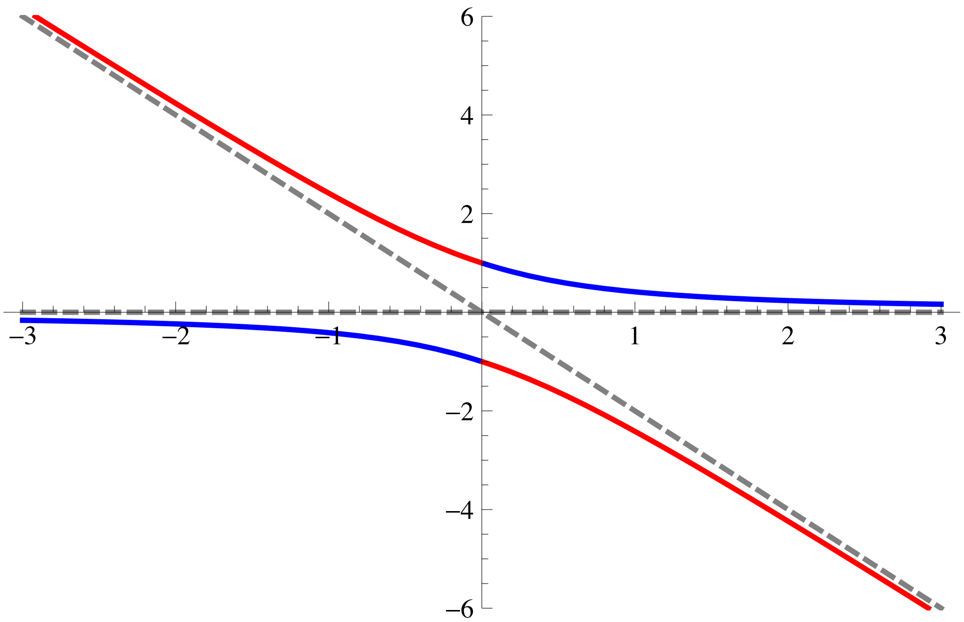
$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ \omega_1 & -2\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\, e^{i\phi} \end{pmatrix} = -\delta\left(1+\frac{\Omega}{|\delta|}\right)\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \\ \omega_1 & -2\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) e^{-i\phi} \end{pmatrix} = -\delta\left(1-\frac{\Omega}{|\delta|}\right)\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

und somit zu $\omega_1 \cos(\theta) e^{i\phi} = \delta\left(1+\frac{\Omega}{|\delta|}\right)\sin(\theta)$. Es folgt $e^{-i\phi} = 1$ und $\tan(\theta) = \frac{\omega_1}{\delta + sign(\delta)\,\Omega}$

und weiter

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = \frac{2\frac{\omega_1}{\delta+sign(\delta)\,\Omega}}{1-\left(\frac{\omega_1}{\delta+sign(\delta)\,\Omega}\right)^2} = \frac{2\omega_1\left(\delta+sign(\delta)\,\Omega\right)}{\left(\delta+sign(\delta)\,\Omega\right)^2-\left(\omega_1\right)^2} = \frac{2\omega_1\left(\delta+sign(\delta)\,\Omega\right)}{2\delta^2+2\delta\;sign(\delta)\,\Omega} = \frac{\omega_1}{\delta}$$



$E_+ = rot,\; E_- = blau$

Für δ >0 (bzw. δ <0) hat der Zustand größerer (bzw. kleinerer) Energie (blauer Graph) die größere Beimischung von $|g\rangle$. Der Winkel 2θ ist der Winkel zwischen Feldvektor und der z-Achse.