Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

FAKULTÄT
FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

Mathematischer Vorkurs

Fachbereich Physik

Wintersemester 19/20

Prof. Dr. Michael Potthoff

Aufgabenheft

Inhaltsverzeichnis

Die mit ($\star$) gekennzeichneten Aufgaben sollten von allen Teilnehmern gelöst werden.

Grundlagen – Zum Aufwärmen

Aufgabe 1: Binomische Formeln und Polynom-Faktorisierung ($\star$)

Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke vollständig:

a) $x^2 + 6xy + 9y^2$

b) $3x^2 + 3xy - 18y^2$

c) $(2x + y)(a + b) + (y - 2x)(-a - b)$

d) $169x^2 - 144y^2$

e) $81c^{12} - d^{20}$

f) $x^4 - 26x^2 + 25$

g) $18x^2y^4 - 48x^3y^3 + 32x^4y^2$

Zum Knobeln:

h) Wie muss der Faktor c gewählt werden, damit das Polynom $cx^3 - 4x^2 + 2x + 3$ den Faktor $(x - 4)$ enthält?

i) Welcher Rest entsteht bei der Polynomdivision von $3x^3 - 2x^2 + 6x - 2$ durch $(x - 1)$?

(Hinweis: Nullstellen sind enorm hilfreich!)

Aufgabe 2: Brüche ($\star$)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\dfrac{ax^4 + ax^2}{ax^3 - ax}$

b) $\dfrac{x+3}{x-3} \div \left(x^2 + 6x + 9\right)$

c) $\dfrac{a}{5+x} - \dfrac{5+x}{a}$

d) $\dfrac{x - \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x^3}}$

e) $\dfrac{a+x}{x+b} + \dfrac{c-x}{d-x}$

f) $\dfrac{x-3}{x^2+3x+2} + \dfrac{x-2}{x^2-4}$

g) $\dfrac{x+1}{2x+y} \cdot \dfrac{4x^2 - y^2}{3x^2 + 2x - 1}$

h) $3 + \dfrac{f}{3 + \frac{3}{3+f}}$

Aufgabe 3: Potenzgesetze ($\star$)

Vervollständigen Sie die Potenzgesetze in der interaktiven Formelsammlung am Ende des Übungsheftes.

Aufgabe 4: Potenzen ($\star$)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) 117^0

b) 27^1

c) 10^6

d) $5^6 \cdot 5^{-4} \cdot 5^2$

e) $x^2yz^4 \cdot xy^2z^{-1}$

f) $(2^{-3} \cdot 3^2 \cdot 5^{-2})^{-3}$

g) $\dfrac{(a+2)^{n+1}}{(a+2)^n}$

h) $m^n(m+1)^{n+1} + (m+1)^n m^{n+1}$

Aufgabe 5: Wurzelausdrücke ($\star$)

a) Berechnen Sie:

(i) $64^{\frac{5}{6}}$ (ii) $(-125)^{\frac{2}{3}}$ (iii) $\frac{\sqrt[5]{16^6} \cdot \sqrt[5]{4^6}}{2^{\frac{6}{5}}}$

b) Schreiben Sie als Wurzelausdrücke:

(i) $5^{-\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{4}}$ (iii) $7^{3.1}$

c) Welche der folgenden Ausdrücke sind äquivalent zu $k^{-\frac{1}{6}}$? (Mehrere Antworten sind möglich)

(i) $\sqrt[6]{k^{-1}}$ (ii) $\frac{1}{k^6}$ (iii) $(k^{-1})^{\frac{1}{6}}$

d) Vereinfachen Sie:

(i) $\frac{\left(60d^5\right)^{\frac{7}{9}}}{(15d)^{\frac{2}{9}} \cdot \sqrt[9]{(15d)^5}}$ (ii) $\sqrt{3\sqrt{2a} - 2\sqrt{3b}} \cdot \sqrt{3\sqrt{2a} + 2\sqrt{3b}}$

Aufgabe 6: Quadratische Gleichungen und solche höherer Ordnung ($\star$)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse!

a) $3x^2 - 20 = x$

b) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

c) $(x + a + b)(x - a + b)$
$+ (x + a - b)(x - a - b) = 0$

d) $(a-x)^2 - (a-x)(x-b) + (x-b)^2 = (a-b)^2$

e) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$

f) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = 2$

g) $\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 1$

h) $\sqrt{x + 1 - \sqrt{2x+3}} = 1$

i) $\sqrt{x} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

j) $24 - 7\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}} = 3$

Zum Knobeln:

k) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

l) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$

Aufgabe 7: Mengen und Intervalle

Stellen Sie die folgenden Zahlenmengen graphisch dar:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| < 10\right\}$ $(\star)$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| \geq 1\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| a \leq x < 10\right\}$

d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \leq y\right\}$ $(\star)$

e) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -\sqrt{x} \leq y < 0\right\}$

f) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$ $(\star)$

g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \geq 1\right\}$

h) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + 4y^2 = 4\right\}$ $(\star)$

