Theorie der Kondensierten Materie – Übungen

Problem 7 — lokaler Spin
Für ein Gittermodell sei die Orthonormalbasis des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums durch $\{|i\sigma\rangle\}$ gegeben, wobei i die Plätze eines Gitters indiziert und $\sigma =\uparrow, \downarrow$.

a) Verifizieren Sie für die Observable "lokaler Spin" $S_{i\mu} = \dfrac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'} c_{i\sigma}^{\dagger}\sigma_{\sigma\sigma'}^{(\mu)}c_{i\sigma'}$ (mit $\mu = x, y, z$ und $\sigma^{(\mu)}$: Pauli-Matrizen) die Drehimpulsalgebra

$$[S_{ix}, S_{iy}]_{-} = iS_{iz} \qquad \text{(und zyklische Vertauschungen)} \quad !$$

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{S}_i^2$!

Problem 8 — Teilchenzahlerhaltung
Zeigen Sie, dass die (Gesamt-)Teilchenzahl für einen allgemeinen Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}^{\dagger} c_{\delta} c_{\gamma}$$

mit beliebigen Matrixelementen $t_{\alpha\beta}$ und $U_{\alpha\beta\delta\gamma}$ eine Erhaltungsgröße ist!

Problem 9 — Teilchen-Loch-Transformation
Für ein System von Fermionen ist folgender Operator gegeben:

$$U = \prod_{\alpha=1}^{d} \left(c_{\alpha} + c_{\alpha}^{\dagger}\right) \; .$$

Hier ist d die Dimension des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums.

a) Zeigen Sie, dass U unitär ist!

b) Wie transformiert sich c_{α} und wie transformiert sich $c_{\alpha}^{\dagger}$ unter der unitären Transformation?

c) Ist

$$H_0 = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}$$

invariant?

d) Wie transformiert sich das Vakuum unter U?