Theorie der Kondensierten Materie – Übungen

Problem 1 — Quantenstatistischer Erwartungswert
Es sei

$$H = H_0 + \lambda A$$

mit einem hermiteschen Operator A, der nicht notwendigerweise mit dem Hamilton-Operator kommutiert.

Zeigen Sie, dass

$$\langle A \rangle = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} k_B T \ln \mathsf{Sp}\, e^{-\beta(H-\mu N)} \quad !$$

Problem 2 — (Anti-)Symmetrisierungsoperator
Beweisen Sie die Eigenschaften

- $\mathcal{P} S_N^{(\epsilon)} = \epsilon^{\mathcal{P}} S_N^{(\epsilon)}$
- $(S_N^{(\epsilon)})^2 = S_N^{(\epsilon)}$ (Idempotenz)
- $(S_N^{(\epsilon)})^\dagger = S_N^{(\epsilon)}$ (Hermitizität)
- $S_N^{(+)} S_N^{(-)} = S_N^{(-)} S_N^{(+)} = 0$

des (Anti-)Symmetrisierungsoperators $S_N^{(\epsilon)} = \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}} \epsilon^{\mathcal{P}} \mathcal{P}$
($\epsilon = +1$ für Bosonen, $\epsilon = -1$ für Fermionen)!

Zeigen Sie, dass $S_N^{(0)} = \mathbf{1} - S_N^{(+)} - S_N^{(-)}$ ein zu $S_N^{(\epsilon)}$ orthogonaler Projektor ist!

Problem 3 — Darstellung von Basiszuständen
Zeigen Sie:

$$|n_1, n_2, \cdots, n_\alpha, \cdots\rangle^{(\varepsilon)} = \left(\frac{(c_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(c_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \cdots \frac{(c_\alpha^\dagger)^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} \cdots \right) |0\rangle \qquad !$$

Problem 4 — Fundamentale (Anti-)Vertauschungsrelationen
Beweisen Sie die folgenden Antikommutatorrelationen für ein System von identischen Fermionen ($[A, B]_+ = AB + BA$):

$$[c_\alpha, c_\beta]_+ = 0 \quad , \quad [c_\alpha^\dagger, c_\beta^\dagger]_+ = 0 \quad , \quad [c_\alpha, c_\beta^\dagger]_+ = \delta_{\alpha\beta} \qquad !$$

Problem 5 — Kommutatoren mit dem Besetzungszahloperator
Begründen Sie, dass die Kommutatorrelation

$$[c_\alpha, \widehat{n_\beta}]_- = \delta_{\alpha\beta} c_\alpha$$

sowohl für Bosonen als auch für Fermionen gilt!

Problem 6 — Darstellung von Observablen

Gehen Sie analog zu der in der Vorlesung vorgestellten Argumentation für den Ein-Teilchen-Anteil einer Observablen vor, und leiten Sie so die folgende allgemeine Darstellung für den Zwei-Teilchen-Anteil her:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1,\ldots,N}^{i \neq j} A_2^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | A_2 | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle \; c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \qquad !$$