Aufgabe 8: Ungleichungen $(\star)$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

(i) $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{8} - 6\right) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$

(ii) $\frac{9-3x}{x-3} > -3$

(iii) $\frac{2-5x}{3-x} - \frac{2-6x}{1-3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$

(iv) $|x^2 + 4x| < 4$

(v) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

(vi) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

b) Stellen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen graphisch dar:

(i) $x + y < |3x + 2|$

(ii) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$

Funktionen

Aufgabe 9: Stufenfunktion

Skizzieren Sie ($a > 0$):

a) $f(x) = \theta(-x-a)$ ($\star$)

b) $f(x) = \theta(x)\theta(x-a)$ ($\star$)

c) $f(x) = \theta(-x)\theta(-x-a)$

d) $f(x) = \theta(x+a)\theta(-x+a)$ und
$g(x) = \theta(x+a) - \theta(x-a)$

e) $f(x) = \theta(x)\, e^{-x}$ ($\star$)

f) $f(x) = \left(1 - \left|\frac{x}{a}\right|\right) \theta(x+a)\theta(a-x)$

Aufgabe 10: Polynome ($\star$)

Skizzieren Sie die folgenden Polynome anhand ihrer generellen Form (Gerade, Parabel, Hyperbel, Parabel höherer Ordnung) und mit Hilfe ausgezeichneter Punkte (Nullstellen, Scheitelpunkte, Symmetriepunkte....):

a) $f(x) = -2x - 2$

b) $f(x) = 2 - 2x^2$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3$

e) $f(x) = x^4 - 4$

Aufgabe 11: Rationale Funktionen und Betragsfunktion

Skizzieren Sie den Graphen und geben Sie den maximalen Definitionsbereich sowie den Wertebereich der folgenen Funktionen an. Beachten Sie: Hier ist keine ausführliche Kurvendiskussion nötig. Bestimmen Sie die Graphen anhand ihrer Nullstellen, der Unendlichkeitsstellen und des Verhaltens für große Werte des Arguments. Sie dürfen hierzu auch einen Computer benutzen.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ($\star$)

b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ($\star$)

d) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

e) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ ($\star$)

f) $f(x) = 1 - \left|\frac{x}{a}\right|$ ($\star$)

g) $f(x) = x + |x|$

h) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ ($\star$)

Aufgabe 12: Exponentialfunktionen mit Bedeutung

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen für $x \geq 0$. Nehmen Sie gern einen Computer zur Hilfe.

a) $f(x) = 1 - e^{-x}$ (Ladekurve des Kondensators) ($\star$)

b) $f(x) = x\, e^{-x}$ (einfache Poisson-Verteilung) ($\star$)

c) $f(x) = e^{-x}\sin(x)$ (gedämpfte Schwingung) ($\star$)

d) $f(x) = \exp\left(-\alpha x^2\right)$ $\left(\text{Gauß'sche Glockenkurve mit } \alpha = \frac{1}{2}\right)$
Wie ändert sich der Graph für $\alpha = 1,\ 10,\ 0.1$? ($\star$)

e) $f(x) = \frac{1}{\exp(x)-1}$ (Bose-Einstein-Verteilungsfunktion)

f) $f(x) = \frac{1}{\exp(x)+1}$ (Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion)

g) $f(x) = \frac{x^3}{\exp(x)-1}$ (Planck'sche Strahlungsformel - Frequenzverteilung)

h) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right)$ (Cosinus hyperbolicus (cosh)) ($\star$)

i) $f(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right)$ (Sinus hyperbolicus (sinh)) ($\star$)

Aufgabe 13: Logarithmengesetze ($\star$)

Vervollständigen Sie die Logarithmengesetze in der interaktiven Formelsammlung am Ende des Übungsheftes.

Aufgabe 14: Exponentialfunktionen und Logarithmen ($\star$)

a) Vereinfachen Sie:

(i) $\exp(0)$

(ii) $\ln(e)$

(iii) $\ln(1)$

(iv) $4^{\log_2(3)}$

(v) $\exp(2+7x)$

(vi) $\left(\exp(x^2)\right)^6$

(vii) $e^{\sin^2(x)} \cdot e^{\cos^2(x)}$

(viii) $\ln(a \cdot b)$

(ix) $\log\left(\frac{x}{y}\right)$

(x) $\log\left(1 + \frac{27}{x^3}\right)$

(xi) $\log_5\left(\sqrt[6]{25}\right)$

(xii) $\ln\left(\frac{\sqrt{a}\cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c}\cdot d^{-3}}\right)$

(xiii) $\ln\left(\sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}\right)$

(xiv) $\frac{1}{3}\log(a^2-b^2) - \frac{1}{2}\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a+b)$

b) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(i) $\ln\left((x-1)^2\right) = 2$

