Theorie der Kondensierten Materie – Übungen

Problem 25 — Innere Energie
Zeigen Sie, dass die innere Energie $U = \langle H \rangle$ eines Systems von identischen Fermionen,

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \ ,$$

mithilfe der Ein-Teilchen-Spektraldichte $A_{\alpha\beta}(\omega) = (-1/\pi)\mathrm{Im}G_{\alpha\beta}(\omega + i0^+)$ durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\omega\, f(\omega)[(\omega + \mu)\delta_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}]A_{\beta\alpha}(\omega)$$

ausgedrückt werden kann! Nutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für $G_{\alpha\beta}(\omega)$, das Spektraltheorem und die Symmetrie $U_{\alpha\beta\gamma\delta} = U_{\beta\alpha\delta\gamma}$ aus! $f(\omega) = 1/(e^{\omega/T} + 1)$ ist die Fermi-Funktion. Was ändert sich im Falle von Bosonen?

Problem 26 — Retardierte Selbstenergie
Sei $\boldsymbol{A}$ eine komplexe Matrix. Definiere $\boldsymbol{A}_1 = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\dagger)/2$ und $\boldsymbol{A}_2 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\dagger)/2i$, dann ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + i\boldsymbol{A}_2$ mit $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ hermitesch. Sei $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}_1 + i\boldsymbol{B}_2$ mit $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ hermitesch. Zeigen Sie: Aus $\boldsymbol{A}_2$ negativ definit folgt $\boldsymbol{B}_2$ positiv definit!

Zeigen Sie damit, dass der Imaginärteil der retardierten Selbstenergie negativ definit ist!