Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

CUI THE HAMBURG CENTRE FOR ULTRAFAST IMAGING

Proseminar für Quanteninformation und Quantencomputer

Vorbesprechung

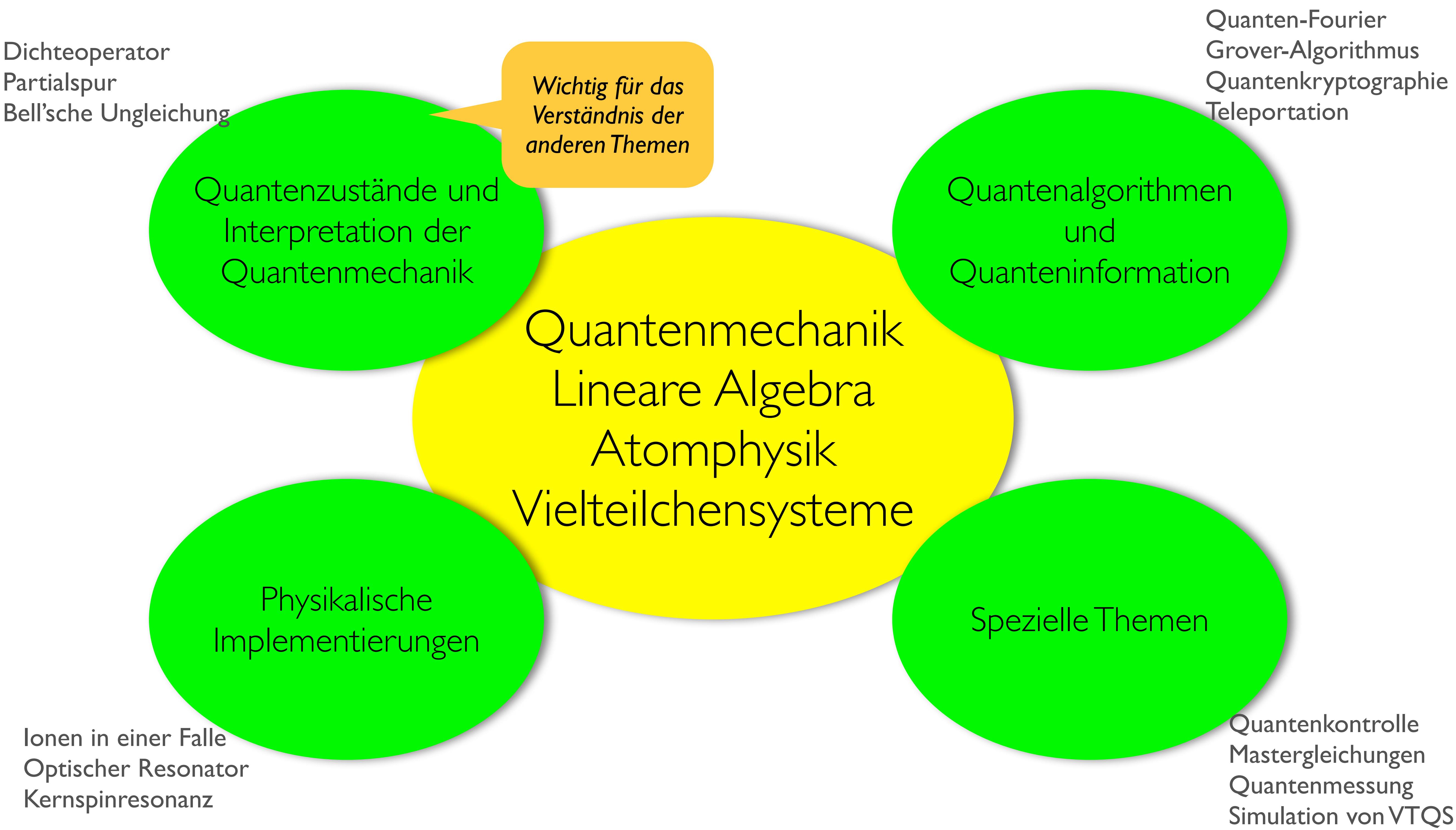
Antonio Negretti
Zentrum für Optische Quantentechnologien
The Hamburg Centre for Ultrafast Imaging
Universität Hamburg
anegrett@physnet.uni-hamburg.de

5. April 2013

ÜBERBLICK ÜBER DIE THEMEN

- Einführung in die Quanteninformationsverarbeitung (12.04.2013)
- Quantenzustände, Dichteoperator und reduzierter Dichteoperator, Schmidt-Zerlegung (19.04.2013)
- Verschränkung: Bell'sche Ungleichung und Quantenteleportation (26.04.2013)
- Quantenalgorithmen I: Quanten-Fourier-Transformation und Anwendungen (03.05.2013)
- Quantenalgorithmen II: der Suchalgorithmus von Grover (10.05.2013)
- Physikalische Implementierung des Quantenrechners I: Kalte gefangene Ionen (17.05.2013)
- Physikalische Implementierung des Quantenrechners II: Optischer Resonator (31.05.2013)
- Physikalische Implementierung des Quantenrechners III: Kernspinresonanz (07.06.2013)
- Quantenkryptografie (14.06.2013)
- Optimale Kontrolle der Quantensysteme und der Krotov-Algorithmus (21.06.2013)
- Quanten-Mastergleichung in der Markov'schen Nährung (28.06.2013)
- Kontinuierliche Quantenmessungen und stochastische Schrödingergleichung (05.07.2013)
- Klassische Simulation von Vielteilchen-Quantensystemen: Density matrix renormalization group und/oder Multiconfigurational time-dependent Hartree method for bosons (12.07.2013)

ÜBERBLICK ÜBER DIE THEMEN



QUANTENZUSTÄNDE VERSCHRÄNKUNG UND DEREN INTERPRETATION

QUANTENZUSTÄNDE UND DICHTEOPERATOREN

- Reiner Zustand $|\psi\rangle$ und Dichetoperator $\hat{\rho}$: Eigenschaften, Erwartungswert einer Observable, Zeitentwicklung bzw. von Neumann-Gleichung, physikalische Interpretation, usw.

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$$

Wahrscheinlichkeit der Quantenmechanik

QUANTENZUSTÄNDE UND DICHTEOPERATOREN

- Reiner Zustand $|\psi\rangle$ und Dichetoperator $\hat{\rho}$: Eigenschaften, Erwartungswert einer Observable, Zeitentwicklung bzw. von Neumann-Gleichung, physikalische Interpretation, usw.

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$$

Wahrscheinlichkeit der Quantenmechanik

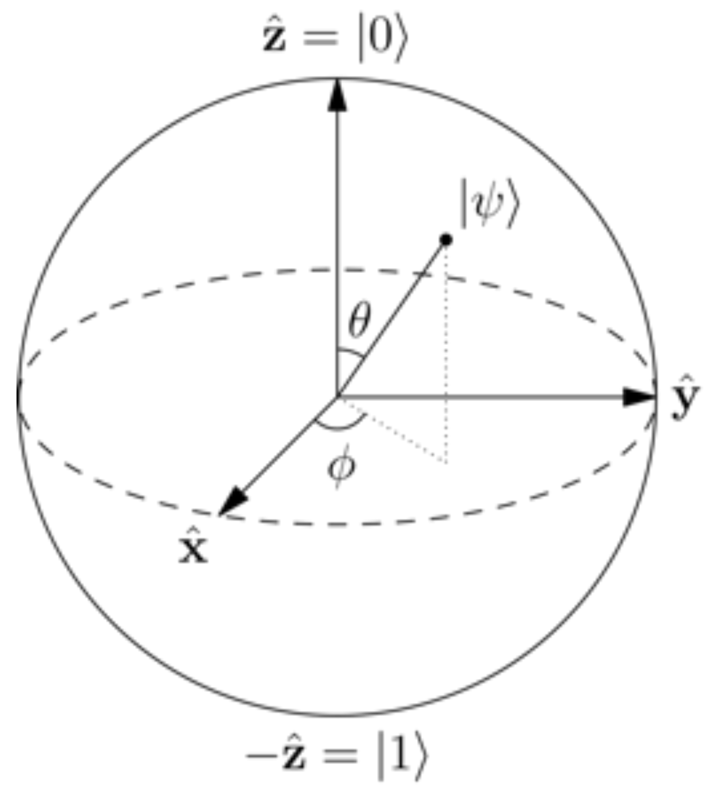
$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$$