(ii) $\ln(x) - \ln(4) = \ln(35) - \ln(x+4)$

(iii) $\sqrt{\log(1-x)} + 5\log(1-x) = 6$

(iv) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

(v) $x^x = x$

(vi) $12\ \sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

Aufgabe 15: Umkehrfunktionen ($\star$)

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen folgender Funktionen:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = -2x - 2$

c) $f(x) = x^n$

d) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

e) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3$

f) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

h) $f(x) = 2^x$

i) $f(x) = \exp(-x^2)$

j) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

k) $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Aufgabe 16: Trigonometrische Funktionen

Skizzieren Sie den Graphen und geben Sie den maximalen Definitionsbereich sowie den Wertebereich der folgenden Funktionen an. Beachten Sie: Hier ist keine ausführliche Kurvendiskussion nötig. Bestimmen Sie die Graphen anhand ihrer Asymptotik, Nullstellen und Unendlichkeitsstellen. Sie dürfen hierzu auch einen Computer benutzen.

a) $f(x) = 1 + \sin(x)$ ($\star$)

b) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ ($\star$)
Welche einfache Sinus-Funktion hat denselben Graphen?

c) $f(x) = \cos^2(x)$ ($\star$)
Welche Peridode hat diese Funktion?
Welche einfachere Funktion hat denselben Graphen?

d) $f(x) = x + \sin(x)$ ($\star$)

e) $f(x) = x\ \sin(x)$ ($\star$)

f) $f(x) = |x|\cos(x)$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$
Welche Funktion hat denselben Graphen?

i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ ($\star$)

Aufgabe 17: Trigonometrische Formeln ($\star$)

Vervollständigen Sie die Trigonometrischen Formeln in der interaktiven Formelsammlung am Ende des Übungsheftes.

Aufgabe 18: Spezielle Funktionswerte, trigonometrische Umformungen und trigonometrische Gleichungen

a) Von ° nach Bogenmaß und zurück – formen Sie in die jeweils andere Einheit um:

(i) $15°$ (iii) $180°$ (v) $45°$ (vii) $\frac{\pi}{2}$ (ix) $\frac{\pi}{10}$

(ii) $90°$ (iv) $60°$ (vi) 2π (viii) $\frac{2\pi}{3}$ (x) $-\frac{\pi}{4}$

b) Berechnen Sie die folgenden Funktionswerte – möglichst ohne Zuhilfenahme des Rechners:

(i) $\sin(30°)$
(ii) $\arctan(1)$
(iii) $\cos(0)$
(iv) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
(v) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
(vi) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(i) $\cos^2(x) + 2\cos(x) - \sin^2(x) + 1 = 0$
(ii) $1 - \cos(x) = \sin(x)$
(iii) $\cos(2x) = \cos(x)$
(iv) $\cos(x) + \cos(2x) = \sin(x) - \sin(2x)$
(v) $\cos(x)^{\sin(x)} = 1$

Zum Knobeln:
(vi) $\cos(x) + \cos(2x) = \sin(x) + \sin(2x)$
(vii) $\tan(x) + \tan(2x) - \tan(3x) = 0$

Aufgabe 19: Stetigkeit und Monotonie

Für welche Werte von x haben die folgenden Funktionen Unstetigkeitsstellen, von welcher Art sind diese, und wie lassen sie sich, falls möglich, beheben? Was können Sie über das Monotonie-Verhalten der Funktionen aussagen?

a) $f(x) = x$ $(\star)$
b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $(\star)$
d) $f(x) = x + e^{-x}$
e) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ $(\star)$
f) $f(x) = |x|$ $(\star)$
g) $f(x) = \theta(x+a)\theta(a-x)$ $(\star)$
h) $f(x) = \theta(x)\theta(-x-a)$
i) $f(x) = \theta(x)e^{-x}$ $(\star)$
j) $f(x) = \theta(x)xe^{-x}$
k) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ $(\star)$
l) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ $(\star)$
m) $f(x) = \dfrac{1-x}{1-|x|}$
n) $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$ $(\star)$
o) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $(\star)$
p) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Zum Knobeln: Beweisen Sie das Monotonie-Verhalten für die Funktionen g) - k)

q) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{für } x > 2 \\ 3 & \text{für } x = 2 \\ b - ax^2 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Konstanten a und b so, dass $f(x)$ eine stetige Funktion wird. Skizzieren Sie die Funktion für diese Werte von a und b sowie für die Parameter $a = 0$, $b = 1$. $(\star)$

