Freie-Elektronen-Laser

Teil 3: High-Gain FEL

1. Wiederholung: Undulator, Pendelgleichung und LG-FEL
2. Feldänderungen
3. 1D-WW mit Strahlungsfeld
4. 1D gekoppelte DGL
5. Normierte Skalenparameter
6. HG-FEL Kenngrößen
7. Seeding

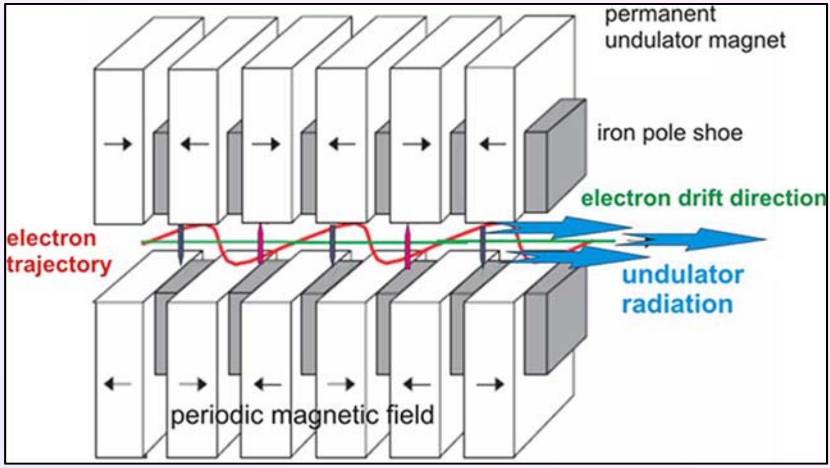
Spont. Undulatorstrahlung

Teilchenbewegung im Undulator:

$$x(t) = \frac{K}{\gamma k_u} \cdot \sin(\omega_u t)$$

$$s(t) = \bar{\beta} c t - \frac{K^2}{8\gamma^2 k_u} \cdot \sin(2\omega_u t)$$

$$\bar{\beta} = 1 - \frac{1}{2\gamma^2}\left\{1 + \frac{K^2}{2}\right\}$$

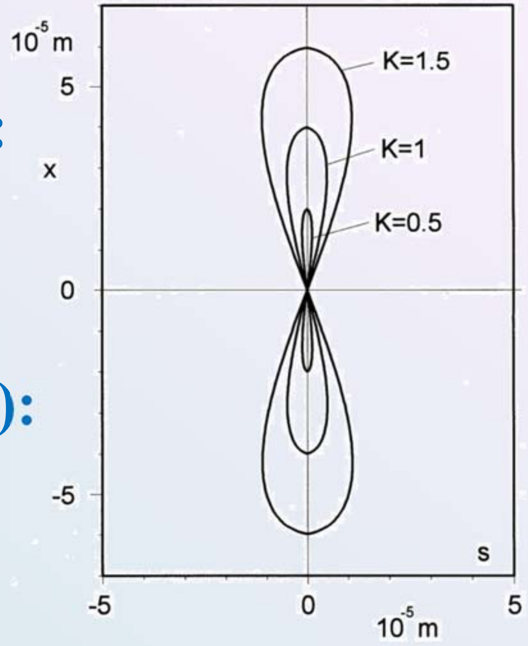


Kohärenzbedingung in Vorwärtsrichtung:

$$\lambda = \frac{1}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right) \cdot \lambda_U$$

Strahlungsleistung per e$^-$ (1. Harmonische):

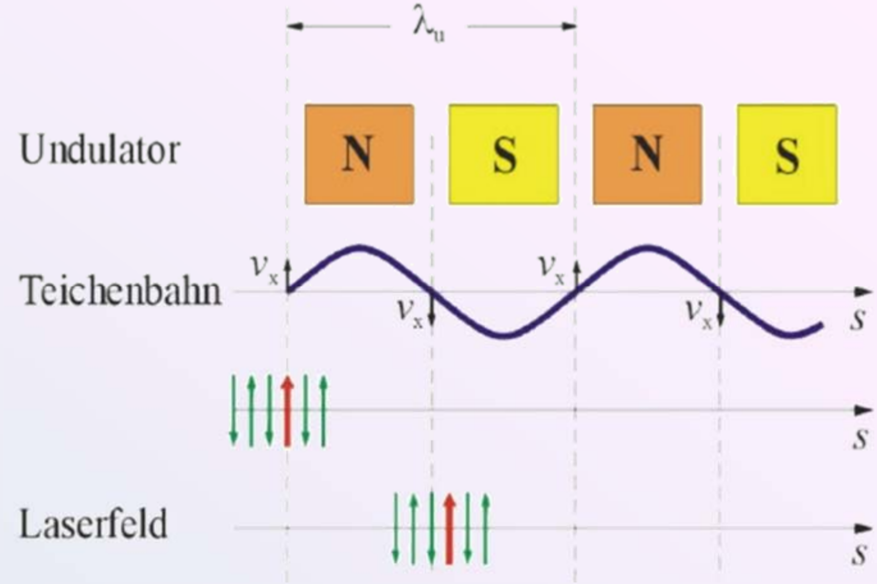
$$P = \frac{e^2 c \gamma^2 K^2 k_u^2}{12\pi\varepsilon_0 \left(1 + K^2/2\right)^2}$$



WW mit konst. Strahlungsfeld

Energieübertrag:

$$\frac{dW}{dt} = -e\frac{K_{JJ}\cdot c}{2\gamma}E_0\left\{\underbrace{\cos\Psi}_{\approx\text{konst.}} + \underbrace{\cos\chi}_{=\cos(\Psi-2k_u z)}\right\}$$



Kenngrößen:

$$\eta = \frac{\gamma-\gamma_r}{\gamma_r}, \quad \gamma_r = \sqrt{\frac{k}{2k_u}\left(1+\frac{K^2}{2}\right)}$$

$$\theta = \Psi + \frac{\pi}{2} = (k+k_u)z - \omega t + \frac{\pi}{2}$$

Pendelgleichungen:

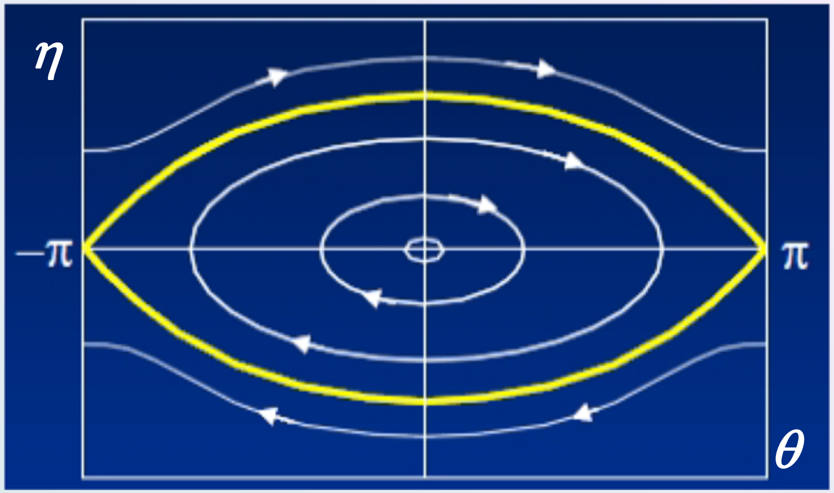
$$\frac{d\eta}{dz} = -\varepsilon\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dz} = 2k_u\eta$$

mit

$$\varepsilon = \frac{eE_0K_{JJ}}{2mc^2\gamma_r^2}$$

$$\eta_{\max} = \sqrt{2\varepsilon/k_u}$$

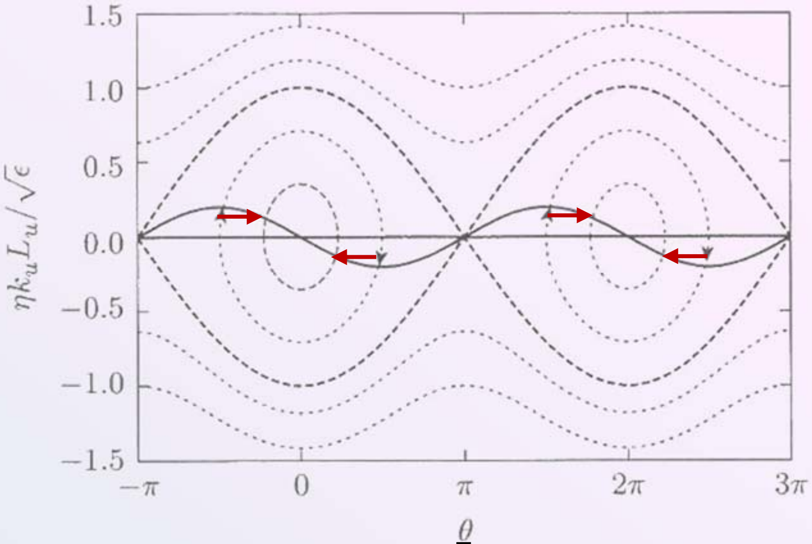


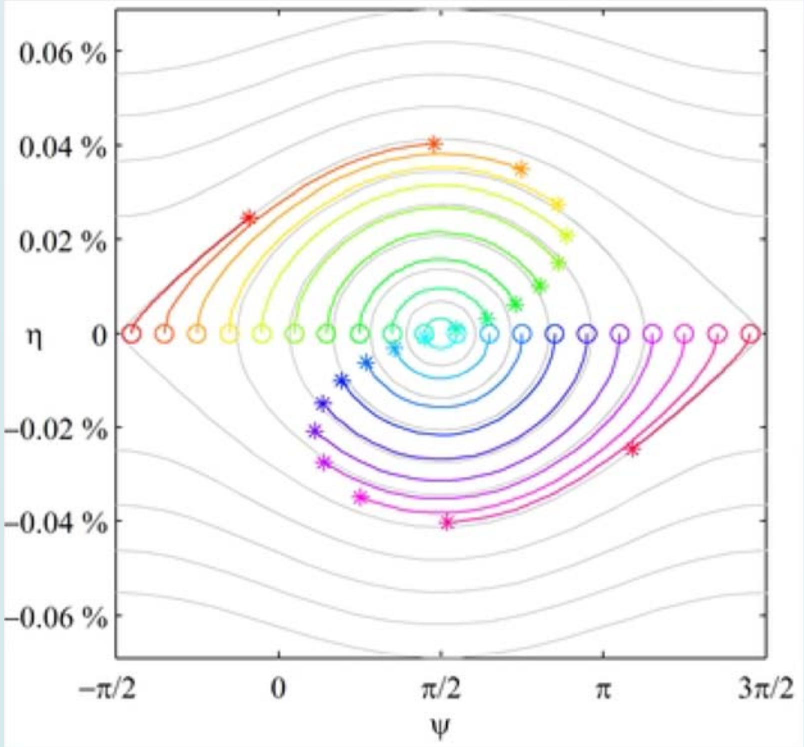
Modulation von E und n_e

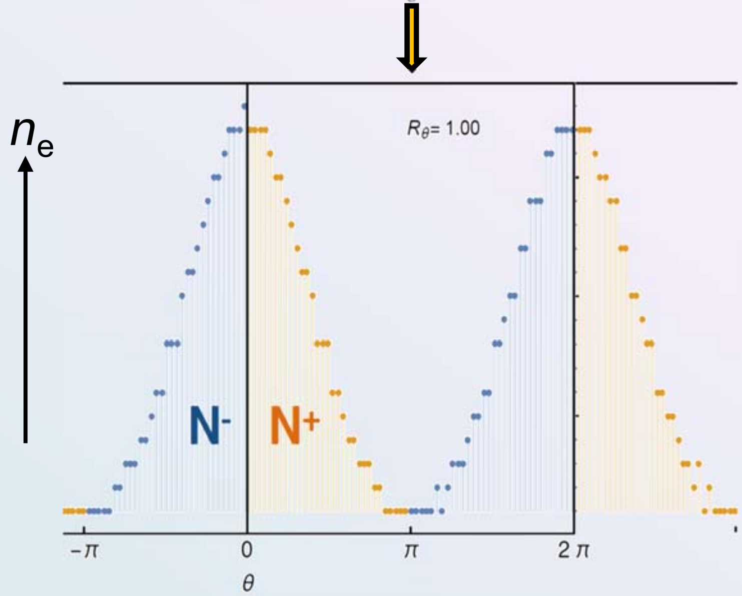
Einschuss auf Resonanzenergie:

- Energiemodulation
  - Dichtemodulation

Kein Energietransfer!