Klassische Wahrscheinlichkeiten

Reine Zustände

QUANTENZUSTÄNDE UND DICHTEOPERATOREN

- Reiner Zustand $|\psi\rangle$ und Dichteoperator $\hat{\rho}$: Eigenschaften, Erwartungswert einer Observable, Zeitentwicklung bzw. von Neumann-Gleichung, physikalische Interpretation, usw.
- Darstellung des Dichteoperators eines Qubit (Bloch-Kugel)



QUANTENZUSTÄNDE UND DICHTEOPERATOREN

- Reiner Zustand $|\psi\rangle$ und Dichteoperator $\hat{\rho}$: Eigenschaften, Erwartungswert einer Observable, Zeitentwicklung bzw. von Neumann-Gleichung, physikalische Interpretation, usw.
- Darstellung des Dichteoperators eines Qubit (Bloch-Kugel)
- Dichteoperator von zwei oder mehr Quantensystemen: Wie kann man den Dichteoperator eines Teilsystems ableiten?

Frage: Was ist der Zustand zweier Quantensysteme A und B?

Tensorprodukt

$$|\psi_A\rangle \qquad |\psi_B\rangle \longrightarrow |\psi_{AB}\rangle \quad |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

QUANTENZUSTÄNDE UND DICHTEOPERATOREN

- Reiner Zustand $|\psi\rangle$ und Dichteoperator $\hat{\rho}$: Eigenschaften, Erwartungswert einer Observable, Zeitentwicklung bzw. von Neumann-Gleichung, physikalische Interpretation, usw.

- Darstellung des Dichteoperators eines Qubit (Bloch-Kugel)

- Dichteoperator von zwei oder mehr Quantensystemen: Wie kann man den Dichteoperator eines Teilsystems ableiten?

- Schmidt-Zerlegung und Purifikation

VERSCHRÄNKUNG UND TELEPORTATION

- Was versteht man unter dem Begriff *Verschränkung* und wie kann man ihn definieren?

$$|\psi\rangle = \frac{|a_1\rangle|b_2\rangle + |b_1\rangle|a_2\rangle}{\sqrt{2}} \stackrel{?}{=} |\phi_1\rangle|\phi_2\rangle$$

Frage: Überlichtgeschwindigkeit der Informationsübertragung?

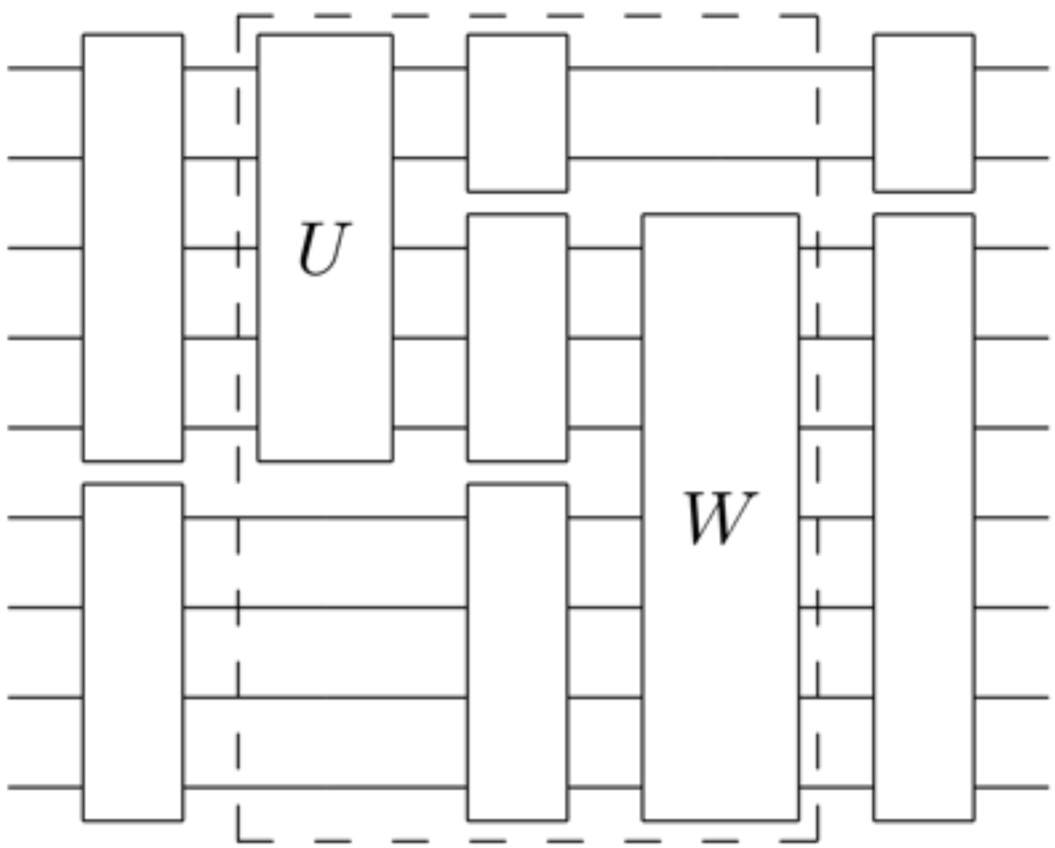
VERSCHRÄNKUNG UND TELEPORTATION

- Was versteht man unter dem Begriff *Verschränkung* und wie kann man ihn definieren?
- Ein berühmtes Beispiel: Das Einstein-Podolsky-Rosen Gedankenexperiment mit atomaren Spins
- Nicht-Lokalität und Bell'sche Ungleichung

Deutung der Ungleichung und
kurze Beschreibung einiger Experimenten

VERSCHRÄNKUNG UND TELEPORTATION

- Was ist ein Quantenschaltkreis und ein Quantengatter?



- Erstes Beispiel eines Quantenschaltkreises: Quantenteleportation

QUANTENALGORITHMEN

QUANTENALGORITHMEN

- Wozu brauchen wir Algorithmen? Um schwierige Rechungen durchzuführen. Aber was heißt überhaupt schwierig? $\longrightarrow$ Komplexitätsklassen (P, NP, ...)
- Quantenalgorithmen konzentrieren sich auf folgende Fragenstellungen:
  - Suche in einer Datenbank (Grover Algorithums)
  - Erkennung einer globalen Eigenschaft einer Funktion (z.B., Periode, Mittelwert, usw.). Ein Beispiel: Quanten-Fourier-Transformation
  - Zahlentheoretische Probleme, lineare Gleichungssysteme (PRL, 103, 150502), Ausgleichungsrechnung (PRL, 109, 050505)

QUANTENALGORITHMEN I

- Der Algorithmus für die Quanten-Fourier-Transformation:
  - Was ist das und wofür ist es nützlich?
  - Beschreibung des Algorithmus
  - Leistung und Voraussetzungen
  - Anwendungen:
    - Abschätzung einer Phase $\hat{U}|u\rangle = e^{i2\pi\varphi}|u\rangle$
    - Primzahlfaktorisierung $N = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$

QUANTENALGORITHMEN II

- Der Grover-Algorithmus (GA):
  - Was ist das und wofür ist es nützlich? (z.B., unsortierte Datenbank: Suche nach einem Namen in einem Telefonbuch)
  - Beschreibung des Algorithmus (Orakle, Prozedur, Geometrische Auffassung)
  - Leistung und Voraussetzungen
- Quantensimulation des GA: Finde einen Hamiltonopetaror $\hat{H}$ und einen Anfangszustand $|\psi\rangle$, damit der entsprechende Quantenschaltkreis den GA umsetzt.