Aufgabe 20: Grenzwerte und asymptotisches Verhalten

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte. Wenn der Grenzwert nicht existiert, geben Sie an, welches asymptotische Verhalten die Singularität bestimmt.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{15x^2-8x-13}{x^2-5}$ $(\star)$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}$ $(\star)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{5x}$ $(\star)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{\cos(x)-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+5x-3}{2-\sqrt{x^2+4}}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(2x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{100}{x^2+5}$ $(\star)$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} 3x^3-1000x^2$ $(\star)$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+7}{3x+5}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-3x+7}{x^3+10x-4}$ $(\star)$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{7x^2-x+11}{4-x}$ $(\star)$

l) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{\dfrac{x^3+7x}{4x^3+5}}$

m) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x-\sqrt{x^2+7}$

n) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt{9x^2-5x}}$

o) $\lim\limits_{x\to \infty} \log\left(\dfrac{x^6-500}{x^6+500}\right)$

p) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5^x}{3^x+2^x}$

Aufgabe 21: Modellieren mit Funktionen

a) Ab dem Jahr 2000 wurden die Zweige eines Baumes gezählt, mit folgenden Ergebnissen:

Zeit (in Jahren)	0	2	4	6	8	10
Zahl der Zweige	16	23	33	48	69	99

Welche Funktion $B(t)$, die die Anzahl der Zweige t Jahre nach dem Jahr 2000 angibt, passt am besten zu den Daten?

(i) $B(t) = 16 \cdot (1.44)^t$

(ii) $B(t) = 16 + 7t$

(iii) $B(t) = 16 + 30t$

(iv) $B(t) = 16 \cdot (1.2)^t$

b) In Johannesburg beträgt die niedrigste Tagestemperatur regelmäßig 3 °C und die höchste Tagestemperatur 18 °C. Die mittlere Tagestemperatur wird regelmäßig sowohl um 10 Uhr am Morgen als auch um 10 Uhr abends erreicht.
Welche trigonometrische Funktion $T(t)$ beschreibt die Temperatur T in Johannesburg t Stunden nach Mitternacht?

c) Ein Bild der Größe $40\,\text{cm} \times 60\,\text{cm}$ wird in einem Bilderrahmen montiert, dessen Fläche $0.5525\,\text{m}^2$ beträgt. An allen vier Seiten hat das Bild einen gleich großen Abstand x zum Rand des Rahmens. Geben Sie eine Gleichung als Funktion von x an, welche die Situation beschreibt, und bestimmen Sie x.

DIFFERENZIEREN

Aufgabe 22: Ableitungen – zum Warmwerden... ($\star$)

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^4$

c) $f(x) = 2x^3$

d) $f(x) = -3x^{-2}$

e) $f(x) = x^3 + 5$

f) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

g) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$

h) $f(x) = x^3 \sin(x)$

i) $f(x) = 5\sin x + 3\cos x$

j) $f(x) = (x^3 + 3x^2)(x^2 + 1)$

k) $f(x) = 3\sqrt{x}$

l) $f(x) = (x-1)e^x$

m) $f(x) = e^x \arcsin(x)$

n) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

o) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln(2)$

Aufgabe 23: Differentiationstabelle ($\star$)

Vervollständigen Sie die Differentiationstabelle, die die Ableitungen der in der Vorlesung vorgestellten Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen enthält, in der interaktiven Formelsammlung am Ende des Übungsheftes.

Aufgabe 24: Ableitungen für Fortgeschrittene

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$,
wobei a, b, c Parameter sind ($\star$)

b) $f(x) = \dfrac{a + bx}{c + dx}$ ($\star$)

c) $f(x) = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

d) $f(x) = x^2 \left(\sqrt{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$ ($\star$)

f) $f(x) = x\cot(x)$ ($\star$)

g) $f(x) = x\arcsin(x)$ ($\star$)

h) $f(x) = \dfrac{(1 + x^2)\arctan(x) - x}{2}$ ($\star$)

i) $f(x) = x^7 e^x$ ($\star$)

j) $f(x) = \frac{x^5}{e^x}$ ($\star$)

k) $f(x) = e^x \cos(x)$ ($\star$)

l) $f(x) = (x^2 - 2x + 2)\, e^x$ ($\star$)

m) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$

n) $f(x) = x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3}$ ($\star$)

o) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\ln(x) - \dfrac{\ln(x)}{x}$

p) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

q) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{x}\right)$ ($\star$)

r) $f(x) = \ln(x)\log(x) - \ln(a)\log_a(x)$

s) $f(x) = x\sinh(x)$ ($\star$)

t) $f(x) = \dfrac{x^2}{\cosh(x)}$

Aufgabe 25: Ableitungen – Kettenregel

a) $f(x) = \ln(2x+7)$ $(\star)$

b) $f(x) = \cos\left(x^4\right)$ $(\star)$

c) $f(t) = \sin(\omega t)$ $(\star)$

d) $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$

e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arcosh}(x)}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$