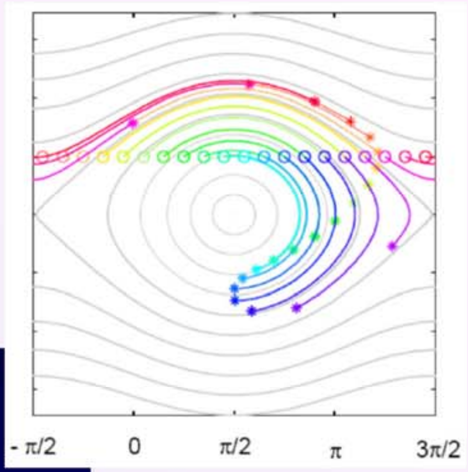


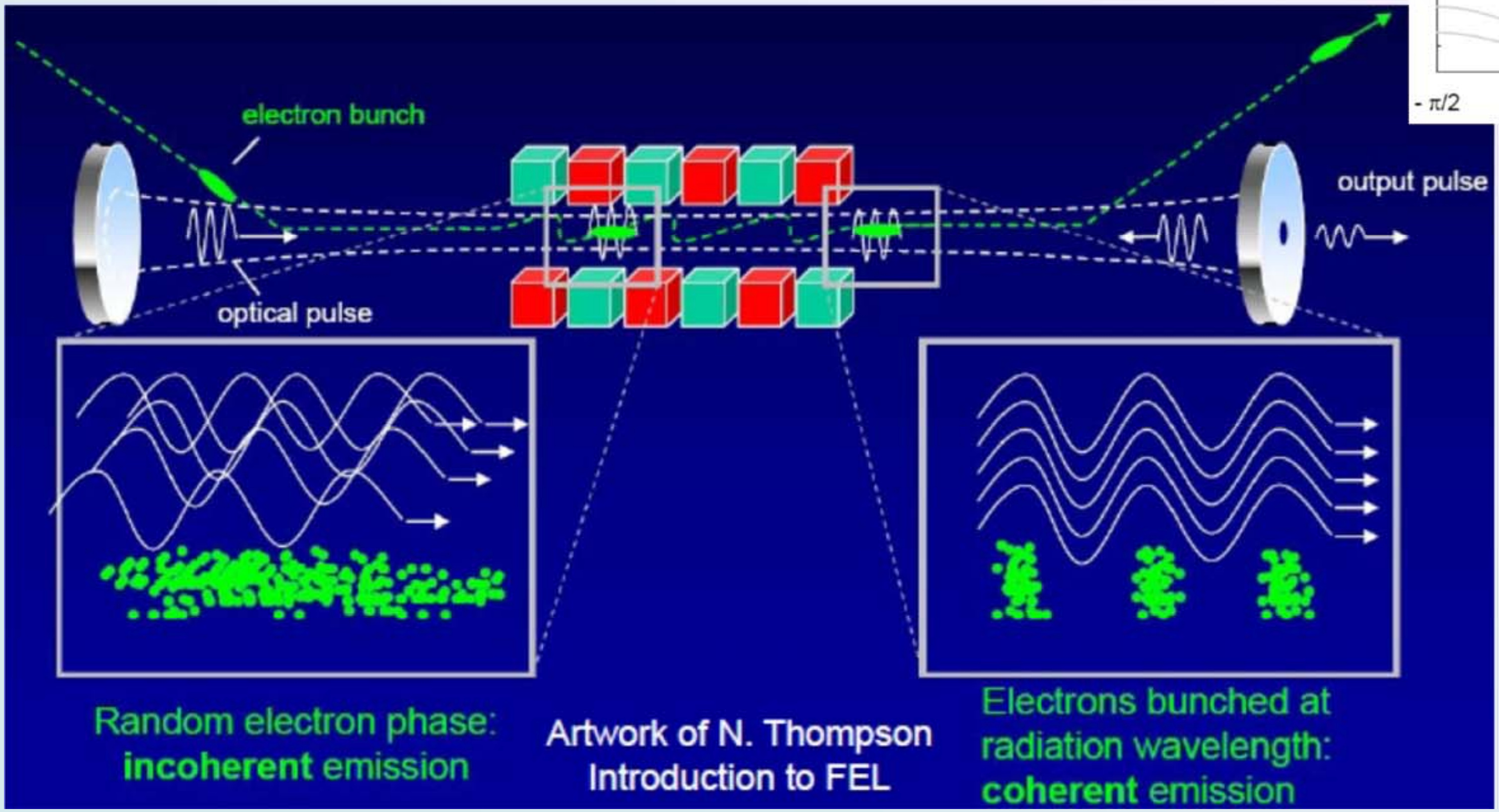


Kleinsignalbereich

Einschuss oberhalb Resonanzenergie:

- Energiemodulation
  - Dichtemodulation
    - Energietransfer





Multi-Pass

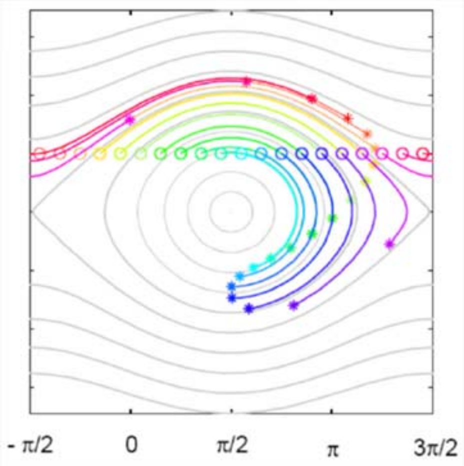
Einschuss oberhalb Resonanzenergie:

- Energiemodulation
  - Dichtemodulation
    - Energietransfer

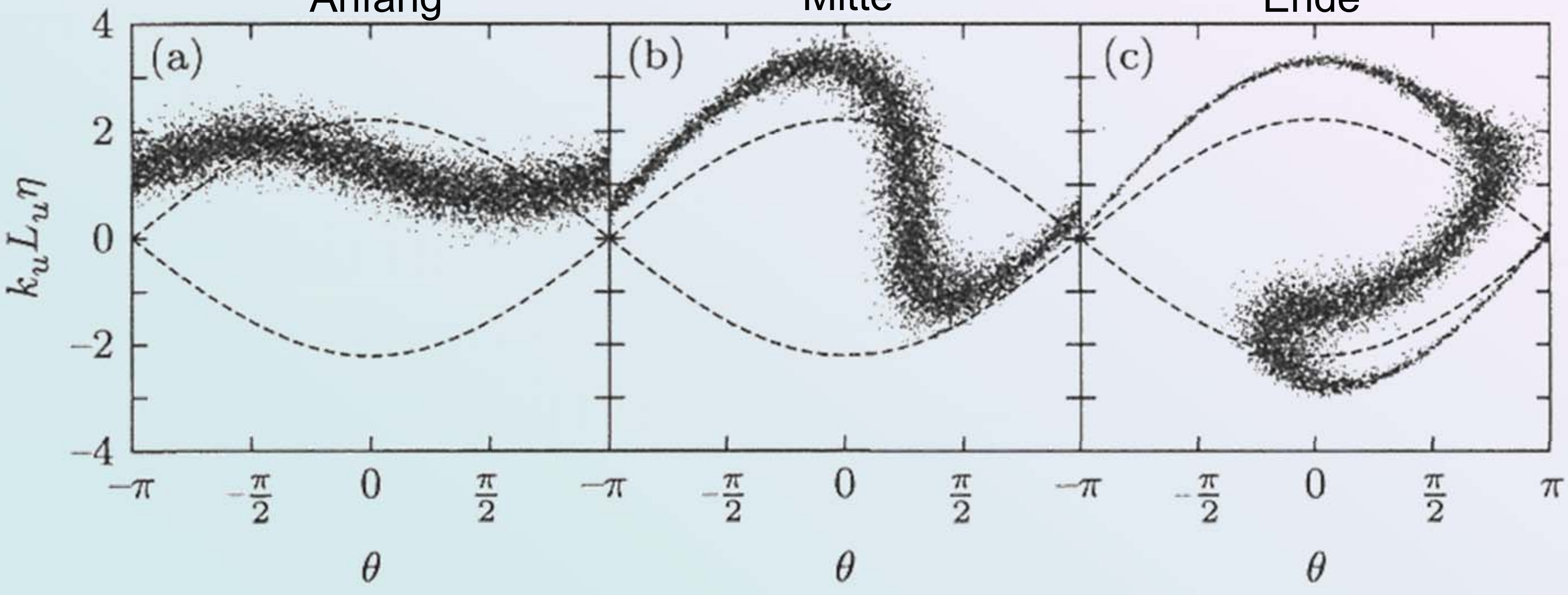
Verstärkung → Sättigung!

2. Ordnung Störungs-entwicklung in

$$\varepsilon = \frac{eE_0 K_{JJ}}{2mc^2\gamma_r^2}$$



Anfang Mitte Ende



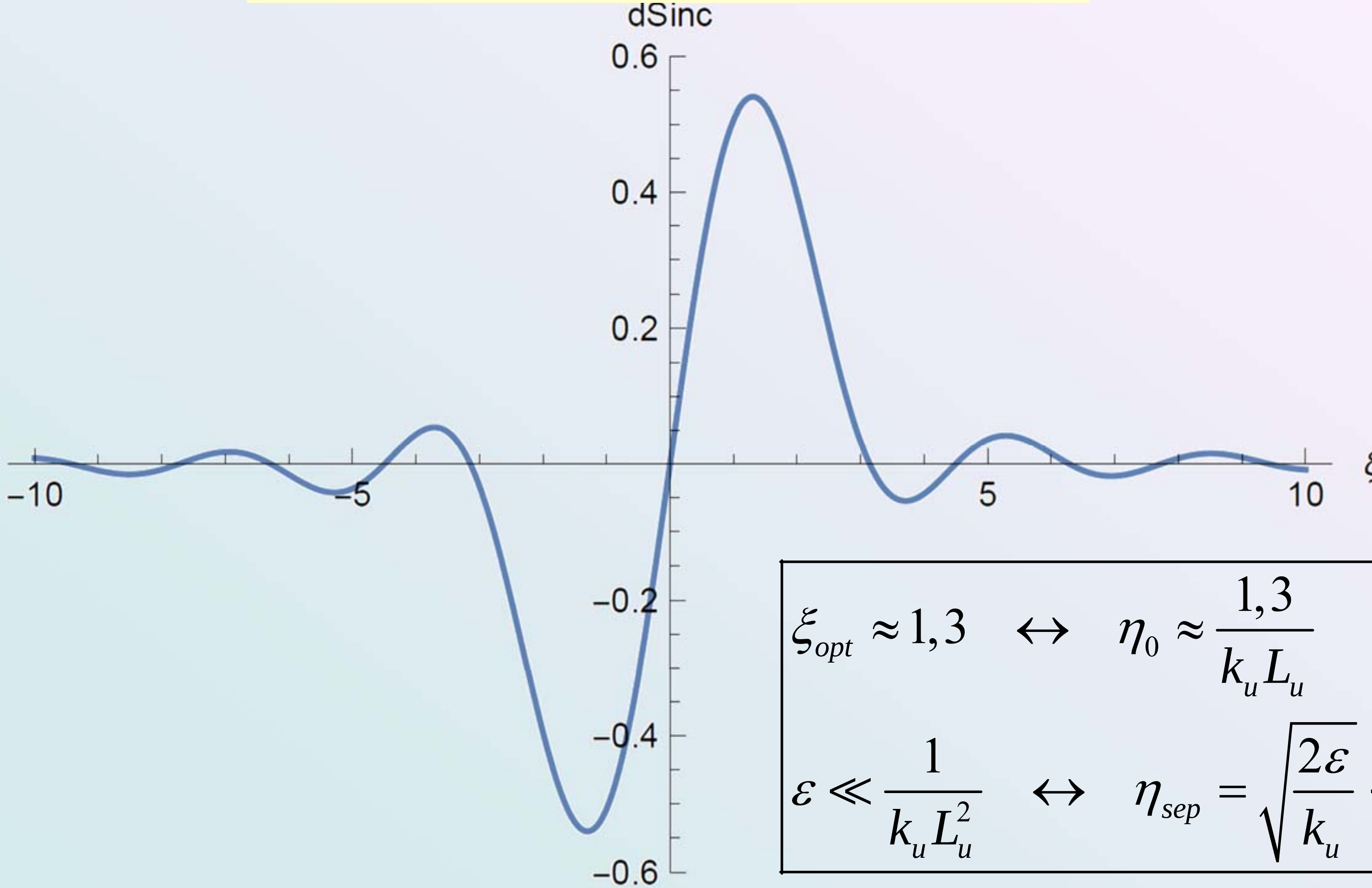
Madey-Theorem

- Verstärkungskurve ~ Ableitung des „Spektrums“ der spontanen Strahlung

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{\xi_0}{\pi N_u}$$

$$\boxed{G = \frac{\pi}{2} \frac{K_{JJ}^2 N_u^2}{\gamma_r^3} \frac{I_{\text{beam}}}{I_{\text{Alfvén}}} \left(\frac{\lambda_u}{\sigma_r}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sin|\xi|}{\xi}\right)^2}$$

