Condensed-Matter Theory - Special Topics

Problem 4 — Functional derivatives
For a Green-function-like object $X_{\alpha\beta}(i\omega_n)$, we can define: $\mathsf{Tr}\,\boldsymbol{X} \equiv \sum_\alpha \sum_n e^{i\omega_n 0^+} X_{\alpha\alpha}(i\omega_n)$.

(a) Compute

$$\frac{\delta \mathsf{Tr}\boldsymbol{X}}{\delta X_{\alpha\beta}(i\omega_n)} \qquad !$$

(b) Compute

$$\frac{\delta \mathsf{Tr}\boldsymbol{X}^2}{\delta X_{\alpha\beta}(i\omega_n)} \qquad !$$

(c) F is a functional of $X_{\alpha\beta}(i\omega_n)$. Assume that $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\lambda)$ and compute

$$\frac{dF[\boldsymbol{X}]}{d\lambda} \qquad !$$

(d) Let $F[\boldsymbol{X}] = \mathsf{Tr}\,(1/(1-\boldsymbol{X}))$. What is

$$\frac{\delta F[\boldsymbol{X}]}{\delta X_{\alpha\beta}(i\omega_n)} \qquad ?$$

(e) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ are matrices. f is an analytical function, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Prove

$$\frac{\delta}{\delta A_{\alpha\beta}} \mathsf{Sp}\, f(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = [f'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})]_{\beta\alpha} \qquad !$$

(f) $\boldsymbol{A}$ is a matrix. Compute

$$\frac{\delta A^{-1}_{\alpha\beta}}{\delta A_{\gamma\delta}} \qquad !$$

Problem 5 — Potenzialstreuung und großkanonisches Potenzial
Gegeben sei der Hamiltonian

$$H = H_0 + V = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c^\dagger_\alpha c_\beta + \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} c^\dagger_\alpha c_\beta \,.$$

a) Entwickeln Sie die Zustandssumme, bzw. Z/Z_0, in Potenzen von $\boldsymbol{V}$ mittels diagrammatischer Störungstheorie, d.h. zeichnen sie sämtliche Diagramme (geschlossen, nicht notwendig zusammenhängend, Vertizes fest) bis zur Ordnung $k=3$!

b) Entwickeln Sie das großkanonische Potenzial, bzw. $-\beta(\Omega - \Omega_0)$ in Potenzen von $\boldsymbol{V}$ mittels diagrammatischer Störungstheorie, d.h. zeichnen sie sämtliche Diagramme (geschlossen, zusammenhängend, Vertizes fest) bis zur Ordnung $k=4$!

c) Welche Diagramme zu $-\beta(\Omega - \Omega_0)$ sind verschieden, haben aber den gleichen Wert? Fassen Sie diese Diagramme zusammen, und summieren Sie jetzt nur noch über topologisch verschiedene

Diagramme! Welcher Multiplizitätsfaktor muss für die einzelnen Diagramme berücksichtigt werden? Hebt sich dieser Faktor gegen den in den Diagrammregeln auftauchenden Faktor $1/(k!)$ heraus?

d) Summieren Sie jetzt sämtliche Diagramme unter Berücksichtigung der entsprechenden Faktoren auf! Zeigen Sie so, dass

$$\Omega = \Omega_0 + \mathsf{Sp}\, T \sum_\omega e^{i\omega 0^+} \left(\boldsymbol{G}_0 \boldsymbol{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{G}_0 \boldsymbol{V} \boldsymbol{G}_0 \boldsymbol{V} + \frac{1}{3} \cdots \right) !$$

e) Zeigen Sie so, dass

$$\Omega = \mathsf{Sp} \ln \boldsymbol{G} = \mathsf{Sp}\, T \sum_\omega e^{i\omega 0^+} \ln \frac{1}{i\omega + \mu - \boldsymbol{t} - \boldsymbol{V}} \; !$$