g) $f(x) = \sqrt{\ln(x)+1} + \ln\left(\sqrt{x}+1\right)$

h) $f(x) = \left(\dfrac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$

i) $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$

j) $f(x) = \sqrt{\arctan(x)} - (\arcsin(x))^3$

k) $f(x) = \ln(\sin(x))$ $(\star)$

l) $f(x) = \ln^2(x) - \ln(\ln(x))$ $(\star)$

m) $f(x) = \ln\left(e^x + 5\sin(x) - 4\arcsin(x)\right)$

n) $f(x) = \arctan(\ln(x)) + \ln(\arctan(x))$

o) $f(x) = \sqrt{\cos(x)}a^{\sqrt{\cos(x)}}$

p) $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

q) $f(x) = \ln(\ln(3-2x^3))$

r) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$

s) $f(x) = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right)$

t) $f(x) = 2^{\arcsin(3x)} + (1-\arccos(3x))^2$

u) $f(x) = 3^{\frac{\sin(ax)}{\cos(bx)}} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^3(ax)}{3\cos^3(bx)}$

Aufgabe 26: Taylorentwicklung

Finden Sie die Taylorentwicklung folgender Funktionen um den Punkt $x=0$. Berechnen Sie dazu die Entwicklungskoeffizienten bis zur Ordnung $N=4$.
Zum Knobeln: Analysieren Sie Ableitungen der Funktionen und finden Sie die allgemeine Form von $f^{(n)}(0)$.
Betrachten Sie die Reihenentwicklung der Funktionen bis zum Grad $N=2$ und $N=4$. Vergleichen Sie die Funktionswerte der jeweiligen Reihenentwicklung mit denen der ursprünglichen Funktion für die Werte $x=0$, 0.1, 0.2 und 1.

a) $y = e^x$ $(\star)$

b) $y = \sin(x)$

c) $y = \cos(x)$ $(\star)$

d) $y = \frac{1}{1-x}$ $(\star)$

e) $y = \ln(1+x)$

f) $y = \arcsin(x)$

g) $y = \arctan(x)$ $(\star)$

h) $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x=1$ und vergleichen Sie auch hier die Werte der endlichen Reihe mit den Werten der ursprünglichen Funktion. Betrachten Sie hierzu die Werte $x=1$, 0.9, 1.1 und 2.

i) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(\star)$

j) $f(x) = x\ln(x)$ $(\star)$

Aufgabe 27: Kurvendiskussion

Analysieren Sie den Verlauf (asymptotishes Verhalten, Nullstellen, Extrema, Krümmung in den Extremstellen) und zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

a) $y = 6x^2 - x^4$ $(\star)$

b) $y = \dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$

c) $y = \dfrac{(x^2-5)^3}{125}$

d) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ $(\star)$

e) $y = \dfrac{8}{x^2-4}$

f) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

g) $y = x\sqrt{x+3}$ $(\star)$

h) $y = (x+1)^{\frac{1}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}$

i) $y = \dfrac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$

j) $y = xe^{-x}$ $(\star)$

k) $y = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ $(\star)$

l) $y = \dfrac{x}{\ln(x)}$

m) $y = (x+1)\ln^2(x+1)$

n) $y = \dfrac{1}{\sin(x)+\cos(x)}$

o) $y = e^{\sin(x)}$

p) $y = e^{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)}$

Integrieren

Aufgabe 28: Integrieren = Differenzieren rückwärts ($\star$)

Vervollständigen Sie die Integrationstabelle der interaktiven Formelsammlung am Ende des Übungsheftes mit Hilfe der Differentiationstabelle.

Aufgabe 29: Stammfunktionen

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

a) $\int x^5\,dx$ ($\star$)

b) $\int 5a^2x^6\,dx$ ($\star$)

c) $\int \left(6x^2+8x+3\right)\,dx$ ($\star$)

d) $\int x(x+a)(x+b)\,dx$ ($\star$)

e) $\int \left(a+bx^3\right)^2\,dx$ ($\star$)

f) $\int \sqrt{2px}\,dx$ ($\star$)

g) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{n}}}$ ($\star$)

h) $\int \left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3\,dx$

i) $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)\,dx$ ($\star$)

j) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{x^{2/3}}dx$ ($\star$)

k) $\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

l) $\int \cosh(x)\,dx$ ($\star$)

m) $\int \ln(ax)\,dx$ ($\star$)

n) $\int \sin(\varphi+\tau)\,d\varphi$ ($\star$)

Aufgabe 30: Integration durch Substitution ($\star$)

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale mit Hilfe der Variablenersetzungen:

a) $\int \frac{dx}{-x+1}$

b) $\int 2\cdot\sqrt[3]{2x-7}\,dx$

c) $\int 5x\left(5x^2-3\right)^7\,dx,\quad 5x^2-3=t$

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)\,dx$

e) $\int \sin(\omega t+\varphi)dt,\quad y=\omega t+\varphi$

f) $\int 2^{3x+6}\,dx$

g) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$

h) $\int \frac{3x}{-x^2+1}\,dx$

i) $\int 7\cos^7(x)\sin(x)\,dx$

j) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^n(x)}\,dx$

k) $\displaystyle\int e^x \cos\left(e^x\right)\, dx$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}, \quad x = \frac{1}{t}$