$$\xi = k_u L_u \eta$$



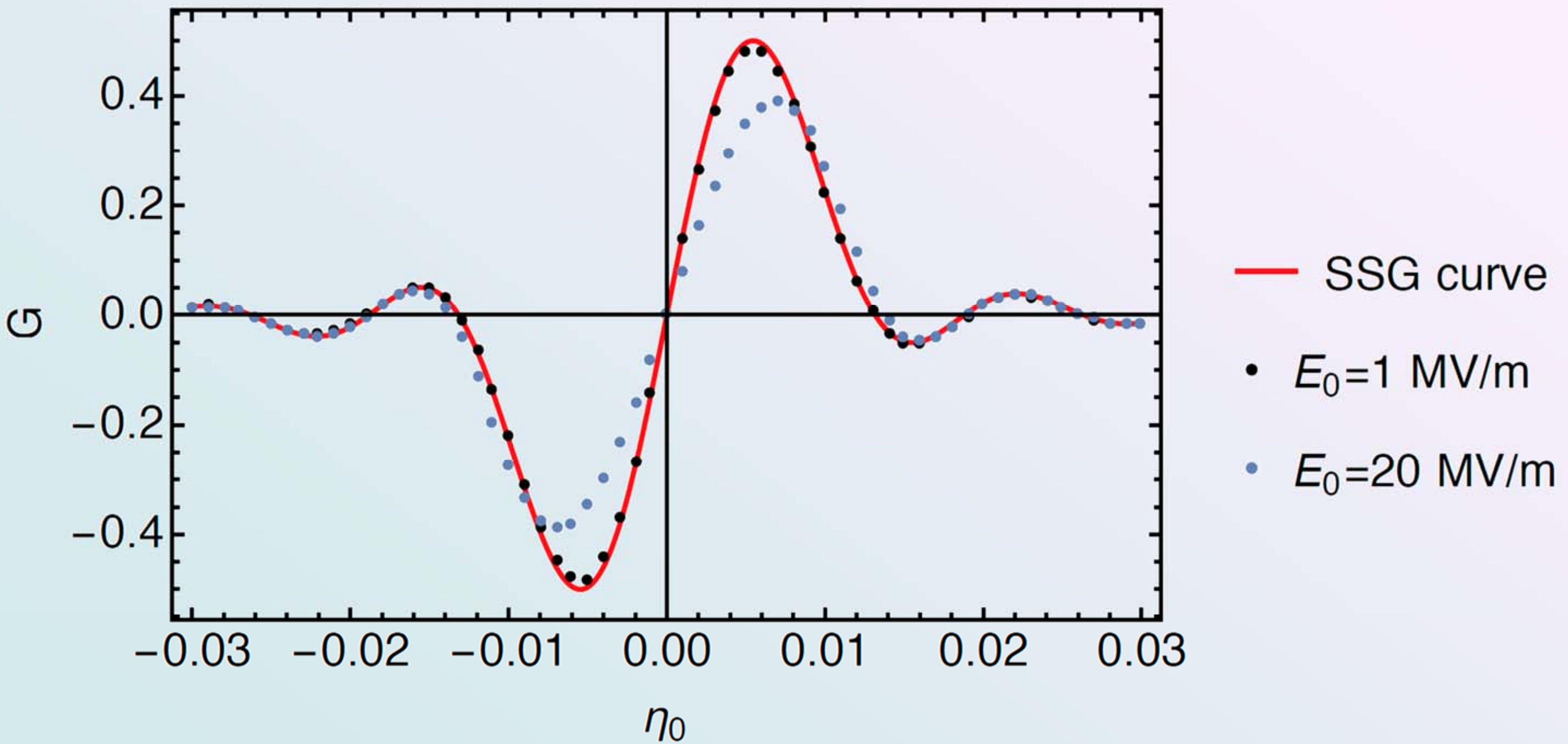
$$\xi_{opt} \approx 1{,}3 \quad \leftrightarrow \quad \eta_0 \approx \frac{1{,}3}{k_u L_u}$$

$$\varepsilon \ll \frac{1}{k_u L_u^2} \quad \leftrightarrow \quad \eta_{sep} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{k_u}} \ll \frac{\sqrt{2}}{k_u L_u}$$

Verstärkungskurve

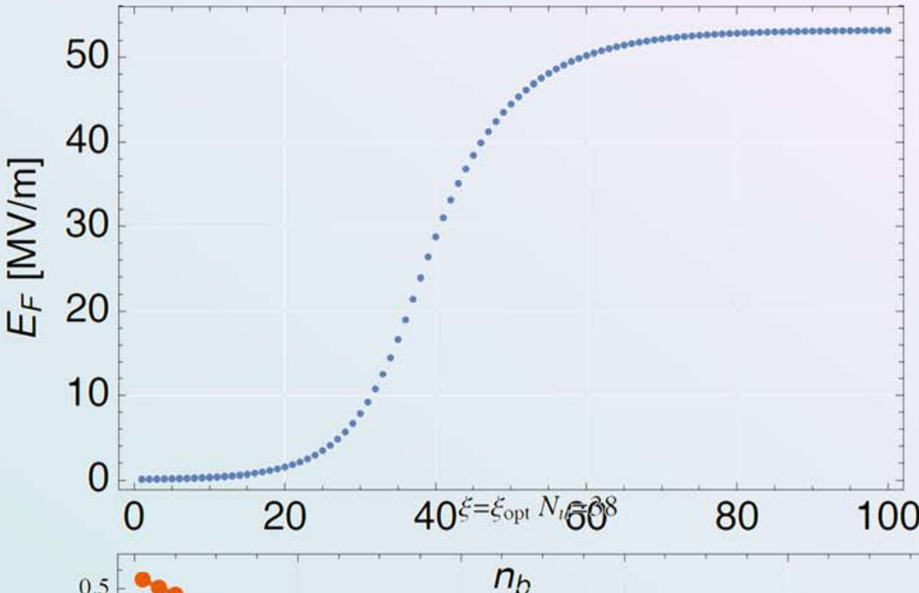
Verstärkungskurve ↔ Madey-Theorem:

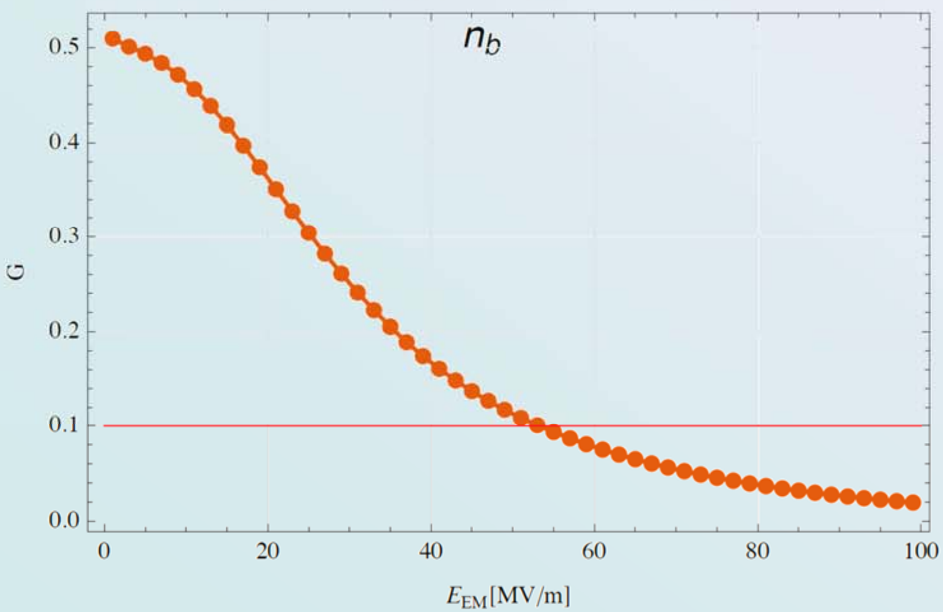
„Abweichung bei starken Strahlungsfeldern“