QUANTENKRIPTOGRAFIE

- Worin liegt der Vorteil im Vergleich zur klassischen Kommunikation?
- Irreversibilität der Quantenmessung (Postulat der Quantenmechanik) und Rolle der Verschränkung
- Das BB84-Protokoll
- Experimentelle Implementierung des Protokolls mit Photonen

PHYSIKALISCHE IMPLEMENTIERUNGEN EINES QUANTENRECHNERS

DIE DIVINCENZO KRITERIEN

Frage: Welche Voraussetzungen muss ein skalierbarer und fehlertoleranter Quantenrechner erfüllen?
[D. P. Divincenzo, Fortschr. Phys. 48, 711 (2000)]

DIE DIVINCENZO KRITERIEN

Frage: Welche Voraussetzungen muss ein skalierbarer und fehlertoleranter Quantenrechner erfüllen?
[D. P. Divincenzo, Fortschr. Phys. 48, 711 (2000)]

1. Er besteht aus einem skalierbaren System gut charakterisierter Qubits
2. Alle Qubits können in einen wohldefinierten Anfangszustand gebracht werden
3. Ein universelles Set elementarer Quantengatter kann ausgeführt werden
4. Einzelne Qubits (zumindest eines) können ausgelesen (gemessen) werden
5. Die relevante Dekohärenzzeit ist viel länger als die Zeit, die benötigt wird, ein elementares Quantengatter zu realisieren, sodass mit geeignetem fehlerkorrigiertem Code die Fehlerrate pro Gatter unter der Schwelle für fehlertolerantes Quantenrechnen liegt

DIE DIVINCENZO KRITERIEN

Frage: Welche Voraussetzungen muss ein skalierbarer und fehlertoleranter Quantenrechner erfüllen?
[D. P. Divincenzo, Fortschr. Phys. 48, 711 (2000)]

1. **Er besteht aus einem skalierbaren System gut charakterisierter Qubits**

2. Alle Qubits können in einen wohldefinierten Anfangszustand gebracht werden

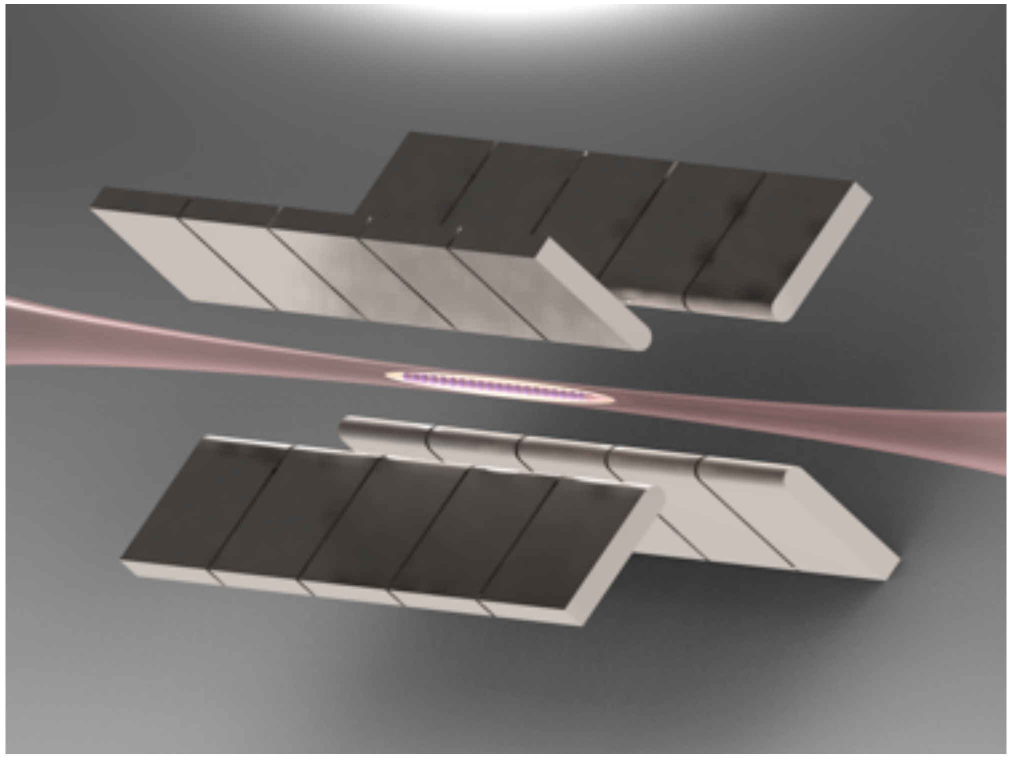
3. Ein universelles Set elementarer Quantengatter kann ausgeführt werden

4. Einzelne Qubits (zumindest eines) können ausgelesen (gemessen) werden

5. **Die relevante Dekohärenzzeit ist viel länger als die Zeit, die benötigt wird, ein elementares Quantengatter zu realisieren, sodass mit geeignetem fehlerkorrigiertem Code die Fehlerrate pro Gatter unter der Schwelle für fehlertolerantes Quantenrechnen liegt**

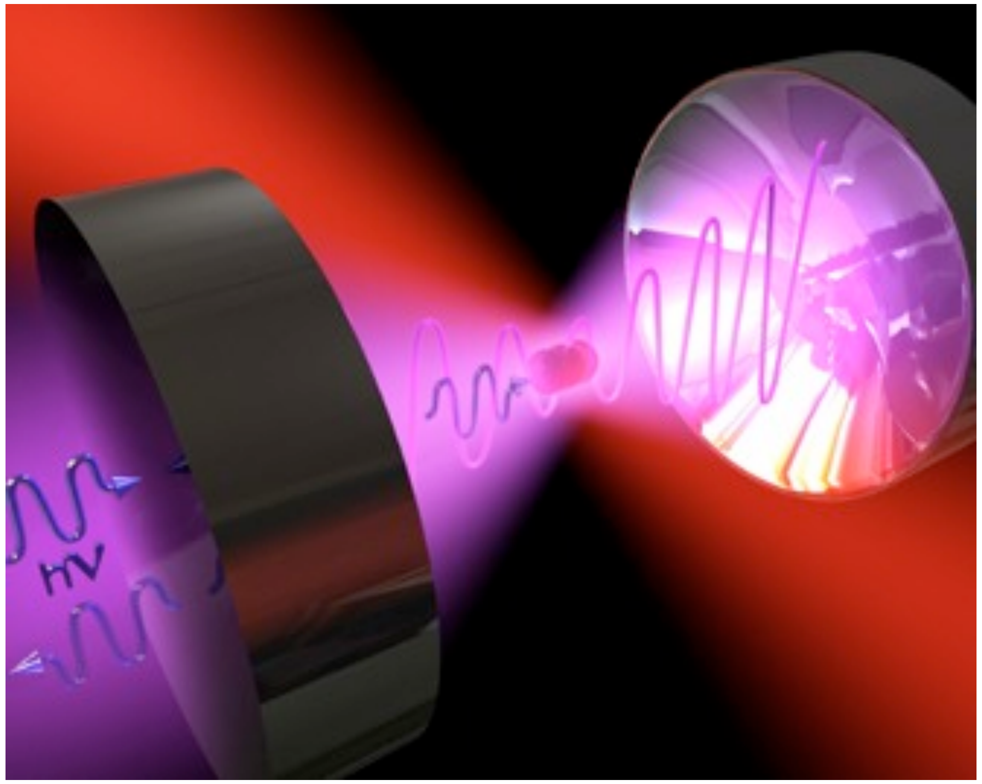
N.B.: Die Schwelle für fehlertolerantes Rechnen liegt je nach verwendetem Code und verwendeter Geometrie des Quantenregisters bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit $10^{-4} - 10^{-2}$ von pro Gatter.

