Übungen zur Einführung in die Quanteninformationsverarbeitung – Blatt 8
Sommersemester 2018 [1]
Abgabetermin Montag, 25. Juni 2018, vor Vorlesung

OPTIMALITÄT DES GROVER-ALGORITHMUS

Das Ziel dieses Blattes ist zu zeigen, dass ein besserer Algorithmus für die Suche eines Elements in einer Datenbank mit N Einträgen nicht erfunden werden kann, da der Grover-Algorithmus optimal ist. Daher werden Sie zeigen, dass das der Fall ist. Dies impliziert, dass es keinen Suchalgorithmus gibt, der weniger als $O(\sqrt{N})$ Iterationen benötigt.

Notation:

- Sei $g(n)$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Unter dem Symbol $O(g(n))$ versteht man folgendes:

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists\, c > 0 \,\&\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,, \text{sodass}\, \forall n > n_0\; f(n) \leq cg(n). \tag{1}$$

- Sei $g(n)$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Unter dem Symbol $\Omega(g(n))$ versteht man folgendes:

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists\, c > 0 \,\&\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,, \text{sodass}\, \forall n > n_0\; f(n) \geq cg(n). \tag{2}$$

Beweisstrategie: Wir nehmen an, dass der Algorithmus im Zustand $|\psi\rangle$ anfängt ($|\psi\rangle$ hat Norm 1) und dass es nur eine Lösung x fürs Suchproblem gibt. Um die Lösung zu bestimmen, wenden wir die Orakel-Funktion $\hat{O}_x = \mathbb{I} - 2|x\rangle\langle x|$ an. Der Algorithm wendet k-mal die Orakel-Funktion $\hat{O}_x$ zwischen den unitären Transformationen $\hat{U}_1, \ldots, \hat{U}_k$ an. Die Operatoren $\hat{U}_k$ stellen beliebige unitäre Transformationen (z. B. die Spiegelung im Grover-Algorithmus, aber nicht unbedingt diese) dar. Wir definieren die folgenden transformierten Zustände:

$$\begin{aligned} |\psi_k^x\rangle &:= \hat{U}_k \hat{O}_x \hat{U}_{k-1} \hat{O}_x \cdots \hat{U}_1 \hat{O}_x |\psi\rangle, \\ |\psi_k\rangle &:= \hat{U}_k \hat{U}_{k-1} \cdots \hat{U}_1 |\psi\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

Zudem definieren wir die Distanz $D_k := \sum_{x=1}^{N} ||\psi_k^x - \psi_k||^2$ (d.h. $||\phi||^2 := \langle\phi|\phi\rangle \equiv (|\phi\rangle, |\phi\rangle)\ \forall \phi$ – ab und zu ist die Notation $(\cdot,\cdot)$ fürs Skalarprodukt besser), wobei wir hier auf die Dirac Notation für die Zustände verzichten, damit die Notation nicht zu schwerfällig wird. Infolgedessen misst die Distanz D_k die Abweichung zwischen $|\psi_k^x\rangle$ und $|\psi_k\rangle$, die von der Orakel-Funktion verursacht wird.

Die Strategie des Beweises besteht aus zwei essentiellen Schritten:

1. Eine obere Grenze zu finden, sodass D_k nicht schneller als $O(k^2)$ skaliert;
2. Zeigen, dass $D_k \in \Omega(N)$ sein muss.

Aufgabe 1: **Physikalische Bedeutung der Distanz D_k**

Begründen Sie die Definition der Distanz D_k. Welche Bedeutung hat der Fall, für den $D_k \ll 1$ gilt? (1/2 Punkte).

Aufgabe 2: **Schritt 1. des Beweises**

Zeigen Sie per Induktion, dass $D_k \leq 4k^2$ gilt. Dies beweist, dass D_k nicht schneller als $O(k^2)$ skalieren kann. Hierzu gehen Sie wie folgt vor:

(a) Verifizieren Sie, dass die Ungleichung für $k = 0$ gilt (1/2 Punkte).

[1] bei Fragen: anegrett@physik.uni-hamburg.de

(b) Unter der Annahme, dass die Ungleichung für k gilt, verifizieren Sie, dass dies auch für $k+1$ der Fall ist (2 Punkte).

Hierzu könnten folgende Ungleichungen vom Nutz sein:

$$\| a+b \| \leq \| a \| + \| b \|;$$
$$\sum_x a_x b_x \leq \left(\sum_x a_x^2 \cdot \sum_x b_x^2 \right)^{1/2} \qquad \forall a_x, b_x \in \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Die letzte Ungleichung kann sofort beweisen werden, wenn man die Cauchy-Schwarz Ungleichung benutzt.

Aufgabe 3: **Schritt 2. des Beweises**

Nehmen Sie an, dass es $|\langle x|\psi_k^x\rangle|^2 \geq 1/2$ gilt.

(a) Begründen Sie physikalisch die obige genannte Annahme (1/2 Punkte);

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung

$$E_k := \sum_x \| \psi_k^x - x \|^2 \leq (2-\sqrt{2})N \tag{13}$$

gilt (1 Punkt).

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung

$$D_k \geq E_k + F_k - 2\sqrt{E_k F_k} \tag{15}$$

gilt, wobei $F_k := \sum_x \| \psi_k - x \|^2$ ist (2 Punkte).

(d) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung

$$F_k \geq 2N - 2\sqrt{N} \qquad \forall \psi_k \tag{17}$$

gilt (2 Punkte).

(e) Kombinieren Sie alle vorigen Resultaten, um zu zeigen, dass $D_k \geq cN$, und geben Sie den numerischen Wert von c an (1/2 Punkte).

Aufgabe 4: **Anzahl an Orakle-Aufrufen**

Anhand der vorigen Ungleichungen, die die Distanz erfüllt, zeigen Sie, dass $k \geq \sqrt{cN/4}$ ist (1/2 Punkte).

Aufgabe 5: **Fazit des Beweises**

Fassen Sie das Fazit dieses langen Beweises zusammen (1/2 Punkte).