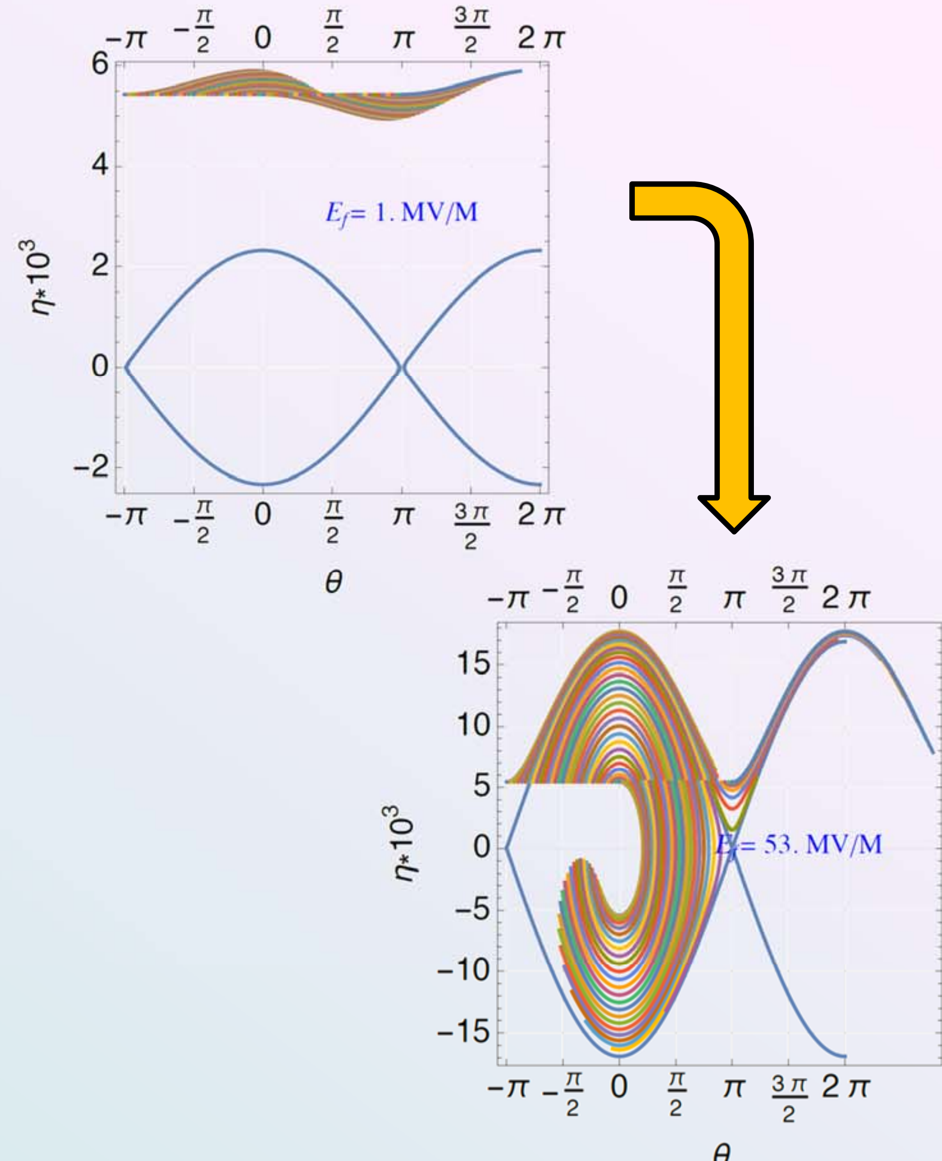


Sättigung

Verstärkung deckt Resonatorverluste



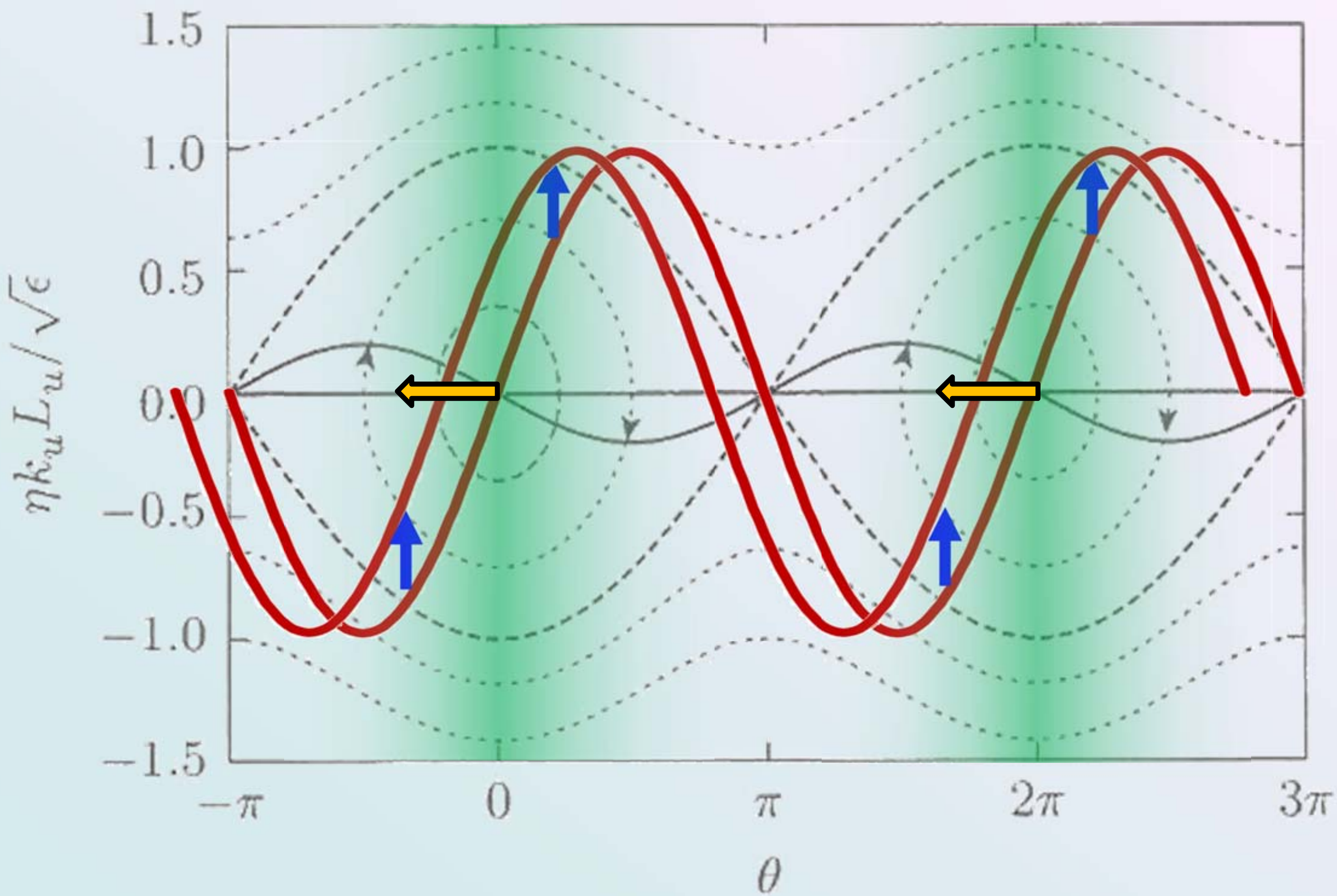




Feldänderungen

Einschuss auf Resonanzenergie

Überlagerung mit externem Strahlungsfeld



Feldänderungen in 1D-Näherung

Langsame Änderung von Amplitude und Phase:

$$\boxed{E_x(s,t) = \hat{E}_S(s,t)\cdot\cos\left(ks-\omega t+\phi_S(s,t)\right)}$$

Genauere Betrachtung mit komplexem Ansatz

$$E_x(s,t) = \tilde{E}(s,t)\cdot e^{i(ks-\omega t)} + \tilde{E}^*(s,t)\cdot e^{-i(ks-\omega t)}$$

$$\rightarrow \quad \tilde{E}(s,t) = \frac{1}{2}\hat{E}_S(s,t)\cdot e^{i\phi_S(s,t)}$$

Wellengleichung verknüpft Feld und Elektronenfluss durch Undulator:

$$\Box\vec{E} = \partial^\mu\cdot\partial_\mu\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial j_x}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\rho$$

1-dim

$$\partial_+\cdot\partial_- E_x = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial s^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial j_x}{\partial t}$$

hier: $\partial_+\cdot\partial_-\left(\tilde{E}\cdot e^{i(ks-\omega t)} + \tilde{E}^*\cdot e^{-i(ks-\omega t)}\right) = 2ik\cdot\left(\partial_+\tilde{E}\right)\cdot e^{i(ks-\omega t)} + 2ik\cdot\left(\partial_+\tilde{E}^*\right)\cdot e^{-i(ks-\omega t)}$

Feldänderungen in 1D-Näherung

$$\boxed{2ik\cdot\left(\partial_+\tilde{E}\right)+2ik\cdot\left(\partial_+\tilde{E}^*\right)\cdot e^{-2i(ks-\omega t)}=-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial j_x}{\partial t}\cdot e^{-i(ks-\omega t)}}$$

Langsame Änderung ↔ Mittelung über einige Perioden: $\Delta t = 2n\pi/\omega$

$$-2ik\left(\partial_+\tilde{E}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2}\underbrace{\frac{\partial j_x}{\partial t}}_{u'}\cdot\underbrace{e^{i(ks-\omega t)}}_{v}\,\mathrm{d}t=\frac{i\omega}{\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2}\underbrace{j_x}_{u}\cdot\underbrace{e^{i(ks-\omega t)}}_{v'/i\omega}\,\mathrm{d}t$$

Stromdichte gebildet von einzelnen Elektronen (an Positionen s_j):

$$j_x=\frac{-e}{2\pi\sigma_x^2}\frac{cK}{\gamma_r}\cos\left(k_u s\right)\sum_{j=1}^{N_\Delta}\delta\left(s-s_j(t)\right)\quad\Rightarrow\quad\int\mathrm{d}t\ \rightarrow\ \frac{1}{c}\,\mathrm{Integrand}(t_j(s))$$

Übergang zu Mittelwerten → formales Ersetzen $\sum_{j=1}^{N_\Delta}\ldots\rightarrow\frac{1}{N_\Delta}\langle\ldots\rangle$

mit $N_\Delta=n_e\left(2\pi\sigma_x^2\right)\left(c\Delta t\right)$ und

$$ks=\theta_j(s)-k_u s+\omega\bar{t}_j\left(s\right)\qquad\text{und}\qquad t_j(s)=\bar{t}_j\left(s\right)+\frac{K^2}{4\omega\left(1+K^2/2\right)}\sin\left(2k_u s\right)$$

Feldänderungen in 1D Näherung

Formale Entwicklung in Besselfunktionen

$$\cos(k_u s)\cdot e^{-i(ks-\omega t_j)} = e^{-i\theta_j}\sum_{n=1}^{\infty} J_n\left(\frac{K^2}{4(1+K^2/2)}\right)\frac{1}{2}\left(e^{2i(n+1)k_u s}+e^{2ink_u s}\right)$$

$$= e^{-i\theta_j}\frac{1}{2}\left\{J_0\left(\frac{K^2}{4(1+K^2/2)}\right)-J_1\left(\frac{K^2}{4(1+K^2/2)}\right)\right\} = \frac{1}{2}e^{-i\theta_j}\left[JJ\right]$$

ergibt schlussendlich

$$\partial_+\tilde{E} = -\frac{eK_{JJ}}{4\varepsilon_0\gamma_r} n_e \left\langle e^{-i\theta_j}\right\rangle \qquad \text{mit} \qquad K_{JJ} = K\left[JJ\right]$$

Letzter Schritt:

$$\partial_+\tilde{E} = \frac{\partial\tilde{E}(s,t)}{\partial s}+\frac{1}{c}\frac{\partial\tilde{E}(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial\tilde{E}(s,\theta)}{\partial s}+\underbrace{k_u\frac{\partial\tilde{E}(s,\theta)}{\partial\theta}}_{\approx 0}\approx\frac{d\tilde{E}(s,\theta)}{ds}$$

Gekoppelte 1D-Gleichungen

→ Erweiterung der Pendelgleichungen zu folgendem gekoppeltem Differentialgleichungssystem:

$$\frac{d\tilde{E}}{ds} = -\kappa_2 n_e \left\langle e^{-i\theta_j} \right\rangle \qquad \text{mit Bunchingfaktor} \qquad b = \left\langle e^{-i\theta_j} \right\rangle$$

$$\frac{d\theta_j}{ds} = 2k_u \eta_j \qquad \text{mit ponderomotiven Phasen} \qquad \theta_j$$

$$\frac{d\eta_j}{ds} = \kappa_1 \left(\tilde{E} \cdot e^{i\theta_j} + \tilde{E}^* \cdot e^{-i\theta_j} \right) \qquad \text{mit rel. Energieverschiebungen} \quad \eta_j$$

Gemachte Annahmen:

- eindimensionale Betrachtung
- langsam veränderliche Feldamplitude und -phase
- Beschränkung auf die fundamentale Harmonische
- keine Raumladungseffekte (sind klein)