IMPLEMENTIERUNGEN EINES QUANTENRECHNERS I



- Gefangene Ionen in einer Paul-Falle
  - Was sind die Qubits?
  - Wie werden einzelne Operationen und Quantengatter umgesetzt?
  - Messung des Zustandes (Auslesung)
  - Implementierung im Labor
  - Nachteile (Relaxation der Phononen, Präparation des Zustandes der Ionen, ...)

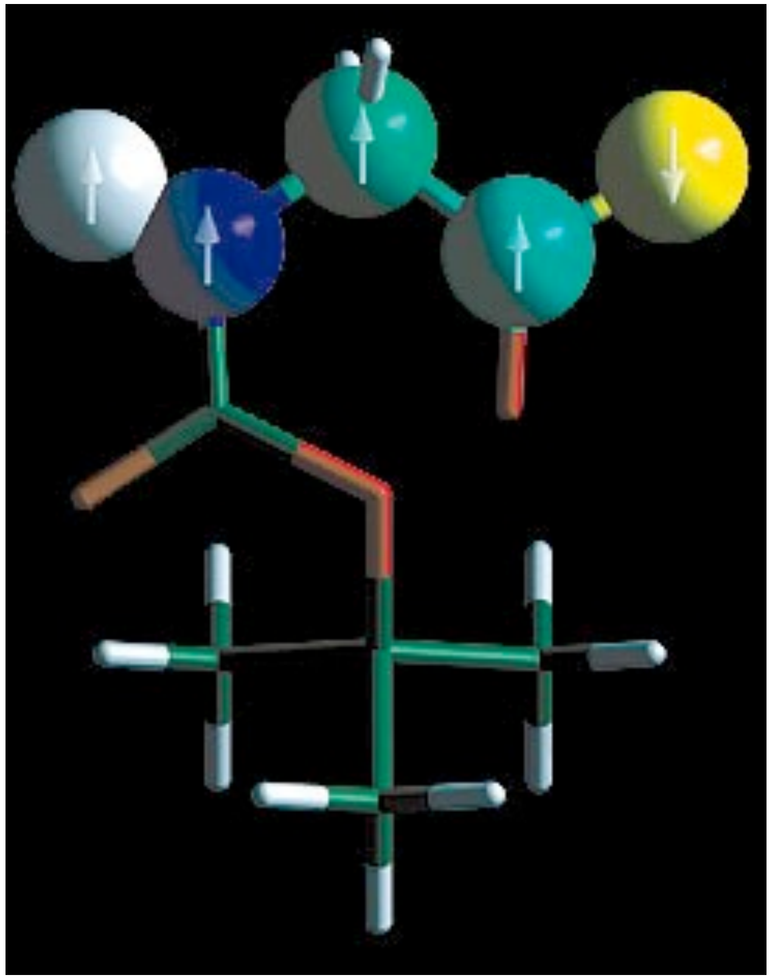
IMPLEMENTIERUNGEN EINES QUANTENRECHNERS II



- Optischer Resonator
  - Was sind die Qubits?
  - Wie werden einzelne Operationen und Quantengatter umgesetzt?
  - Messung des Zustandes (Auslesung)
  - Implementierung im Labor
  - Nachteile (Atom-Photon Kopplung, Photonverluste, ...)

IMPLEMENTIERUNGEN EINES QUANTENRECHNERS III

- Kernspinresonanz (Manipulation des Kernspins mit RF Wellen)
  - Was sind die Qubits?
  - Wie werden einzelne Operationen und Quantengatter umgesetzt?
  - Messung des Zustandes (Auslesung)
  - Implementierung im Labor
  - Nachteile (Skalierbarkeit, Präparation des Zustands, ...)



Weitere Informationen unter der Webseite: http://www.org.chemie.tu-muenchen.de/glaser/

SPEZIELLE THEMEN

Formulierung des Kontrollproblems

Formulierung des Kontrollproblems

Steuerungshamiltonoperator: $\hat{H}_c[\vec{u}(t)]$ → Steuerungsparameter

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_s + \hat{H}_c[\vec{u}(t)]$$

Hamiltonoperator des Systems

Formulierung des Kontrollproblems

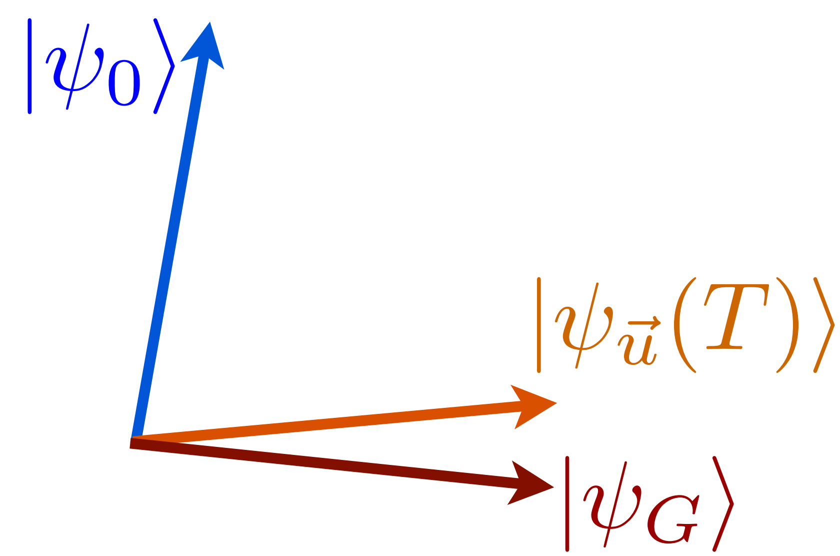
Steuerungshamiltonoperator: $\hat{H}_c[\vec{u}(t)]$ → Steuerungsparameter

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_s + \hat{H}_c[\vec{u}(t)]$$

↓ Hamiltonoperator des Systems

Ziel: Finde die optimale Zeitmodulation der Steurungsparameter, sodass

$$|\psi_0\rangle \longrightarrow |\psi_{\vec{u}}(T)\rangle$$



die Kostenfunktion $\mathsf{J} = \mathsf{J}[\vec{u}(T), |\psi_{\vec{u}}(T)\rangle]$ minimal ist.

KOSTENFUNKTION: BEISPIELE

- Präparation eines bestimmten Zustands: **Güte der Überlagerung**

$$\mathsf{J} = 1 - |\langle \psi_G | \psi_{\vec{u}}(T) \rangle|^2$$

- Präparation eines unbekannten Zustands eines Hamiltonoperators: **Finale Energie**

$$\mathsf{J} = E_f(T) = \langle \psi_{\vec{u}}(T) | \hat{H} | \psi_{\vec{u}}(T) \rangle$$

- Eine Eigenschaft einer Menge von Zuständen: **Maß der Verschränkung**

- Sichtbarkeit (z.B., Interferenzmuster eines Interferometers)

