Lineare Transversale Optik

Bernhard Schmidt, Juni 2015

Dieses Dokument ist eine sehr kurzgefasste Einführung in der transversale Strahldynamik in linearer Näherung. Sie ist gedacht als Einstieg für die Diskussion nichtlinearer Resonanzen in Beschleunigerphysik-2, vor allem für Studenten die Beschleunigerphysik-1 nicht gehört haben.

Koordinaten

Wir betrachten die Bewegung der Teilchen in der transversalen Ebene (transversal zur longitudinalen Achse (s) der Sollbahn). Ihre Koordinaten werden als kleine Abweichungen zur Sollbahn in horizontaler (x) und vertikaler (y) Richtung beschrieben. Klein ist hierbei durch den lokalen Krümmungsradius der Bahn ρ definiert.
Als konjugierte Variablen benutzen wir $p_x / p_0 = \frac{dx}{ds} = x'$ und $p_y / p_0 = \frac{dy}{ds} = y'$, auch diese sind kleine Zahlen da die transversalen Impulse sehr viel kleiner als der longitudinale Impuls p_0 sind.
Ein Koordinatenpaar $\{x, x'\}$ bildet einen Punkt im horizontalen Phasenraum, analog dann für $\{y, y'\}$. (Das ist kein "echter" Phasenraum im Sinne der klassischen Mechanik, solange $p_0 = \text{const.}$ ist aber als solcher brauchbar).

Beschränkung der Magnetfelder

Magnetfelder werden eingeschränkt auf transversale Felder die maximal linear von den transversalen Koordinaten {x,y} abhängen.
Dies sind **Dipolfelder**, die nicht von den Koordinaten abhängen und **Quadrupolfelder**, die linear in x und y sind. Für einen "normalen" Quadrupol gilt

$$B_y = -g\,x \quad \text{und} \quad B_x = -g\,y \tag{1}$$

Die Wirkung der Felder auf den Strahl wird auf den Impuls und die Ladung normiert, als Parameter benutzen wir
für Dipole den inversen Krümmungsradius (Einheit 1/Meter)

$$1/\rho = (q/p_0)\,B_y \tag{2}$$

und für Quadrupole die Quadrupolstärke k (Einheit $1/\text{Meter}^2$)

$$k = -(q/p_0)\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = (q/p_0)\,g \tag{3}$$

Beide können in allgemeiner Form zu einer Konstanten

$$K(s) = \left(\frac{1}{\rho^2(s)} - k(s)\right) \tag{4}$$

zusammengefasst werden. Die Magnetfeldkonfiguration $K(s)$ hängt von der Position entlang der Sollbahn ab, Übergänge zwischen Bereichen mit unterschiedlichen K müssen so erfolgen, dass sie keinen Einfluss 1.Ordnung (linear von x oder y abhängig) haben.

Sextupolfelder können in der linearen Magnetoptik nicht behandelt werden. Wenn wir die Stärke des Sextupols mit C_s beschreiben, sind die Felder

$$B_y(x, y) \sim C_s/2\left(x^2 - y^2\right) \tag{5}$$

$$B_x(x, y) \sim C_s\,(x\,y) \tag{6}$$

Der Feld des Sextupols wächst quadratisch mit dem Abstand von der Sollbahn und es führt zu einer Kopplung der Koordinaten. Die Auswirkung eines solchen Feldes als “kleine Störung” wird weiter unten studiert.

Das magnetische Potential

Da wir im Vakuum sowohl rot $B = 0$ als auch div $B = 0$ erfüllen, können die Magnetfelder als Gradient eines skalaren Potentials $V(x, y)$ dargestellt werden.

$$B_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ und } B_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{7}$$

Für den (normale) Quadrupol hat man zum Beispiel $V_Q = g\,x\,y$. Für den Sextupol findet man (mit obiger Notation)

$$V_s \sim C_s\left(y^3 - 3\,x^2\,y\right)$$

Allgemein enthalten die magnetischen Potentiale eines 2n - Pols Potenzen der Koordinaten bis zur Ordnung n.