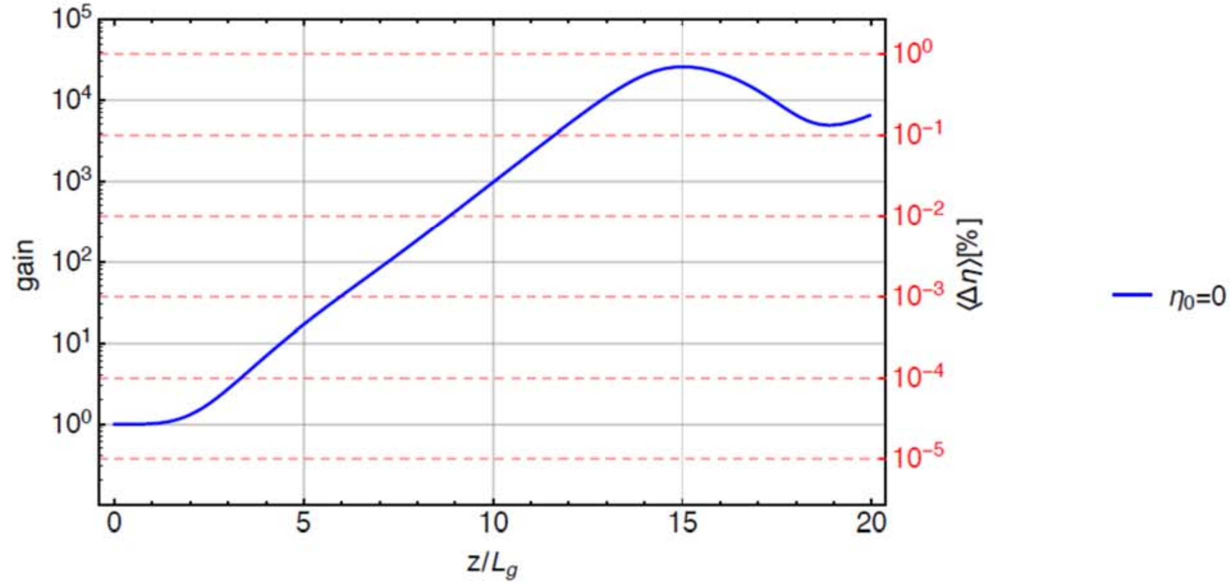
Abkürzungen:

$$\kappa_1 = \frac{eK_{JJ}}{2\gamma_r^2 mc^2}$$

$$\kappa_2 = \frac{eK_{JJ}}{4\varepsilon_0 \gamma_r}$$

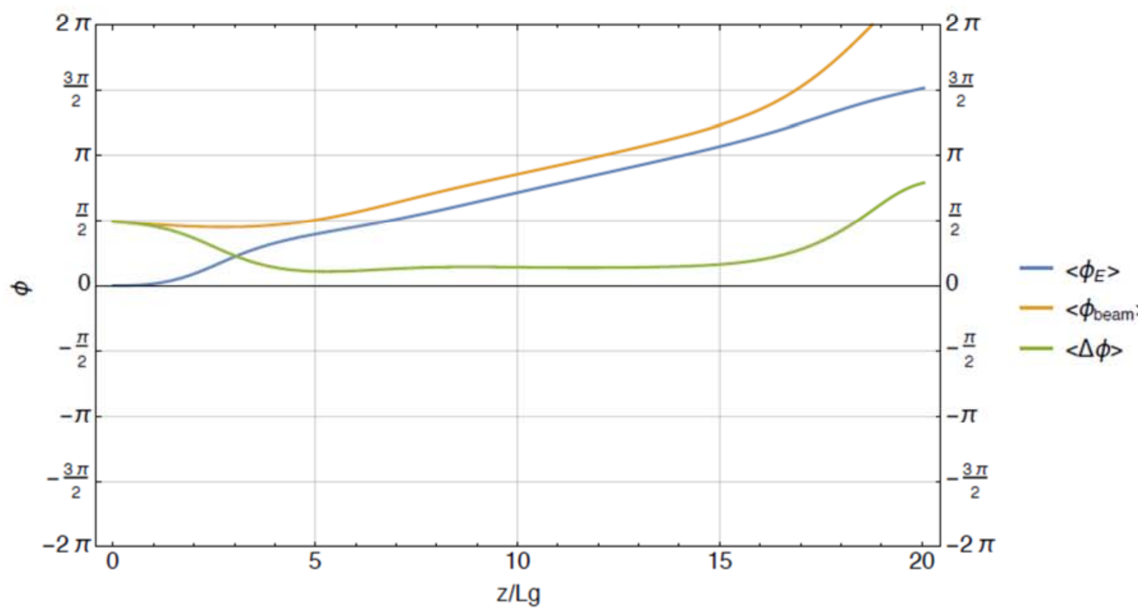
$\eta_0 = 0$!

no gain without
phase change of E



no initial phase change due to off-resonance beam

field phase changes !



Normierte Parameter

Vertieftes Verständnis der DGL durch Definition von normierten „Skalenparametern“:

longitudinale Koordinate:	$\hat{s} = 2k_u \rho s$		$\dfrac{d\theta_j}{d\hat{s}} = \hat{\eta}_j$
rel. Energieabweichung:	$\hat{\eta} = \dfrac{\eta}{\rho}$	$\Rightarrow$	$\dfrac{d\hat{\eta}_j}{d\hat{s}} = a e^{i\theta_j} + a^* e^{-i\theta_j}$
Feldamplitude:	$a = \dfrac{\kappa_1}{2k_u \rho^2}\tilde{E}$		$\dfrac{da}{d\hat{s}} = -\dfrac{\kappa_1 \kappa_2 n_e}{4k_u^2 \rho^3}\left\langle e^{-i\theta_j}\right\rangle = -\left\langle e^{-i\theta_j}\right\rangle$
Pierce-Parameter:	$\rho = \sqrt[3]{\dfrac{\kappa_1 \kappa_2 n_e}{4k_u^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8\pi}\left(\dfrac{I_{\text{beam}}}{I_{\text{Alfvén}}}\right)\left(\dfrac{K_{JJ}}{1+K^2/2}\right)^2\left(\dfrac{\gamma\lambda^2}{2\pi\sigma_x^2}\right)}$		

Die gekoppelten Gleichungen vereinfachen sich damit zu:

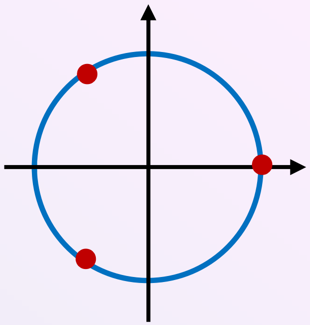
$$\frac{da}{d\hat{s}} = -\left\langle e^{-i\theta_j}\right\rangle = -b, \quad \frac{db}{d\hat{s}} = -i\left\langle \eta_j \cdot e^{-i\theta_j}\right\rangle = -iP, \quad \frac{dP}{d\hat{s}} = a + a^*\left\langle \cancel{e^{-2i\theta_j}}\right\rangle - i\left\langle \eta_j^2 \cancel{e^{-i\theta_j}}\right\rangle$$

Kubische Differentialgleichung

Kombination zur Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$\boxed{\frac{d^3 a}{d\hat{s}^3} = ia \qquad \text{mit Ansatz} \quad a = C \cdot e^{-i\mu\hat{s}} \qquad \rightarrow \qquad \mu^3 = 1}$$

mit den 3 Lösungen des charakteristischen Polynoms



$$\mu_1 = 1, \qquad \mu_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \qquad \mu_3 = -\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

und der **allgemeinen Lösung**

$$\boxed{a(\hat{s}) = C_1 e^{-i\hat{s}} + C_2 e^{\frac{1}{2}\left(i-\sqrt{3}\right)\hat{s}} + \boxed{C_3 e^{\frac{1}{2}\left(i+\sqrt{3}\right)\hat{s}}}}$$

exp. Wachstum

mit den Randbedingungen:

- normierte Feldamplitude $a(0) = \sum C_i$
- Bunching-Faktor $b(0) = -\left.\frac{da}{d\hat{z}}\right|_0 = i\sum \mu_i C_i$
- Kollektiv-Impuls $P(0) = i\left.\frac{db}{d\hat{z}}\right|_0 = i\sum \mu_i^2 C_i$

Kubische Differentialgleichung

Randwertbestimmung durch Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ P_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\mu \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ i\mu_1 & i\mu_2 & i\mu_3 \\ i\mu_1^2 & i\mu_2^2 & i\mu_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Lösung durch Matrixinversion ergibt **Randwertgleichungen**:

$$\boxed{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\mu^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{i}{3} & -\frac{i}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}(i+\sqrt{3}) & \frac{1}{3}(-1)^{5/6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}(i-\sqrt{3}) & \frac{1}{3}(-1)^{5/6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ P_0 \end{pmatrix}}$$

Einbeziehung einer anfänglichen Energieverschiebung $\hat{\eta}_0 = \eta_0 / \rho$:

$$P(\hat{s}) \to \left\langle \hat{\eta}_j e^{-i\theta_j} \right\rangle + \hat{\eta}_0 \qquad \to \qquad \mu^3 - 2\hat{\eta}_0 \mu^2 + \hat{\eta}_0^2 \mu - 1 = 0$$

Kubische Differentialgleichung

Fall 1: Anregung durch existierendes Strahlungsfeld

Anfangsbedingungen:

- keine Dichtemodulation $\rightarrow b_0 = 0$
- kein Energieoffset und -modulation $\rightarrow \eta_0 = 0 \;\rightarrow P_0 = 0$
- Einlaufendes Strahlungsfeld $\rightarrow \boldsymbol{a_0 > 0}$

$$\boxed{\Rightarrow \quad C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{3} a_0}$$

Feldamplitude:

$$a(\hat{s}) = \frac{a_0}{3}\left\{ e^{-i\hat{s}} + e^{\frac{1}{2}\left(i-\sqrt{3}\right)\hat{s}} + e^{\frac{1}{2}\left(i+\sqrt{3}\right)\hat{s}} \right\}$$

Verstärkung:

$$\boxed{G(\hat{s}) = \frac{|a|^2}{a_0^2} = \frac{1}{9}\left\{ 3 + e^{-\sqrt{3}\hat{s}} + \boxed{e^{\sqrt{3}\hat{s}}} + 2\cos\left(\frac{3}{2}\hat{s}\right) \cdot \left[e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{s}} + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{s}} \right] \right\}}$$

Kubische Differentialgleichung

Fall 1: Anregung durch existierendes Strahlungsfeld

Universelle Verstärkungskurve:

$$G(\hat{s}) = \frac{|a|^2}{a_0^2} = \frac{1}{9}\left\{3 + e^{-\sqrt{3}\hat{s}} + \boxed{e^{\sqrt{3}\hat{s}}} + 4\cos\left(\frac{3}{2}\hat{s}\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{s}\right)\right\}$$

Asymptotisches Verhalten für große $\hat{s}$

$$G \approx \frac{1}{9}e^{\sqrt{3}\hat{s}} = \frac{1}{9}e^{2\sqrt{3}k_u\rho\cdot s}$$

Definition der 1-dim Verstärkungslänge (power gain length):

$$L_G = \sqrt{3}\hat{s} = \frac{1}{2\sqrt{3}k_u\rho} = \frac{\lambda_u}{4\pi\sqrt{3}\rho}$$

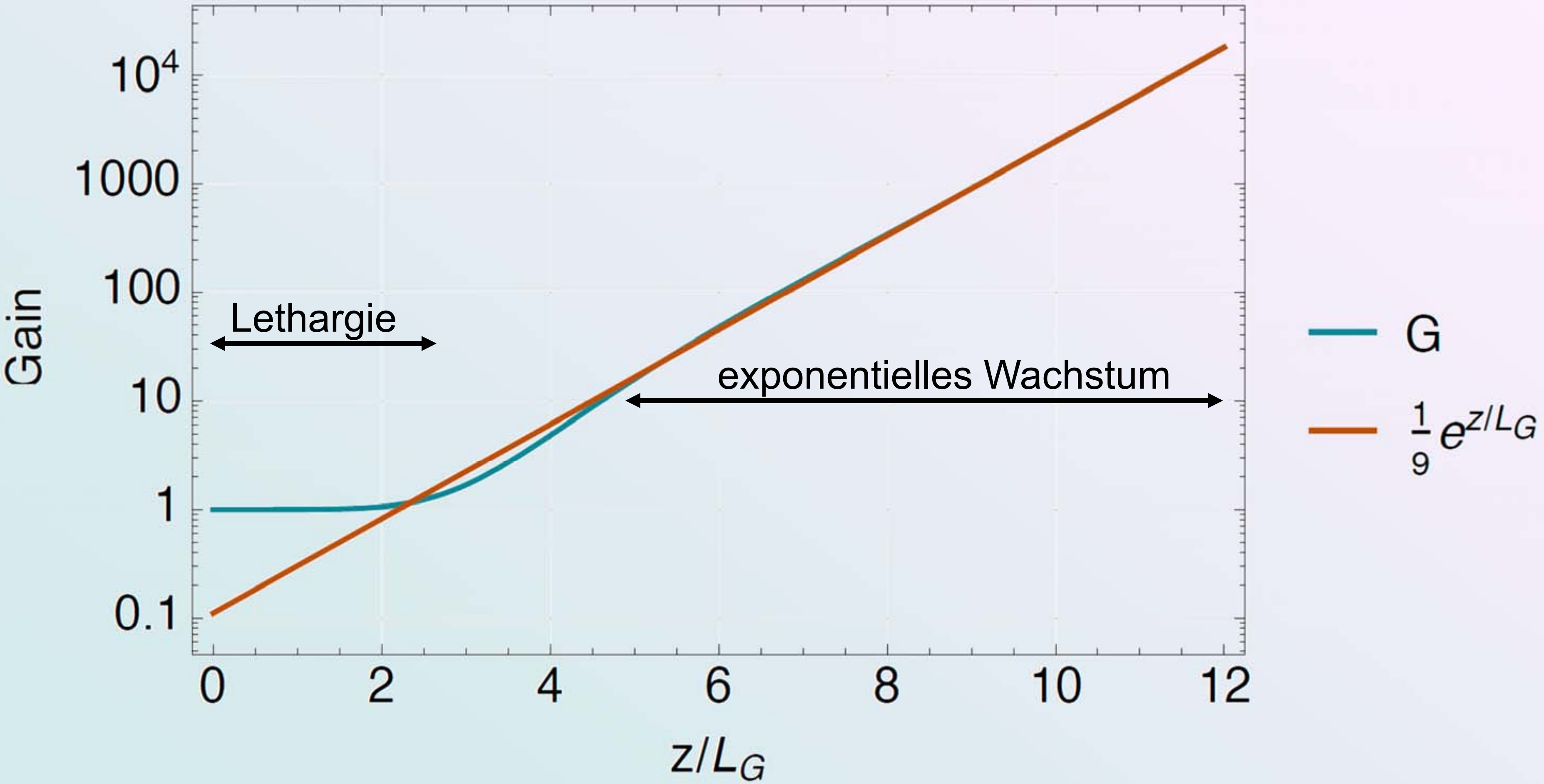
Verhalten für kleine s/L_G (Taylorentwicklung) $\leftrightarrow$ „**Lethargie**“