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}, \quad x = -\ln t$

n) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}, \quad t = \sqrt{x+1}$

o) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)\,dx}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}, \quad t = \sin x$

p) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\ln(x)}{x}\, dx$

q) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}\, dx$

r) $\displaystyle\int \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{4+x^2}\, dx$

s) $\displaystyle\int \tan(x)\, dx$

t) $\displaystyle\int \coth(x)\, dx$

Aufgabe 31: Integration durch trigonometrische Substitution ($\star$)

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale mithilfe der trigonometrischen Variablenersetzungen:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

d) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

Aufgabe 32: Partielle Integration

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale mit Hilfe der partiellen Integration:

a) $\displaystyle\int x\sin(x)\, dx$

b) $\displaystyle\int x\cos(3x)\, dx$ ($\star$)

c) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\, dx$

d) $\displaystyle\int x\cdot 2^{-x}\, dx$

e) $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\, dx$ ($\star$)

f) $\displaystyle\int \left(x^2-2x+5\right) e^{-x}\, dx$

g) $\displaystyle\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}\, dx$

h) $\displaystyle\int x\sin(x)\cos(x)\, dx$ ($\star$)

i) $\displaystyle\int \left(x^2+5x+6\right)\cos(2x)\, dx$

j) $\displaystyle\int x^2\ln(x)\, dx$ ($\star$)

k) $\displaystyle\int \ln(x)\, dx$ ($\star$)
Hinweis: $u'(x) = 1, v(x) = \ln(x)$

l) $\displaystyle\int \ln^2(x)\, dx$ ($\star$)

m) $\displaystyle\int \cos^2(x)\, dx$

n) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^3}\, dx$

o) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$ ($\star$)

p) $\int x \arctan(x)\, dx$

q) $\int x \arcsin(x)\, dx$ $(\star)$

r) $\int \arctan(x)\, dx$ $(\star)$

Hinweis: $u'(x) = 1, v(x) = \arctan(x)$

s) $\int \arcsin(x)\, dx$

t) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx$

u) $\int \frac{x}{\sin^2(x)}\, dx$ $(\star)$

v) $\int \frac{x \cos(x)}{\sin^2(x)}\, dx$

w) $\int e^x \sin(x)\, dx$ $(\star)$

x) $\int 3^x \cos(x)\, dx$

y) $\int e^{ax} \sin(bx)\, dx$

z) $\int \sin(\ln(x))\, dx$

Aufgabe 33: Unbestimmte Integrale rationaler Funktionen

a) $\int \frac{dx}{3x^2 - x + 1}$ $(\star)$

b) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\, dx$ $(\star)$

c) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ $(\star)$

d) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\, dx$ $(\star)$

e) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-4)}$

f) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

g) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Aufgabe 34: Bestimmte und uneigentliche Integrale $(\star)$

Berechnen Sie die folgenden Integrale, verwenden Sie dafür $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$:

a) $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\, dx$

b) $\int_{-\infty}^\infty x^4 e^{-x^2}\, dx$

c) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$

d) $\int_1^e \frac{\ln(\ln(x))}{x}\, dx$

e) $\int_0^1 x^2 \arctan(3x)\, dx$

f) $\int_{-1}^1 \arcsin^2(x)\, dx$

g) $\int_0^1 \frac{\arcsin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1-x}}\, dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \tan^2(2x)\, dx$

i) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x)}{e^x}\, dx$

j) $\int_0^1 \cos^2(\ln(x))\, dx$

k) $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Aufgabe 35: Flächeninhalte

Berechnen Sie den Inhalt der Flächen, die von den Kurven mit den angegebenen Gleichungen eingeschlossen werden. Skizze nicht vergessen!

a) $y_1 = \dfrac{1}{2}x^3, \quad y_2 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2$

b) $y_1 = \dfrac{1}{x^2}, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = a, \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 3,$ wobei a eine Konstante ist

c) $y_1 = \cos(x), \quad y_2 = 0,$ zwischen benachbarten Nullstellen

d) $y_1 = \cos(x), \quad y_2 = \sin(x),$ zwischen benachbarten Schnittpunkten

e) $y_1 = 2\sin(x), \quad y_2 = \sqrt{3}\tan(x), \quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

f) Zum Knobeln: $y = x^2, \quad x = y^2$

Komplexe Zahlen

Aufgabe 36: Addition und Subtraktion ($\star$)

Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch in der komplexen Zahlenebene:

a) $(1+2i)+(2+i)$

b) $(2+5i)-3i$

c) $(4-2i)+(-6+5i)$

d) $(-1-2i)-(5+2i)$

Aufgabe 37: Einfache Rechenoperationen mit komplexen Zahlen ($\star$)