Bewegungsgleichung der linearen Optik

Die lineare Bewegungsgleichung in ihrer allgemeinsten Form für Teilchen ohne Impulsabweichung ($p = p_0$) lautet dann:

$$x''[s] + K[s]\,x[s] = 0 \tag{8}$$

und analog für y(s). Im folgenden wird alles nur für eine Koordinate geschrieben, es gilt analog ebenso für die andere.

Diese Bewegungsgleichung kann aus einer Hamiltonfunktion

$$H(x, x', s) = \frac{1}{2}\left((x')^2 + K(s)\,x^2\right) \tag{9}$$

gewonnen werden. Sie hat allerdings den Nachteil, dass sie von s, d.h. der “pseudo-Zeit” abhängt.

```
eq = x''[s] + K[s] * x[s] == 0
```

```
K[s] x[s] + x''[s] == 0
```

Die Bewegungsgleichung wäre die eines einfachen harmonischen Oszillators, wenn K[s] = const. wäre.
Es gibt hier zunächst KEINE Einschränkung dass K[s] eine periodische Funktion sein muss.
Die Lösungen dieser Gleichung werden **"Betatron-Schwingungen"** genannt.

Wir machen probeweise den Ansatz einer Schwingung mit ortsabhängiger Amplitudenfunktion und freier Phasenfunktion ψ[s]. (Anmerkung : für konstantes K ist die Lösung bekanntermaßen eine harmonische Schwingunge, d.h. β[s] = c_1 und ψ[s] = c_2 * s mit c_n zwei Konstanten.)
Die beiden für deine DG benötigten Anfangsbedingungen, die das individuelle Teilchen charakterisieren, stecken und den Konstanten a und ψ_0 während die Funktionen **β[s] und ψ[s] für alle**

Teilchen gleich sind.

$$x[s] = a\sqrt{\beta[s]}\ \mathrm{Cos}[\psi[s] + \psi_0] \tag{10}$$

und setzte in die Gleichung ein

```
xpar[s_]  = a * √β[s] Cos[ψ[s] + ψ0]
```

$a\,\mathrm{Cos}[\psi_0 + \psi[s]]\,\sqrt{\beta[s]}$

```
eqpar = eq /. x → Function[s, xpar[s]] // Simplify
```

$$\frac{1}{\sqrt{\beta[s]}} a\left(4\,\mathrm{Cos}[\psi_0 + \psi[s]]\,K[s]\,\beta[s]^2 - \mathrm{Cos}[\psi_0 + \psi[s]]\,\beta'[s]^2 - 4\,\mathrm{Sin}[\psi_0 + \psi[s]]\,\beta[s]\,\beta'[s]\,\psi'[s] + 2\,\beta[s]\left(\mathrm{Cos}[\psi_0 + \psi[s]]\,\beta''[s] - 2\,\beta[s]\left(\mathrm{Cos}[\psi_0 + \psi[s]]\,\psi'[s]^2 + \mathrm{Sin}[\psi_0 + \psi[s]]\,\psi''[s]\right)\right)\right) == 0$$

Wir erhalten eine Gleichung die zwei Beiträge linear in Sin und Cos enthält

```
Collect[eqpar, _Sin | _Cos]
```

$$\frac{a\,\mathrm{Cos}[\psi_0 + \psi[s]]\left(4\,K[s]\,\beta[s]^2 - \beta'[s]^2 - 4\,\beta[s]^2\,\psi'[s]^2 + 2\,\beta[s]\,\beta''[s]\right)}{\sqrt{\beta[s]}} + \frac{a\,\mathrm{Sin}[\psi_0 + \psi[s]]\left(-4\,\beta[s]\,\beta'[s]\,\psi'[s] - 4\,\beta[s]^2\,\psi''[s]\right)}{\sqrt{\beta[s]}} == 0$$

Da die Gleichung für alle ψ_0 erfüllt sein soll, müssen beide Summanden einzeln = 0 sein. Wir betrachten hier nur den Sin() Term, in dem die explizite Form der Magnetfelder (das K[s]) nicht vorkommt. Damit liefert er einen **allgemeinen** Zusammenhang. Wir lassen durch geschickte Wahl des ψ_0 den Cos() Summanden verschwinden :

```
eqparsin = eqpar /. ψ[s] → π/2 - ψ0 // Simplify
```