$$G_{\mathrm{leth}} = 1 + \frac{1}{1080}\left(\frac{s}{L_G}\right)^6 = 1 + \left(\frac{s}{3.2L_G}\right)^6$$

Universelle Verstärkungskurve

$$G(\hat{s}) = \frac{|a|^2}{a_0^2} = \frac{1}{9}\left\{3 + 2\cosh\chi + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\chi\right)\cosh\left(\frac{\chi}{2}\right)\right\}$$

$$\chi = \frac{s}{L_G}$$

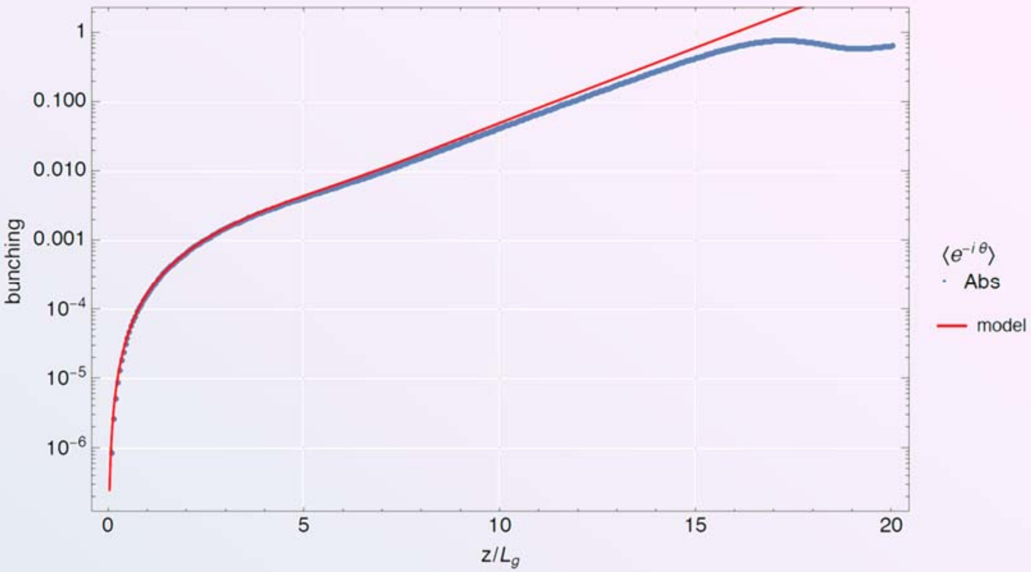


Sättigung

Gebiet exponentiellen Wachstums:

$$|a|^2 = |b|^2 = \frac{a_0^2}{9} e^{-z/L_g} < 1$$

→ Feldstärke kann nicht über $|a| = 1$ anwachsen:



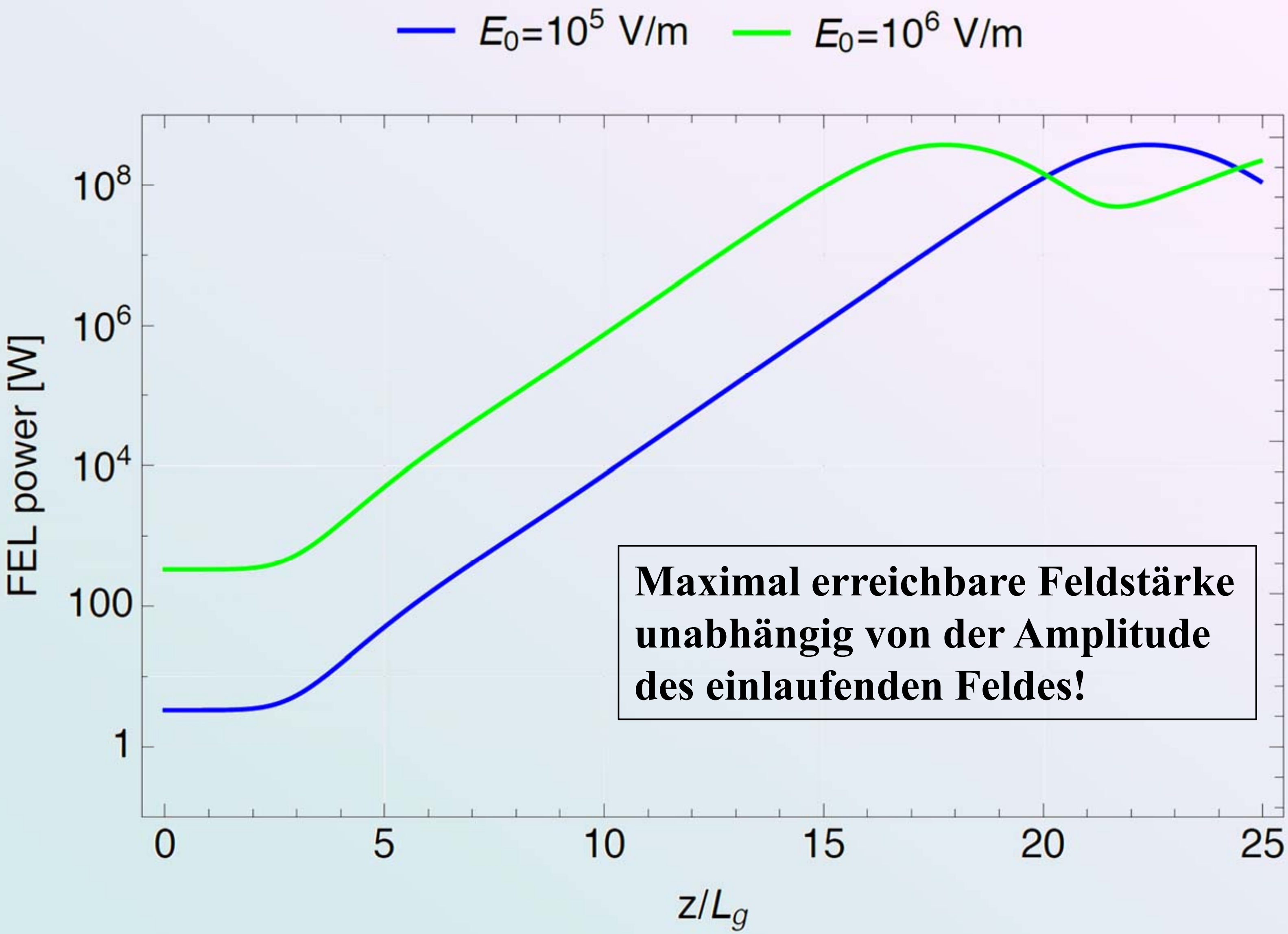
$$\tilde{E}_{\text{sat}} = \frac{2k_u \rho^2}{\kappa_1}$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{W}_{\text{sat}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = 2\varepsilon_0 \left|\tilde{E}\right|^2 = \rho n_e \gamma_r m c^2 = \rho \mathcal{W}_{\text{beam}}$$

und mit $P = \mathcal{W}cA = 2\pi\sigma^2 c\mathcal{W}$ sowie $I_{\text{beam}} = ecAn_e$, $\mathcal{W}_{\text{beam}} = en_e U_{\text{beam}}$

$$\boxed{P_{sat} = \rho \cdot I_{\text{beam}} \cdot U_{\text{beam}}}$$

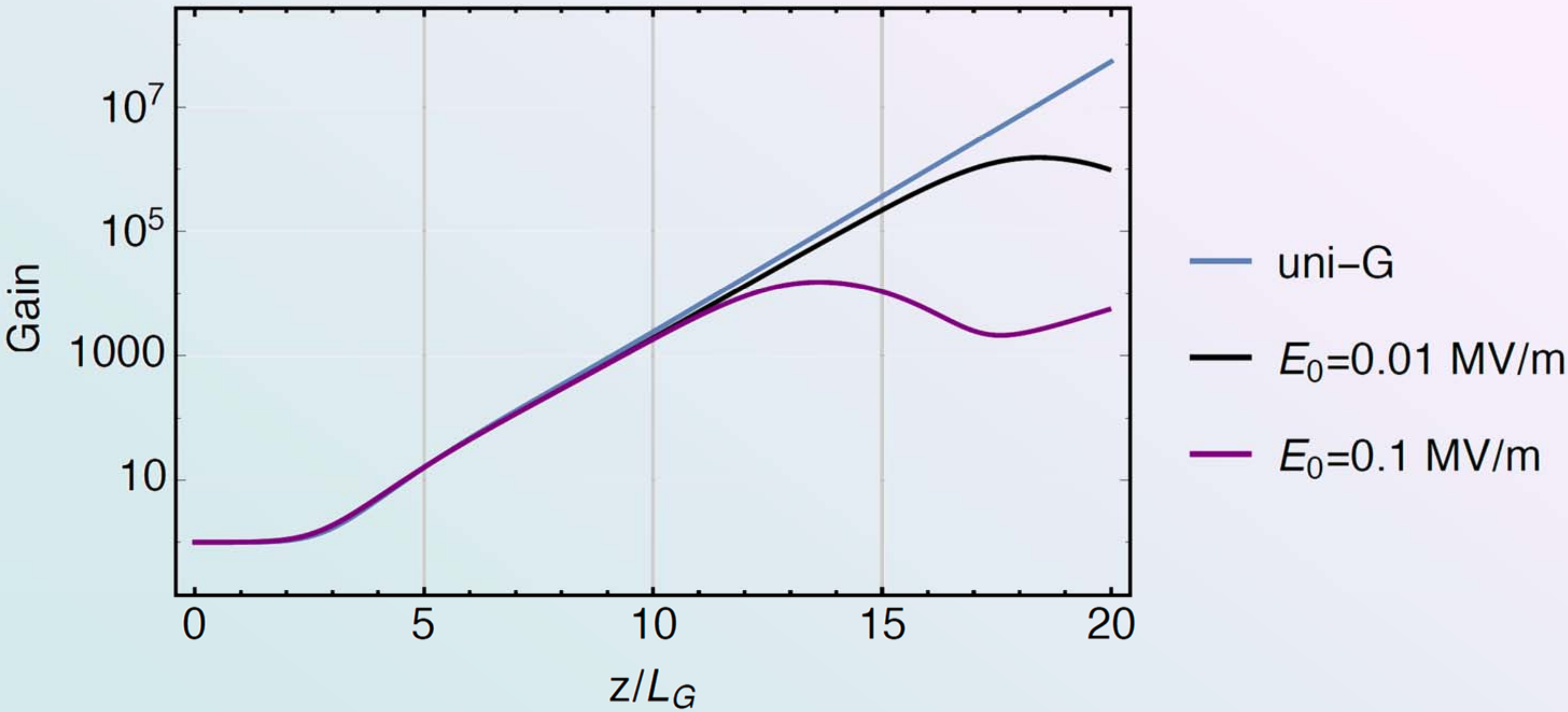
Sättigung



Maximal erreichbare Feldstärke unabhängig von der Amplitude des einlaufenden Feldes!