OPTIMALE KONTROLLE

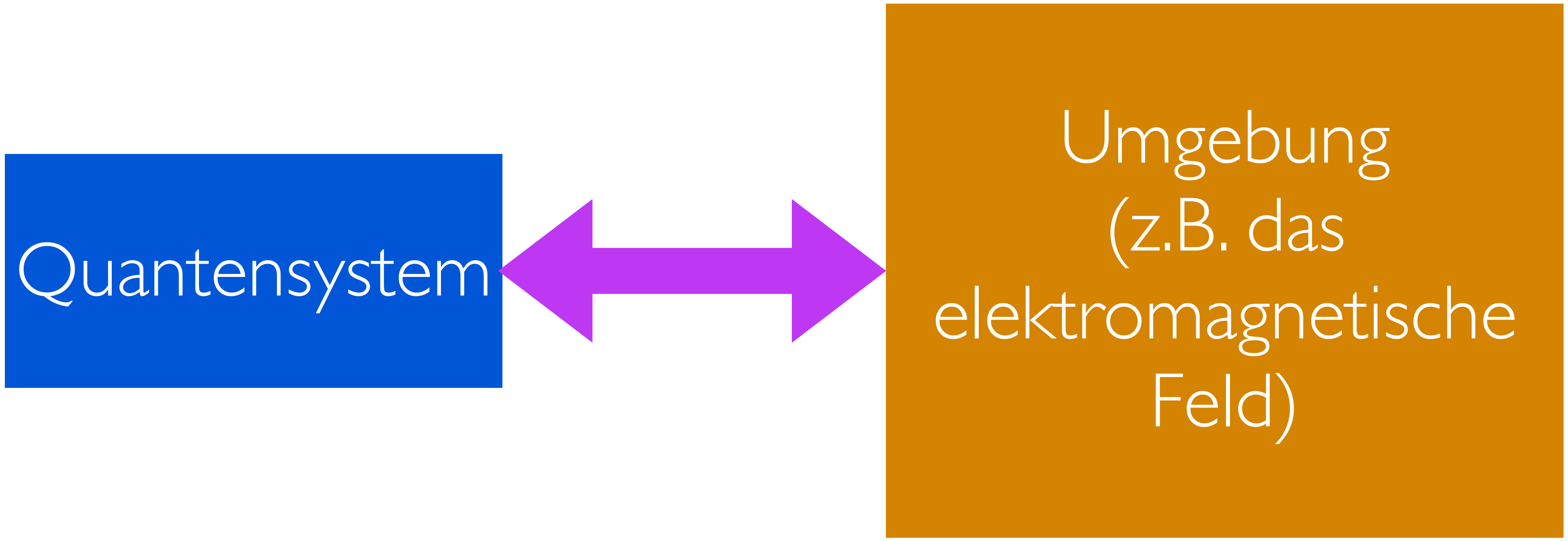
- Optimalitätsbedingungen
- Lagrange Formulierung: Vowärts- und Rückwärtspropagation
- Beispiele von lösbaren Kontrollproblemen
- Eine iterative Methode: Der Krotov-Algorithmus

OFFENE QUANTENSYSTEME

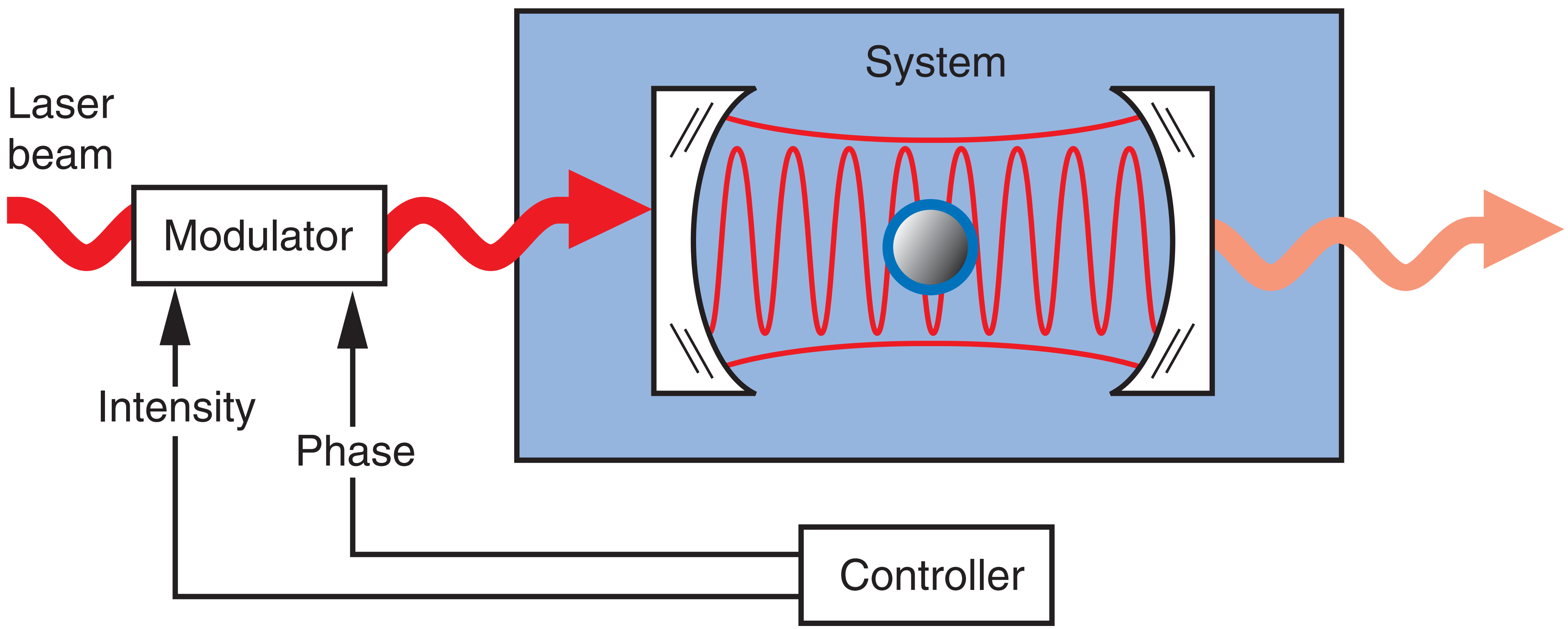
- Schrödingergleichung beschreibt nur die Dynamik **geschlossener** Quantensysteme $\Rightarrow$ Reiner Zustand vs. Dichteoperator

- Jedes Quantensystem ist im **Kontakt** mit der **Umgebung**

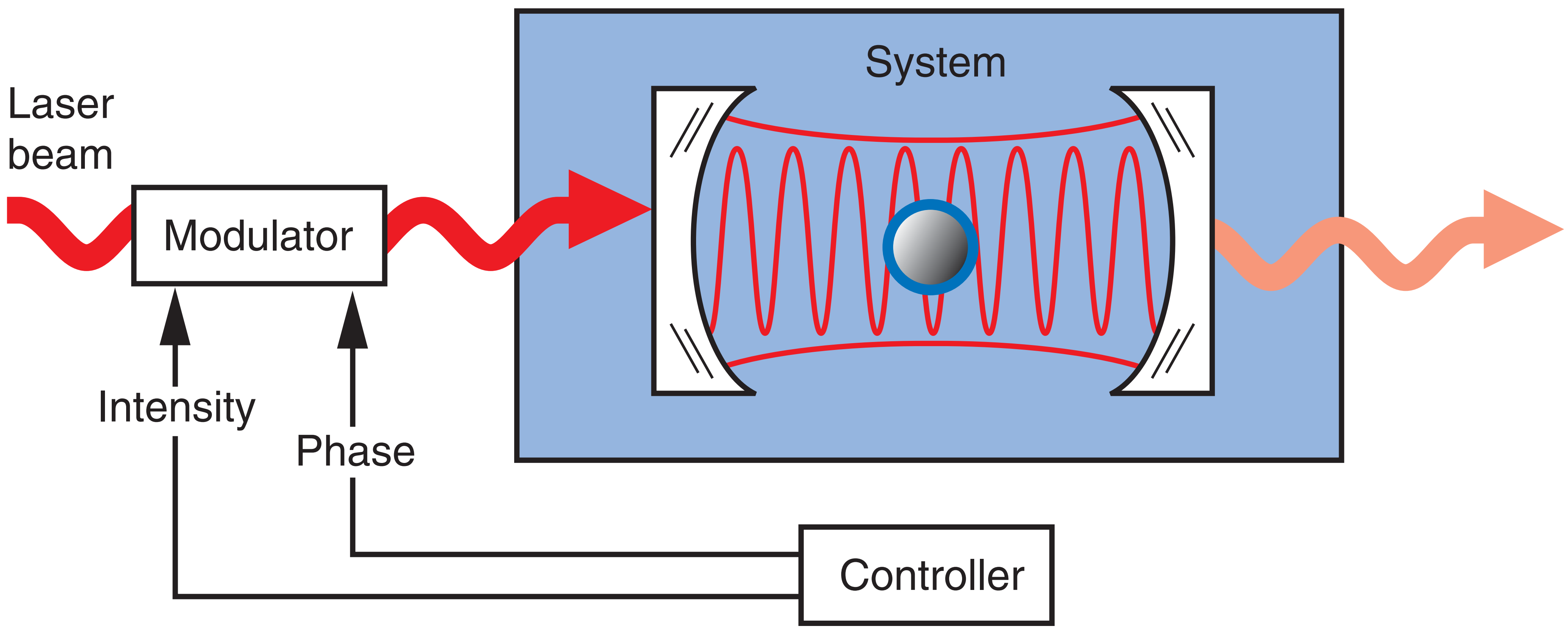
  $\Rightarrow$ Das System ist nicht isoliert!