$a\sqrt{\beta[s]}\,(\beta'[s]\,\psi'[s] + \beta[s]\,\psi''[s]) == 0$

Wenn wir die triviale Lösung (a = 0 oder $\sqrt{\beta(s)}$ = 0) ausschliesen, können wir den Rest integrieren :

```
ds1 = DSolve[(β'[s] ψ'[s] + β[s] ψ''[s]) == 0, ψ[s], s] // Flatten
```

$$\left\{\psi[s] \to C[2] + \int_1^s \frac{C[1]}{\beta[K[1]]}\,dK[1]\right\}$$

Wir haben dann einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Phasenvorschub $\psi(s)$ und β-Funktion gefunden:

$$\psi(s_2) = \psi(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{\beta(s)}\,ds \tag{11}$$

oder

$$\psi'(s) = 1/\beta(s) \tag{12}$$

```
ψprule = ψ'[s] → 1 / β[s]
```

$$\psi'[s] \to \frac{1}{\beta[s]}$$

Dies folgt zwingend aus der Form der Bewegungsgleichung und dem gewählten Ansatz.

Die cos-Gleichung führt auf eine DGL für β(s) (oder besser für $\sqrt{\beta(s)}$) die explizit K(s) enthält, sie hat daher keine allgemeine analytische Lösung.

Die Lösung

$$x[s] = a\sqrt{\beta[s]}\ \mathrm{Cos}[\psi[s] + \psi_0] \tag{13}$$

stellt eine Schwingung mit ortsabhängiger Amplitudenfunktion $\sqrt{\beta(s)}$ UND ortsabhängiger "Wellenzahl" $k_\beta = \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\beta(s)}$ dar, sofern die **Betafunktion** β(s) eine reelle, positive Funktion ist.

(Wann und für welche $K(s)$ das erfüllt ist wird in BP-1 ausführlich diskutiert).

Die Ellipse im Phasenraum

Unsere Lösung liefert für x' (s) unmittelbar

```
xpar'[s] // Simplify
```

$$\frac{a\left(\mathrm{Cos}[\psi_0+\psi[s]]\,\beta'[s]-2\,\mathrm{Sin}[\psi_0+\psi[s]]\,\beta[s]\,\psi'[s]\right)}{2\sqrt{\beta[s]}}$$

$$x'[s]=\frac{a\,(\mathrm{Cos}[\psi_0+\psi[s]]\,\beta'[s]-2\,\mathrm{Sin}[\psi_0+\psi[s]]\,\beta[s]\,\psi'[s])}{2\sqrt{\beta[s]}} \tag{14}$$

Verwenden wir das Ergebnis für $\psi'(s)=1/\beta(s)$ und nennen zusätzlich $\beta'[s]=-2\,\alpha[s]$ wird daraus

```
xpar'[s] /. β'[s] → - 2 α[s] /. ψ'[s] → 1 / β[s] // Simplify
```

$$-\frac{a\left(\mathrm{Sin}[\psi_0+\psi[s]]+\mathrm{Cos}[\psi_0+\psi[s]]\,\alpha[s]\right)}{\sqrt{\beta[s]}}$$

$$x'[s]=-\frac{a}{\sqrt{\beta[s]}}\,(\mathrm{Sin}[\psi_0+\psi[s]]+\alpha[s]\,\mathrm{Cos}[\psi_0+\psi[s]]) \tag{15}$$

Das Paar {x(s),x'(s)} ist die **Parameterdarstellung einer gedrehten Ellipse**, d.h. die Halbachsen fallen für $\alpha \neq 0$ nicht mit den Koordinatenachsen zusammen.