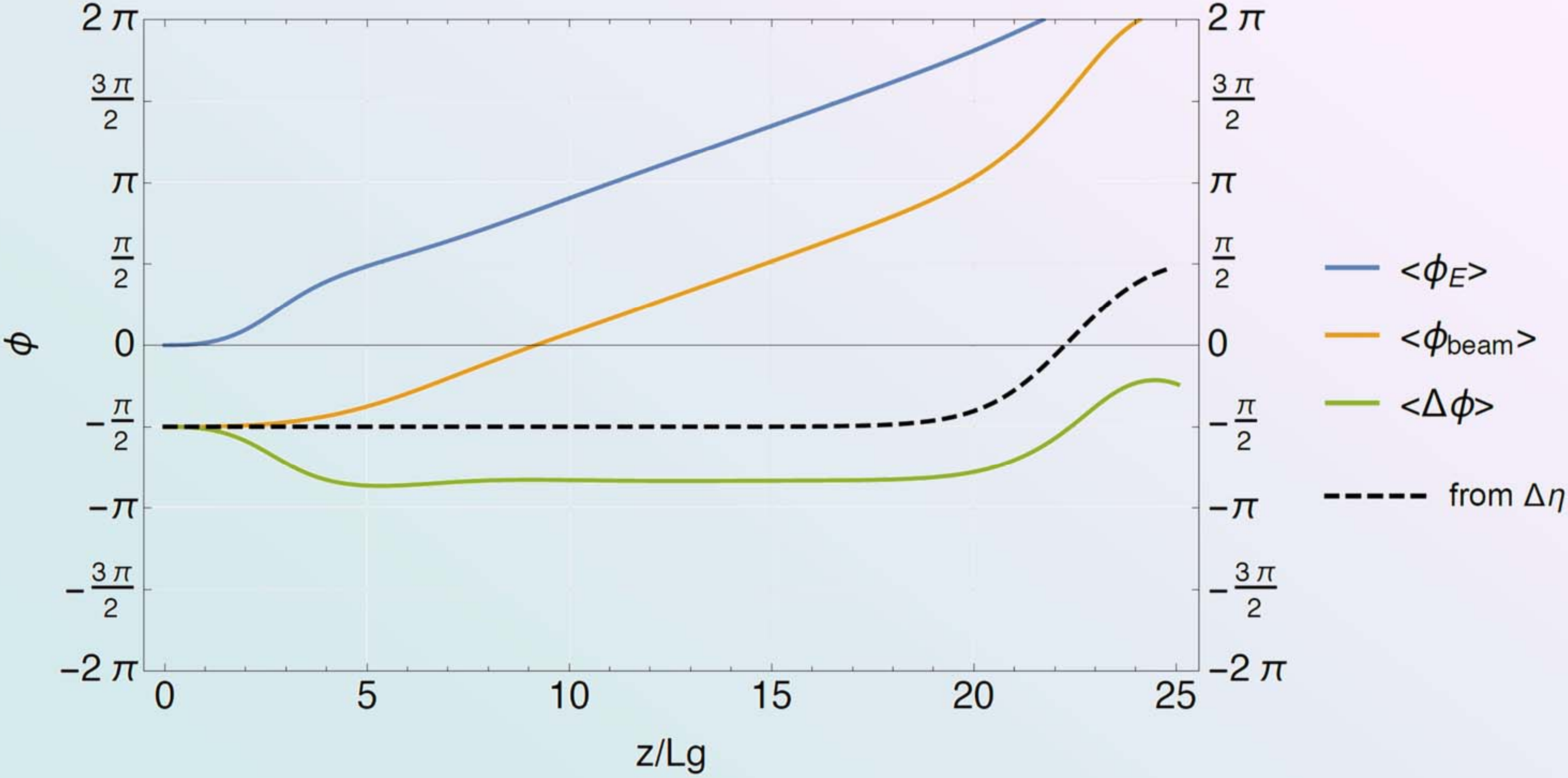
Sättigung

Maximal erreichbarer Verstärkungsfaktor abhängig von Amplitude des einlaufenden Feldes

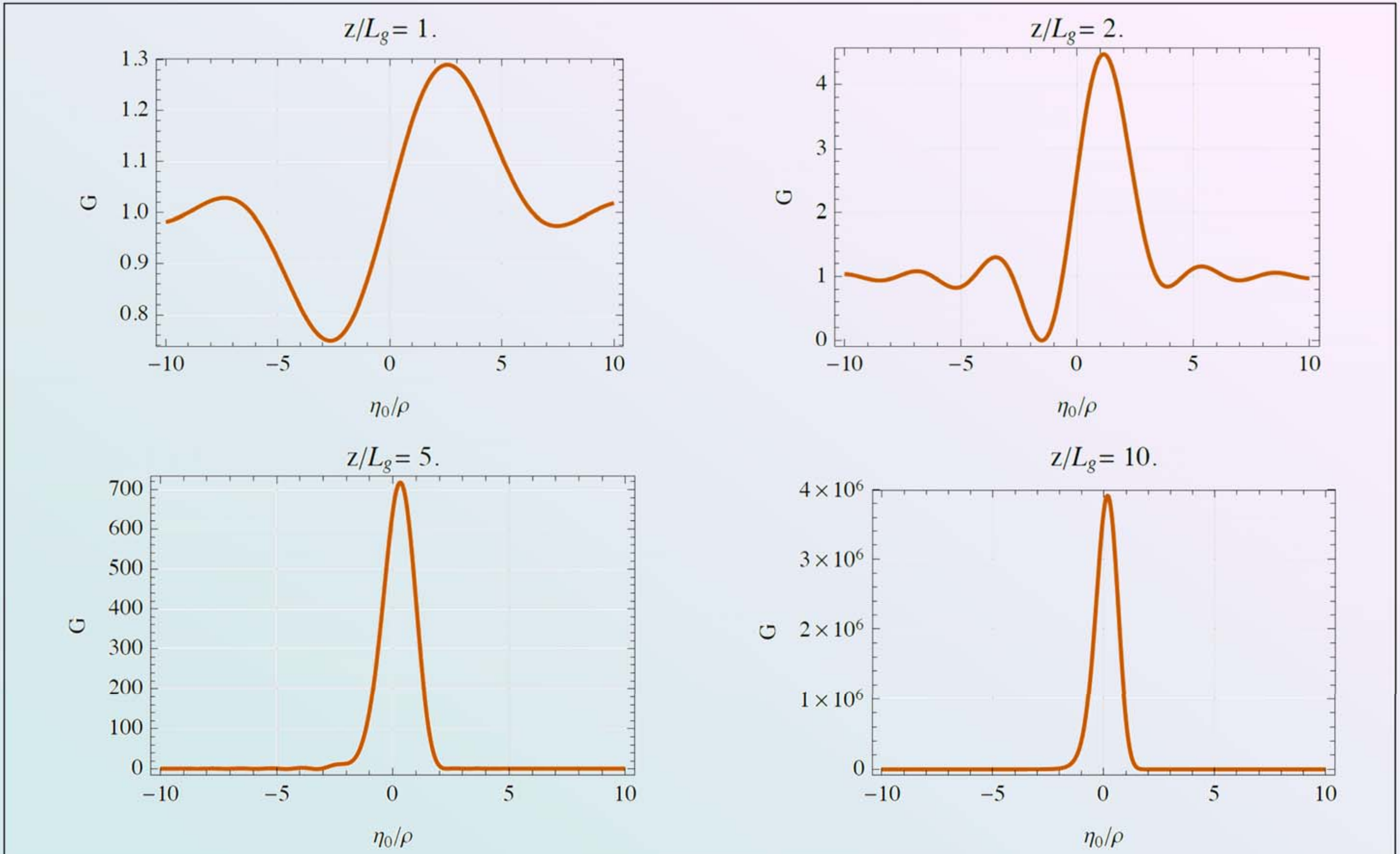


Phasenverlauf

Im Lethargiegebiet stellt sich die benötigte Phasenverschiebung zwischen Strahl und Feld ein!



Verstärkung und Bandbreite



Kubische Differentialgleichung

Fall 2: Anregung durch existierende Dichtemodulation

Anfangsbedingungen:

- Dichtemodulation $\rightarrow b_0 = \left\langle e^{-i\theta_j} \right\rangle\Big|_0$ bei $\lambda_m \approx \lambda_r$
- kein Energieoffset, aber -modulation! $\rightarrow \eta_0 = 0, \ \rightarrow P_0 = ib'\big|_0 = \hat{\eta}_0 b_0$
- Einlaufendes Strahlungsfeld $\rightarrow a_0 = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \quad C_1 = -i\frac{b_0}{3}, \quad C_2 = (-1)^{5/6}\frac{b_0}{3}, \quad C_3 = (-1)^{1/6}\frac{b_0}{3}}$$

für $\eta_0 = 0$

Feldenergie:

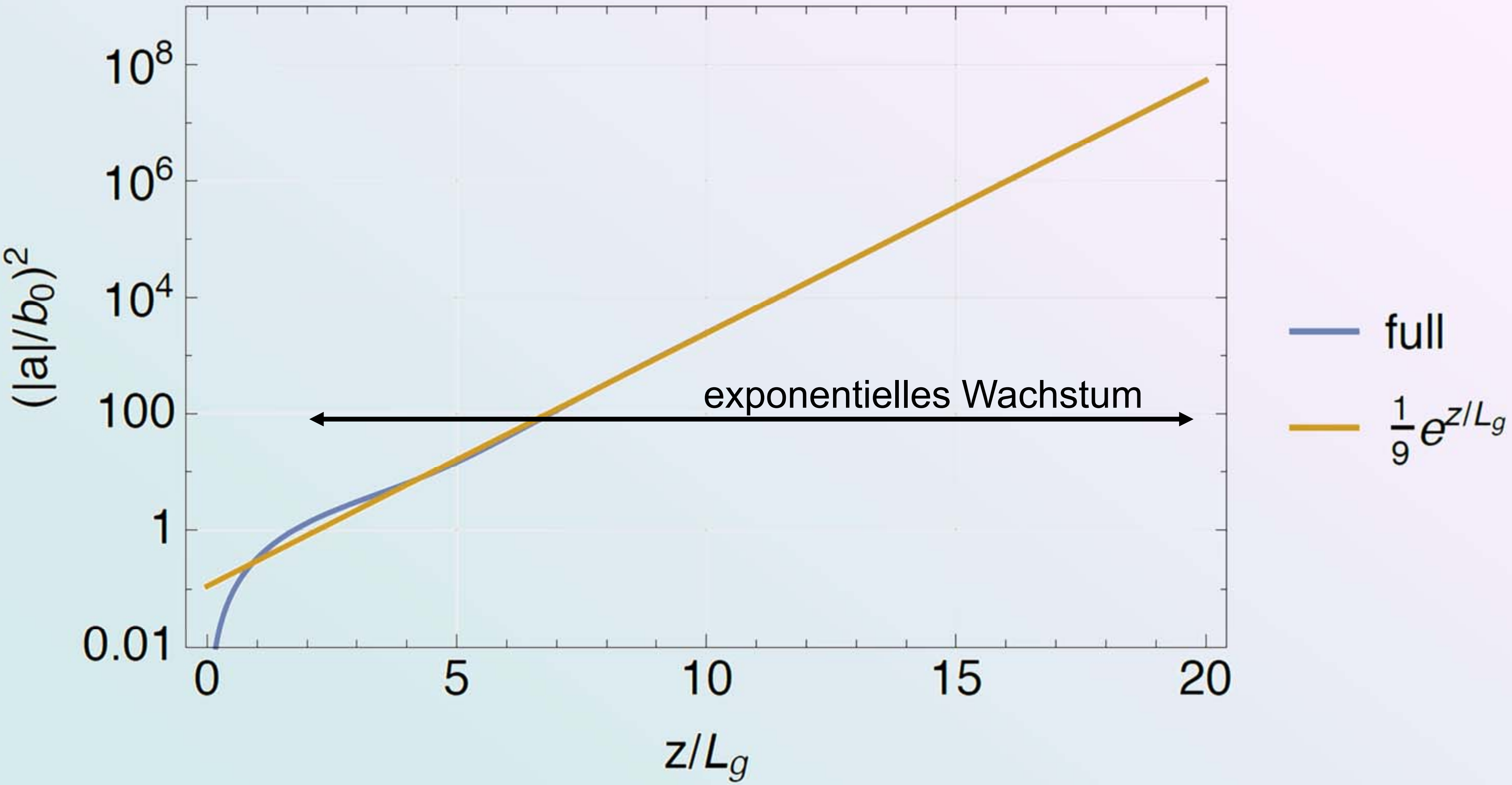
$$|a|^2 = \frac{2}{9} b_0^2 G(\chi), \qquad \chi = \frac{s}{L_g}$$