BEISPIEL: ATOM IN EINEM RESONATOR

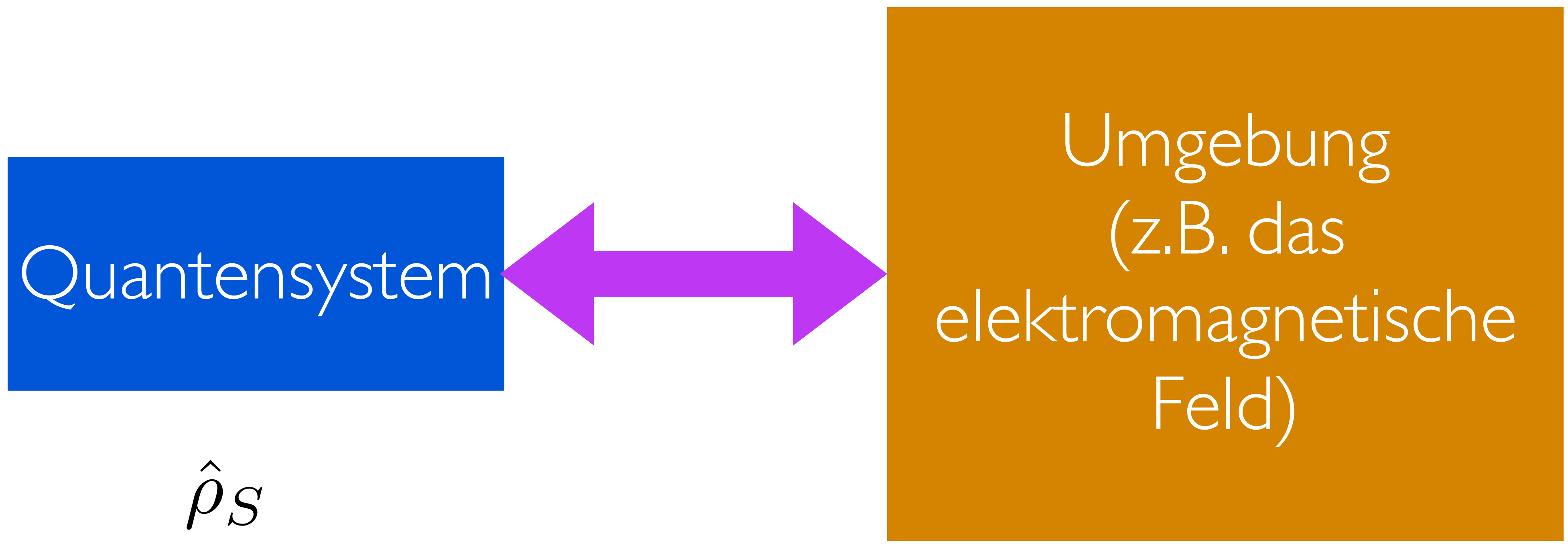


BEISPIEL: ATOM IN EINEM RESONATOR



- **Frage:** Wie können wir die Dynamik offener QS beschreiben?

OFFENE QUANTENSYSTEME



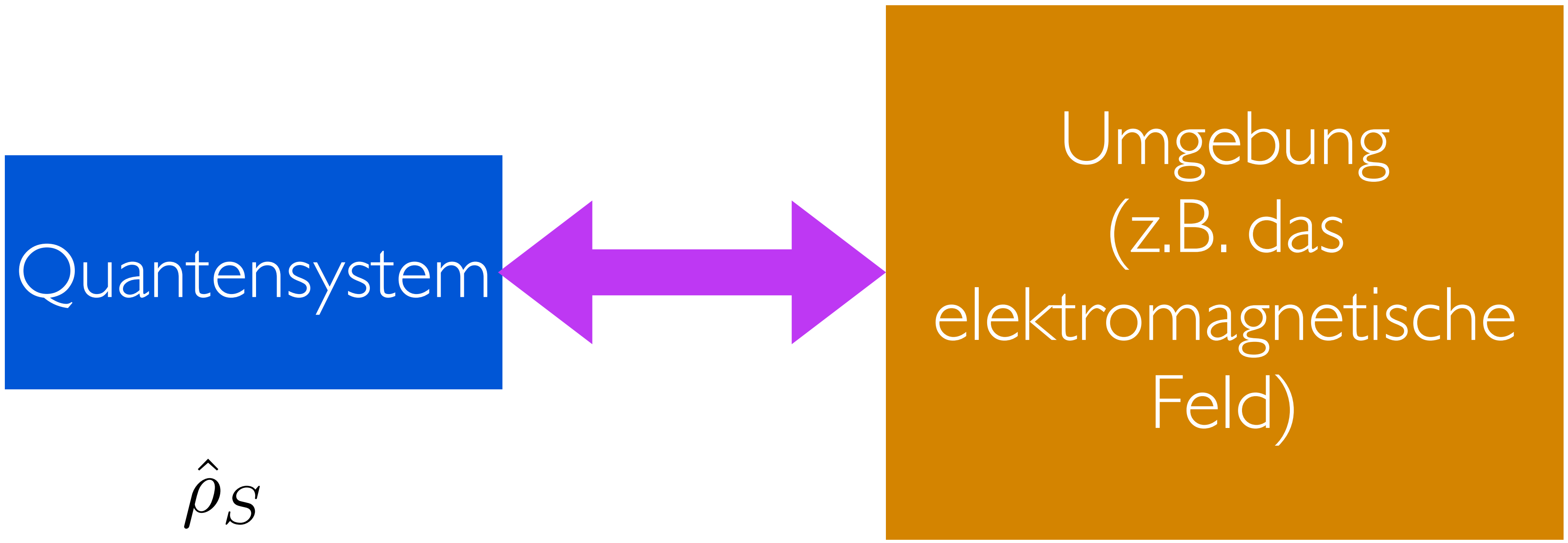
$\hat{\rho}_S$

$\hat{\rho}_U$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_U$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_S \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{H}_U + \hat{H}_{Ww}$$

