Theorie der Kondensierten Materie – Übungen

Problem 27 — Spin-asymmetrische Teilchen-Loch-Transformation
Für das Hubbard-Modell auf einer eindimensionalen Kette von Plätzen $j = 1, ..., L$ mit geradem L sei der Operator

$$U = \prod_{j=1}^{L} \left(c_{j\uparrow} - (-1)^j c_{j\uparrow}^\dagger \right)$$

gegeben, wobei die Terme im Produkt nach aufsteigendem j angeordnet sind (der $j = L$-Term steht ganz rechts). U ist also eine kombinierte Teilchen-Loch- und Vorzeichen-Transformation, die nur für $\sigma =\uparrow$ wirkt.

a) Zeigen Sie, dass U unitär ist!

b) Zeigen Sie weiter, dass

$$U c_{j\uparrow} U^\dagger = (-1)^j c_{j\uparrow}^\dagger \ !$$

c) Betrachten Sie jetzt den lokalen Spin

$$\boldsymbol{S}_j = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} c_{j\sigma}^\dagger \sigma_{\sigma\sigma'} c_{j\sigma'}$$

und definieren Sie

$$\boldsymbol{T}_j = U \boldsymbol{S}_j U^\dagger \ .$$

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{T}_j$ einen Spin darstellt, d.h. begründen Sie, dass die entsprechenden Vertauschungsrelationen erfüllt sind! $\boldsymbol{T}_j$ ist ein "Isospin".

d) Berechnen Sie T_{jz}, T_{jx}, T_{jy}!

e) Begründen Sie, dass sämtliche Komponenten von Spin und Isospin kommutieren! $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{T}$ bilden die Generatoren der SU(2) × SU(2)-Symmetriegruppe.

f) Zeigen Sie, dass der Gesamt-Isospin $\boldsymbol{T} = \sum_j \boldsymbol{T}_j$ eine Erhaltungsgröße von $UHU^\dagger$ ist!

g) Berechnen Sie $UHU^\dagger$!

Problem 28 — Reduzierte Ein-Teilchen-Dichtematrix
Sei $\{|\alpha\rangle\}$ eine ONB des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums. Für ein System von Fermionen mit Hamiltonian H ist durch

$$\rho_{\alpha\beta} = \langle c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle$$

die reduzierte Ein-Teilchen-Dichtematrix ρ definiert.

a) Leiten Sie die allgemeine Bewegungsgleichung für ρ ab!

b) Wie vereinfacht sich die Bewegungsgleichung für ein nichtwechselwirkendes System, $H_0 = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta$?

c) Zeigen Sie, dass für ein nichtwechselwirkendes System im thermischen Gleichgewicht gilt:

$$\rho = \frac{1}{e^{\beta(\boldsymbol{T}-\mu\mathbf{1})} + \mathbf{1}} \;!$$

Erfüllt ρ die Bewegungsgleichung?

d) Das System mit Hamiltonian H_0 befinde sich zur Zeit $t < 0$ im Gleichgewicht. Zur Zeit $t = 0$ ändere sich der Hamiltonian abrupt auf $H_0' = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}' c_\alpha^\dagger c_\beta$. Zeigen Sie, dass für $t > 0$

$$\rho(t) = e^{-i\boldsymbol{T}'t} \frac{1}{e^{\beta(\boldsymbol{T}-\mu\mathbf{1})} + \mathbf{1}} e^{i\boldsymbol{T}'t} \;!$$

Diskutieren Sie den Fall $H_0' = H_0$!

e) Die natürlichen Orbitale sind als die Eigenvektoren von ρ definiert. Welche alternative Bedeutung haben diese für ein wechselwirkungsfreies System?

f) Geben Sie die Lösung für den allgemeinen Fall an, dass $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T}'(t)$ für $t > 0$ zeitabhängig ist!