„Verstärkung“:

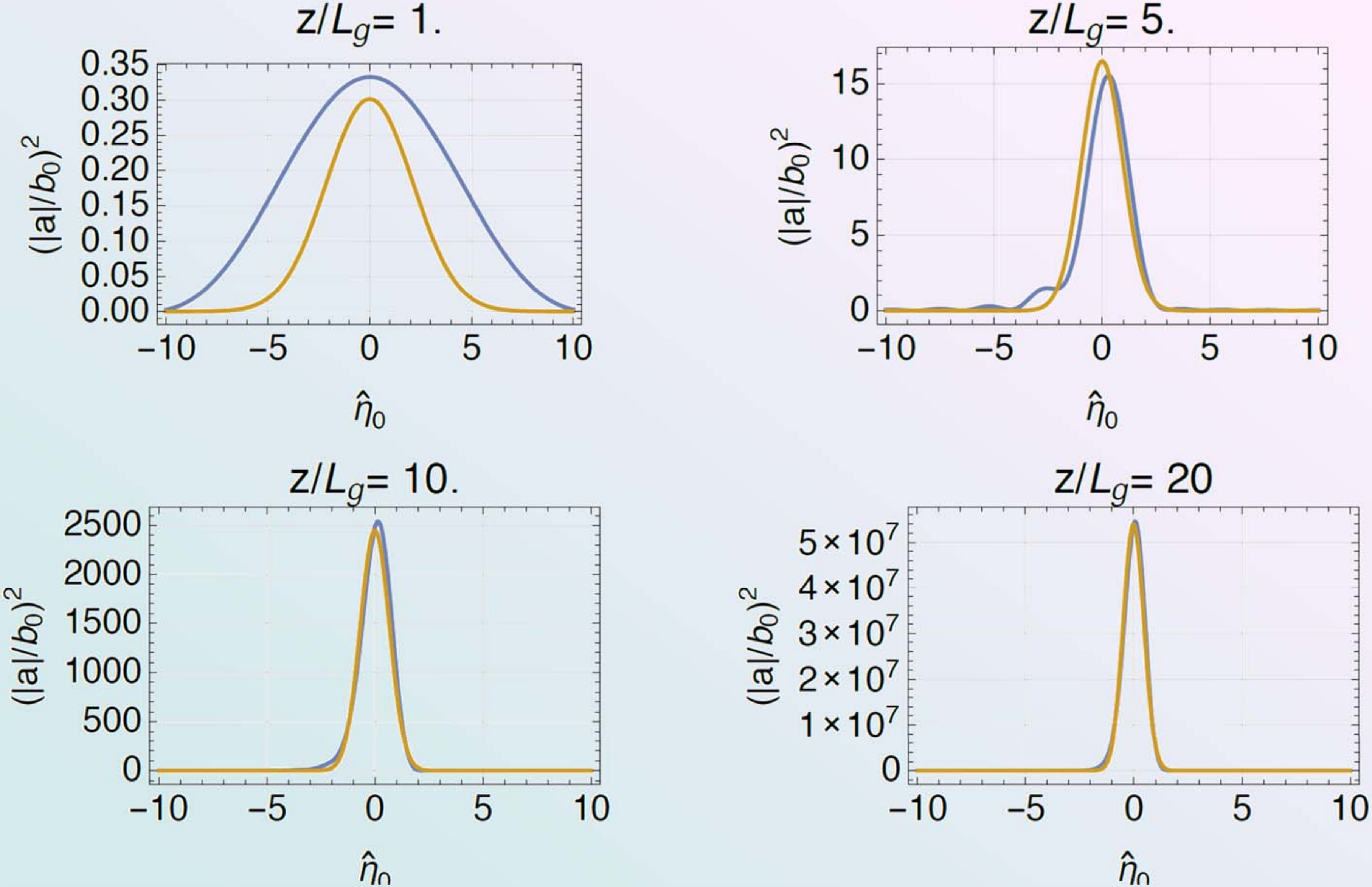
$$\boxed{G(\hat{s}) = \boxed{\cosh\chi} + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\chi\right)\sinh\left(\frac{1}{2}\chi\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\chi\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\chi\right)}$$

Universelle Verstärkungskurve

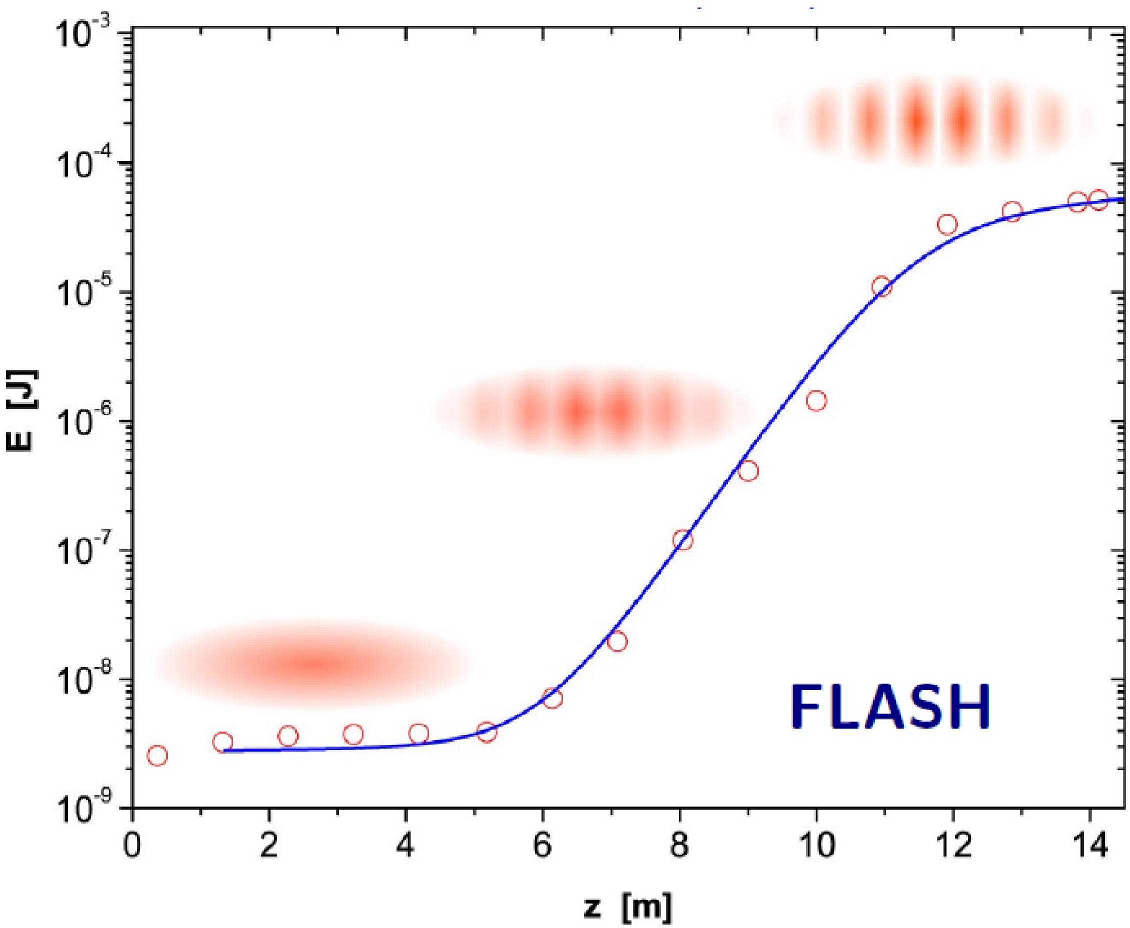
$$G(\hat{s}) = \cosh\chi + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\chi\right)\sinh\left(\frac{1}{2}\chi\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\chi\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\chi\right) \qquad \chi = \frac{s}{L_G}$$

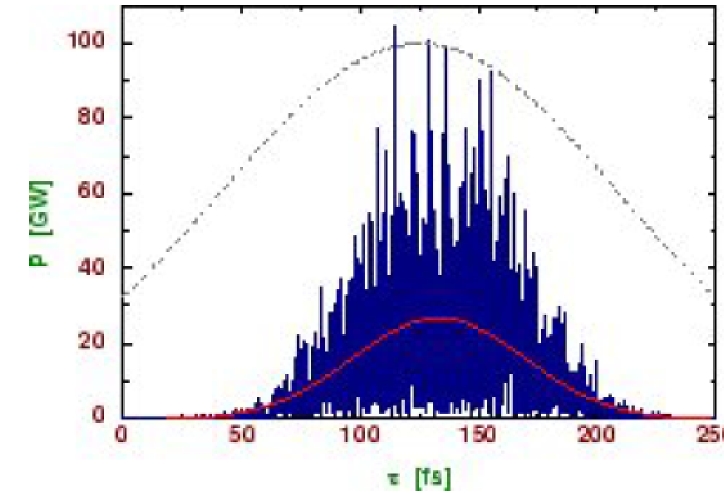


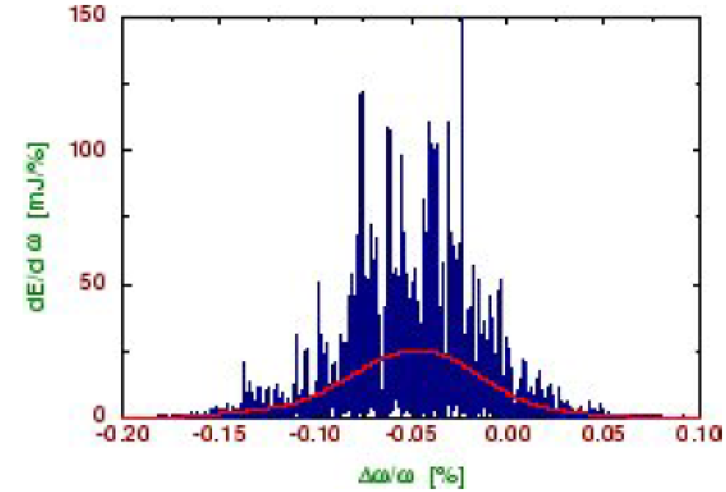
Verstärkung und Bandbreite

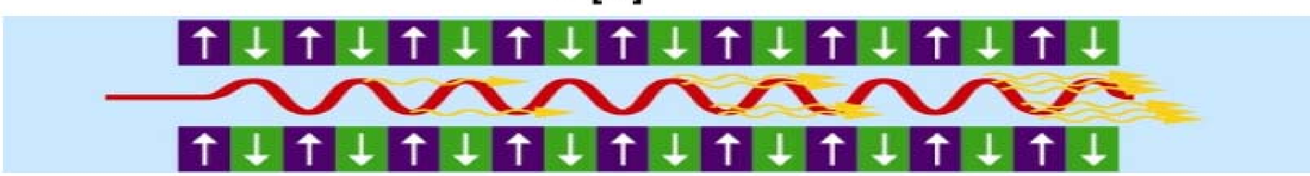


High-Gain SASE FEL









Low temporal coherence!