OFFENE QUANTENSYSTEME



$\hat{\rho}_S$

$\hat{\rho}_U$

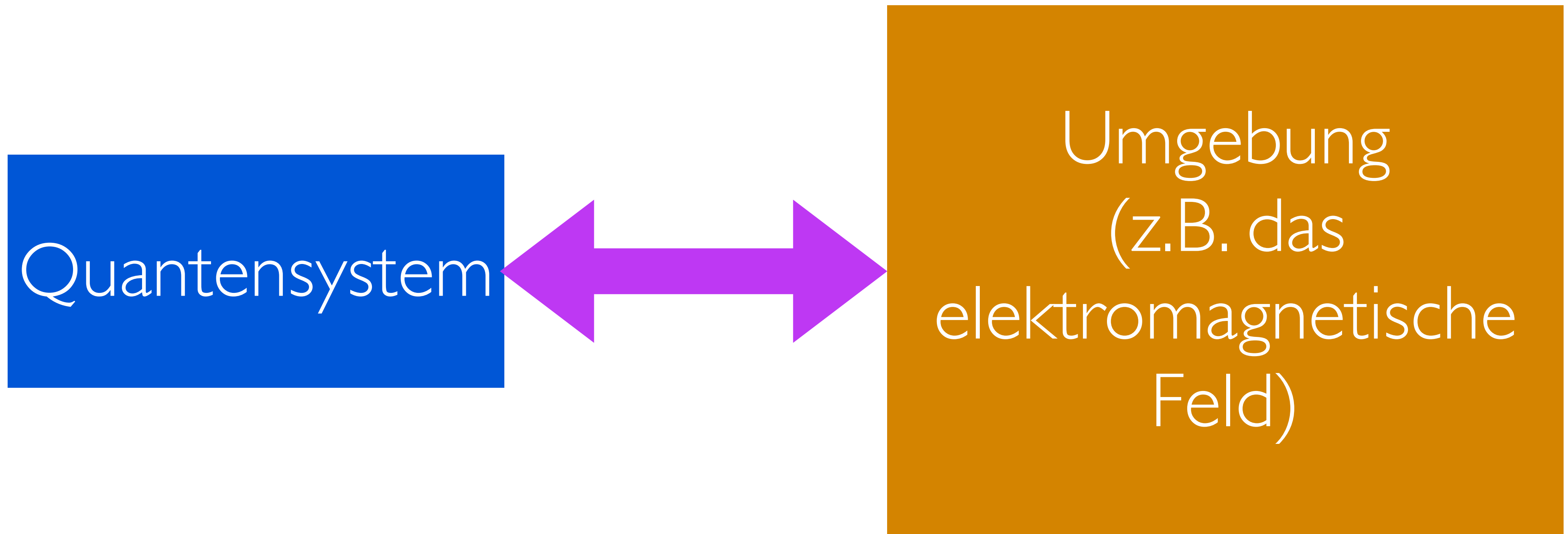
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_U$$

$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_U \longrightarrow$ Anfangsbedingung

$$\hat{\rho}_S(t) = \mathrm{Tr}_U\{\hat{\rho}(t)\} = \mathrm{Tr}_U\{\hat{U}(t)(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_U)\hat{U}^\dagger(t)\}$$

Zeitentwicklungsoperator (d.h., von Neumann-Gleichung)

OFFENE QUANTENSYSTEME



<u>Born-Markov-Nährung:</u>

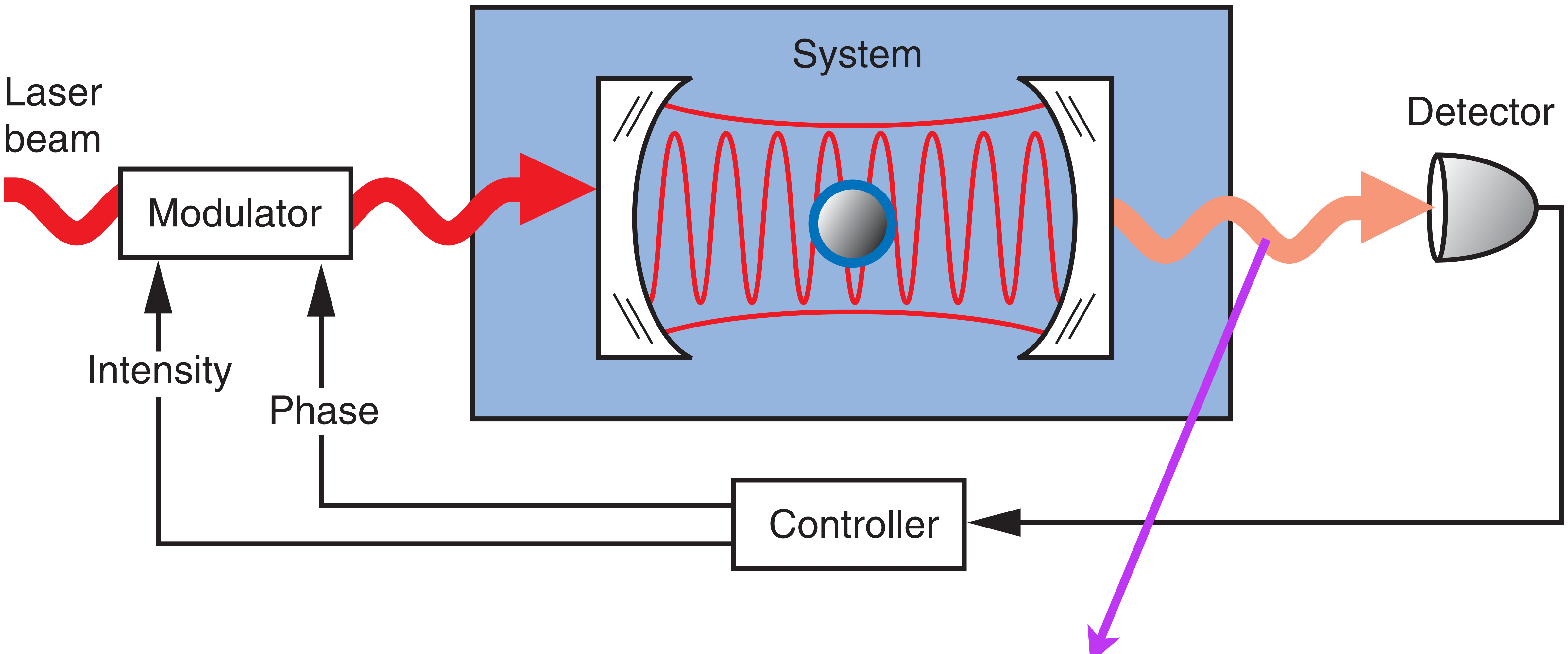
- **Schwache Kopplung** zwischen System und Umgebung
- **Gedächtnislose Umgebung:** d.h. Zustandsänderung zur Zeit t hängt nur vom Systemzustand zur Zeit t ab

(Physikalisch: Relaxationszeiten $\tau_U \ll \tau_S$)

$\Rightarrow$ Lindbland-Mastergleichung:

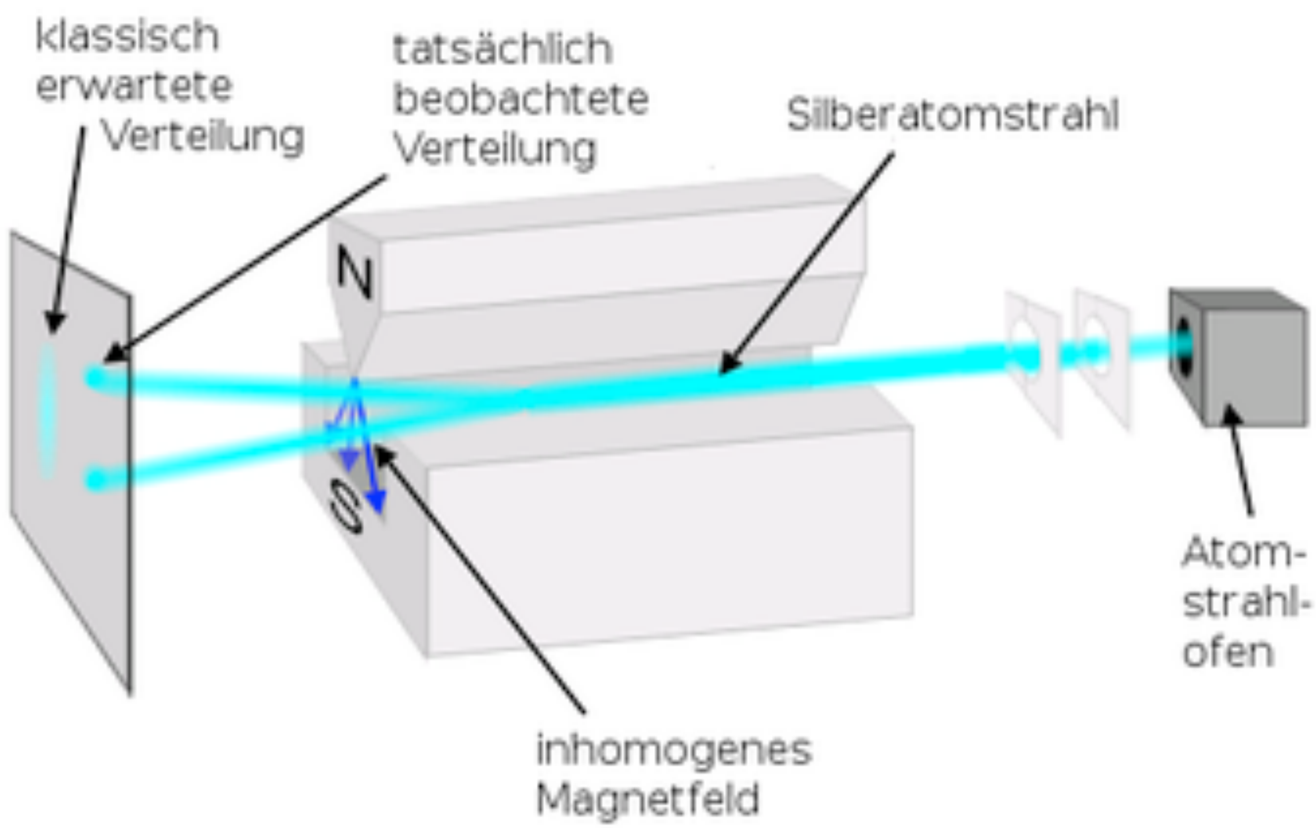
$$\partial_t \hat{\rho}_S(t) = i[\hat{\rho}_S(t), \hat{H}] + \frac{1}{2}\sum_k [\hat{O}_k \hat{\rho}_S(t), \hat{O}_k^\dagger] + [\hat{O}_k, \hat{\rho}_S(t)\hat{O}_k^\dagger]$$