Bringen Sie folgende Ausdrucke in die Form $a+bi$:

a) $(-7+3i)-(2-4i)$

b) $(3-2i)(1+3i)$

c) $\dfrac{-5+5i}{4-3i}$

d) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$

e) $|3-4i||4+3i|$

f) $\left|\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}\right|$

g) $2(5-3i)-3i(-2+i)+5(i-3)$

h) $(3-2i)^3$

i) $\dfrac{5}{3-4i}+\dfrac{10}{4+3i}$

j) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$

k) $\left|\dfrac{2-4i}{5+7i}\right|^2$

l) $\dfrac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$

m) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}$

n) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}i}-\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}i}$

o) $\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}i}-\dfrac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}i}$

Aufgabe 38: Polardarstellung komplexer Zahlen ($\star$)

Skizzieren Sie die Lage der folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene und schreiben Sie sie in Polarform:

a) $3+3i$

b) $-1+\sqrt{3}i$

c) -1

d) $-2-2\sqrt{3}i$

e) $3\sqrt{3}+3i$

f) $-2-2i$

g) $1-\sqrt{3}i$

h) 5

i) $-5i$

Aufgabe 39: Komplexe Ausdrücke ($\star$)

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke der komplexen Zahl $z = a + bi = re^{i\varphi}$ $(a, b, r, \varphi$ reell) jeweils in kartesischer und in Polarform:

a) z^*

b) $|z|$

c) $\mathrm{Re}(z)$

d) $\mathrm{Im}(z)$

e) $z + z^*$

f) $z - z^*$

g) $z \cdot z^*$

h) $\dfrac{z}{z^*}$

i) $\left|\dfrac{z}{z^*}\right|$

Aufgabe 40: Hier hilft die Euler'sche Formel ($\star$)

a) Beweisen Sie die Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

b) Zeigen Sie:

$$\sin(3\varphi) = 3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi) \quad \text{und} \quad \cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$$

c) Zeigen Sie, dass für $m \neq n$ die folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0$$

d) Leiten Sie die folgenden Beziehungen her ($\alpha > 0$):

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\sin(t)\,dt = \frac{1}{\alpha^2+1} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\cos(t)\,dt = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}$$

e) Berechnen sie allgemein die n-te Wurzel von $z_1 = 1$ und $z_2 = -1$ und zeichnen Sie die Ergebnisse für $n = 3$ und $n = 4$ in der Gauß'schen Zahlenebene.

Aufgabe 41: Vermischtes

a) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:
$x^2 + (1+i)x - 2(1-i) = 0$ ($\star$) und $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}x + 1 = 0$

b) Von der Gleichung $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ ist eine komplexe Lösung $x_1 = 1 + i$ bekannt. Wie lauten die übrigen Lösungen? ($\star$)

c) Bestimmen Sie sämtliche reellen und komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:
$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ und $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

Vektoren

Aufgabe 42: Hier hilft zeichnen

a) Drei Polarhunde ziehen an einem Schlitten mit gleicher Stärke, aber unter relativen Winkeln von 60°. Welche Kraft muss der Hundehalter in welche Richtung ausüben, wenn er will, dass der Schlitten noch nicht losfährt?

b) Bilden Sie die Summe von sieben koplanaren Vektoren der Länge a mit Winkeldifferenzen von 30°.

c) ... und nun in Koordinatendarstellung!

Aufgabe 43: Vektorzerlegung

Immer erst zeichnen!

a) Ein Vektor hat die Lange 4cm und bildet mit der Horizontalen (x-Achse) einen Winkel von 45°. Bestimmen Sie die x- und die y-Komponente.

b) Ein Vektor hat die kartesischen Komponenten $\begin{pmatrix} 0 \\ -\ell \\ 0 \end{pmatrix}$. Eine schiefe Ebene bildet mit der x-Achse den Winkel α und die z-Achse liegt in der Ebene. Zerlegen Sie den Vektor in seine Komponenten parallel und senkrecht zu der schiefen Ebene.

Aufgabe 44: Vektorsummen und Differenzen

Bilden Sie graphisch und in Koordinatendarstellung alle möglichen Summen und Differenzen folgender Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 45: Basisvektoren

Welche der beiden folgenden Mengen von Vektoren bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Normieren Sie die Vektoren der vermuteten Basis auf 1.

Aufgabe 46: Skalarprodukt – geometrisch

a) Wie berechnet man die Arbeit, die geleistet werden muss, wenn ein Massepunkt m eine um den Winkel φ gegenüber der Horizontale geneigte schiefe Ebene um eine Strecke s hinaufgeschoben werden soll?

b) Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt sich, dass

$$2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

Was bedeutet dies für den Winkel zwischen den beiden Vektoren?

c) Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts den Cosinus-Satz der ebenen Geometrie, nach dem in einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

wobei γ den Gegenwinkel der Seite c bezeichnet.

d) Vergleichen Sie den Vektor $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$ mit dem Vektor $\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ geometrisch.

e) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf.