OFFENE QUANTENSYSTEME UND QUANTENMESSUNG



Das äußere em Feld ist mit dem Atom verschränkt! Eine (schwache) Messung des Feldes induziert einen kleinen “Kollaps” der atomaren Wellefunktion. Das Resultat der Messung ist zufällig, sodass der Kollaps auch zufällig ist!

DAS STERN-GERLACH-EXPERIMENT

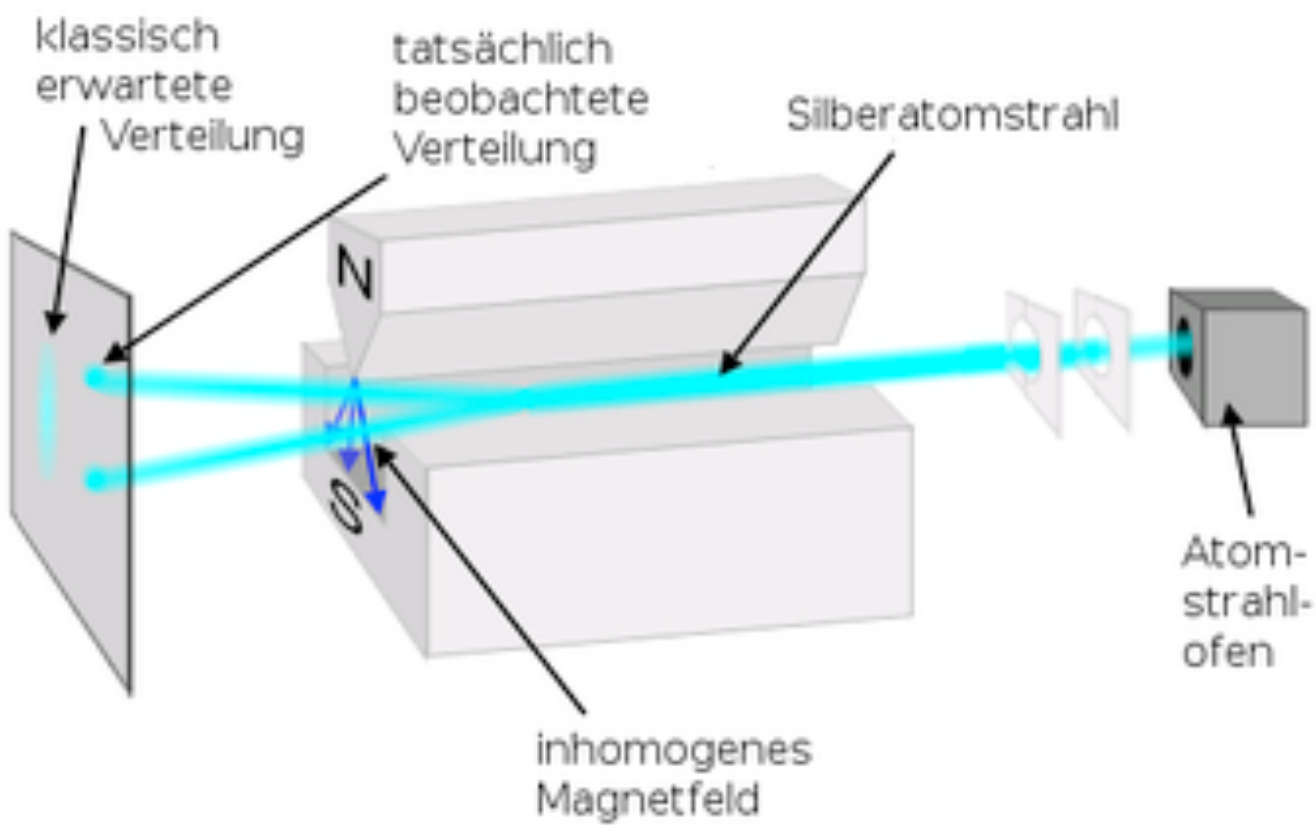


$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$\vec{\mu} \propto \vec{S}$$

Magnetisches Moment des Atoms

DAS STERN-GERLACH-EXPERIMENT



$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$\vec{\mu} \propto \vec{S}$$

Magnetisches Moment des Atoms

Frage: Was messen wir tatsächlich?

DAS STERN-GERLACH-EXPERIMENT

Anfangszustand: $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |\phi_0(z)\rangle$

Zustand des Atoms nach dem Durchlaufen durch den Magnet:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\phi_+(z)\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\phi_-(z)\rangle)$$

$$\langle z|\phi_\pm(z)\rangle = \Psi(z \pm d)$$

DAS STERN-GERLACH-EXPERIMENT

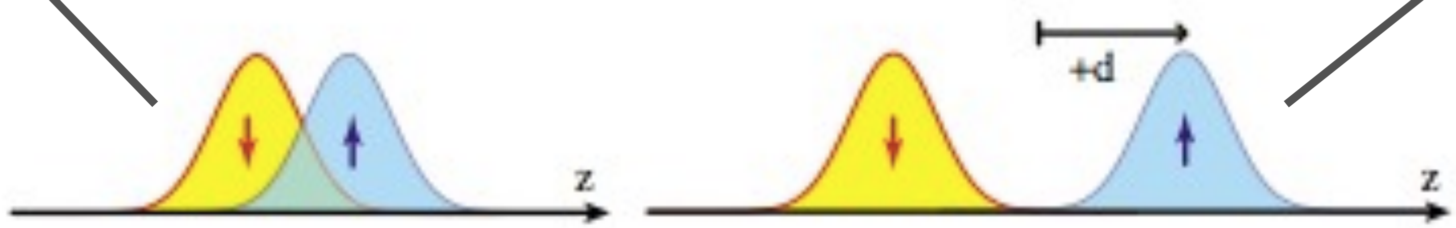
$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \otimes |\phi_0(z)\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\phi_+(z)\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\phi_-(z)\rangle\right)$$

Schwache Messung des Spins bzw. kleiner B-Feld-Gradient

$$\langle z|\phi_\pm(z)\rangle = \Psi(z \pm d)$$

Starke Messung des Spins bzw. großer B-Feld-Gradient



WAS SOLLTE VON OFFENEN QUANTENSYSTEMEN PRÄSENTIERT WERDEN?

- Herleitung der Markov'schen Mastergleichung in Lindbland-Form (notwendige Voraussetzungen, Vorgehen, Interpretation, Beispiel(e), ...)
- Herleitung der stochastichen Schrödingergleichung (notwendige Voraussetzungen, Vorgehen, Interpretation, Beispiel(e), Itô calculus, ...)