(i) Berechnen Sie $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

(ii) Welche geometrische Bedeutung hat dieses Skalarprodukt?

(iii) Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen den beiden Diagonalen des Parallelogramms.

(iv) Wann stehen diese senkrecht aufeinander?

Aufgabe 47: Skalarprodukt – in Koordinaten

a) Betrachten Sie die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(i) Welche Länge haben die Vektoren?

(ii) Geben Sie die Koordinatendarstellung der zugehörigen Einheitsvektoren an.

(iii) Berechnen Sie alle Skalarprodukte zwischen den Vektoren. Welchen Winkel schließen die Vektoren miteinander ein?

b) Berechnen Sie $\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 48: Vektorprodukt – in Koordinaten (⋆)

a) Berechnen Sie alle Vektorprodukte zwischen den folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie $\left|\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\right|$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 49: Vektorprodukt – geometrisch (⋆)

Bestimmen Sie einen Einheitsvektor senkrecht zu der von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Ebene.

Aufgabe 50: Spatprodukt

Berechnen Sie das Dreifachprodukt $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ der Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 51: Spatprodukt und doppeltes Vektorprodukt (⋆)

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ berechnen Sie:

a) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

b) $\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

c) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

d) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$

Aufgabe 52: Geometrie mit Vektoren

Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des Punktes $(3, 2, 1)$ von der Ebene, die durch $(1, 1, 0)$, $(3, -1, 1)$ und $(-1, 0, 2)$ geht.

Aufgabe 53: Vektorfunktionen

Berechnen Sie die Vektorfunktionen $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (die Geschwindigkeit), $|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ (den Betrag der Geschwindigkeit), $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (die Beschleunigung) und $|\vec{a}| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ (den Betrag der Beschleunigung) für die folgenden Funktionen $\vec{r}(t)$:
Analysieren Sie die Art der Bewegung, wenn $\vec{r}(t)$ die Abhängigkeit des Ortsvektors von der Zeit t angibt.

a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$

b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} te^{-}t \\ t^2 e^{-t^2} \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad t > 0$

c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 2t \\ -3e^{-2t} \\ 2\sin(5t) \end{pmatrix}$

INTERAKTIVE FORMELSAMMLUNG

Potenzgesetze

$$x^a \cdot x^b =$$
$$a^x \cdot b^x =$$
$$(x^a)^b =$$
$$x^{-n} =$$
$$x^{\frac{1}{2}} =$$
$$x^{\frac{1}{n}} =$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) =$$

Logarithmengesetze

$$\log_b(x \cdot y) =$$
$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) =$$
$$\log_b(x^a) =$$
$$\frac{\log_c(a)}{\log_c(b)} =$$

Trigonometrische Formeln

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) =$$
$$\sin(\alpha + \beta) =$$
$$\cos(\alpha + \beta) =$$
$$1 + \tan^2(x) =$$
$$1 + \cot^2(x) =$$

Differentiationstabelle

Erstellen Sie eine Differentiationstabelle, die die Ableitungen der in der Vorlesung vorgestellten Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen enthält.

$$(x^a)' =$$

$$(a^x)' =$$

$$(\ln(x))' =$$

$$(\log_a(x))' =$$

$$(\sin(x))' =$$

$$(\cos(x))' =$$

$$(\tan(x))' =$$

$$(\cot(x))' =$$

$$(\arcsin(x))' = \qquad (|x| < 1)$$

$$(\arccos(x))' = \qquad (|x| < 1)$$

$$(\arctan(x))' =$$

$$(\text{arccot}(x))' =$$

$$(\sinh(x))' =$$

$$(\cosh(x))' =$$

$$(\tanh(x))' =$$

$$(\text{cotanh}(x))' =$$

$$(\text{arsinh}(x))' =$$

$$(\text{arcosh}(x))' = \qquad (|x| > 1)$$

$$(\text{artanh}(x))' = \qquad (|x| < 1)$$

$$(\text{arcoth}(x))' = \qquad (|x| > 1)$$

Integrationstabelle

Erstellen Sie mit Hilfe der Differentiationstabelle eine Integrationstabelle!

$$\int x^a \, dx =$$

$$\int a^x \, dx =$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx =$$

$$\int \frac{\ln(a)}{x} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \qquad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} \, dx = \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \qquad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \cos(x) \, dx =$$

$$\int \sin(x) \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx =$$

$$\int \cosh(x) \, dx =$$

$$\int \sinh(x) \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} \, dx =$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)} \, dx =$$

Quellenangaben:

Ein Teil der Aufgaben entstammt den folgenden Quellen:
– Wolfgang Schäfer, Kurt Georg, Gisela Trippler, Mathematik-Vorkurs, Vieweg-Teubner Verlag
– Michael Ruhrländer, Brückenkurs Mathematik, Pearson Studium Verlag
– www.khanuniversity.org