Wir können uns davon überzeugen, dass $1/\beta\,(x^2+(\alpha x+\beta x')^2)=a^2$, d.h. unabhängig von s eine **Konstante der Bewegung** ist.

```
1 / β[s] (xpar[s]^2 + (α[s] xpar[s] + β[s] xpar'[s])^2) /. β'[s] → - 2 α[s] /.
  ψ'[s] → 1 / β[s] // Simplify
```

a^2

Die Fläche der Phasenraumellipse ist gleich $E=\pi\,a^2$ ist somit eine Konstante der Bewegung für jedes einezelne Teilchen. Längs des Beschleunigers ändert sich zwar $K(s)$ und damit auch die Ellipsenparameter $\beta(s)$ und $\alpha(s)$, die Fläche bleibt jedoch invariant.
Mit der Definition von $\gamma=(1+\alpha^2)/\beta$ kommt man dann zur “Courant-Snyder-Invarianten” (CSI) Darstellung.

$$x^2\,\gamma-2\,x\,x'\,\alpha+x'^2\,\beta=a^2 \tag{16}$$

Die Parameter α,β,γ werden üblicherweise **"Twiss-Parameter"** genannt (Richard Twiss, 1020 - 2005, Britischer Physiker und Astronom).

Diese fundamentale Gleichung können wir noch in eine andere nützliche Form, in die einer Matrix-gleichung, bringen indem wir die Koordinaten des Phasenraumpunktes als Vektor schreiben

$$\tilde{u}=\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \tag{17}$$

und die "Twiss Parameter" als **β - Matrix** zusammenfassen

$$\Sigma_\beta=\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \tag{18}$$

Die Gleichung (16) kann dann auch geschrieben werden als

$$a^2 = \tilde{u}^T \Sigma_\beta^{-1} \tilde{u} \tag{19}$$

Die Determinante dieser β-Matrix ist gleich 1. (Wichtig !)

Die Magnetoptik, d.h. die Abfolge der linearen transversalen Magnetfelder längst der Teilchenbahn (B=0, Dipol oder Quadrupol) definiert eindeutig wie sich die Twissparameter entlang der Sollbahn (des "Orbits") entwickeln. (Wie man das im Detail berechnet lernt man in BP-1). Hat man sie an einer Stelle "festgelegt" (wie auch immer), sind sie an jeder anderen Stelle bekannt.

Die Teilchenbewegung in der (linearen) Magnetfeldkonfiguration kann also aufgespalten werden in zwei Komponenten :
- die Veränderung von β, α und γ entlang s , d.h. durch die Twissparameter an jeder Stelle der Maschine. Dabei ist nur die Fläche der Ellipse eine durch das individuelle Teilchen bestimmte Größe, Halbachsenlage und Halbachsenverhältnis werden durch die Magnetoptik bestimmt.
- die Änderung der Betatronphase ψ(s) enlang s. Auch hier ist nur die Anfangsphase ψ_o ein freier Parameter, die Phasengeschwindigkeit ψ' ist durch Gl. (12) wieder durch die Magnetoptik bestimmt.
Diese Aufspaltung der (komplizierten) Teilchenbewegung ist äußerst hilfreich da es uns üblicherweise nicht auf ein Teilchen sondern auf das Verhalten des ganzen Strahls ankommt, d.h. ein **Ensemble von sehr vielen Teilchen** die sich durch die gleiche Magnetoptik bewegen.

Der Strahl

Der Strahl, d.h. das Ensemble der Strahlteilchen, ist beschrieben durch die Verteilung deren Phasenraumpunkte {x,x'}. Wie diese aussieht ist zunächst irrelevant. Wir fassen die gesamte Verteilung jetzt zusammen und beschreiben sie durch ihre **Momente.**
Die 1. Momente sind die **Mittelwerte** <x> und <x'>. Wir nehmen an, dass der Strahl ordentlich zentriert ist und im Mittel entlang des Sollorbit geht, d.h. <x>=0 und <x'>=0.
Bleiben die **2. Momenten**, davon gibt es drei: die Varianz in x, die Varianz in x' und die Korrelation r zwischen x und x':

$$(\sigma_x)^2 = \langle x^2 \rangle \qquad (\sigma_{x'})^2 = \langle x'^2 \rangle \qquad r = \langle u\, u' \rangle \tag{20}$$

Diese zusammen beschreiben die **"Kovarianzmatrix" des Strahls, oder auch die Strahlmatrix** genannt :

$$\Sigma_{\text{beam}} = \begin{pmatrix} \sigma_u{}^2 & -r \\ -r & \sigma_{u'}{}^2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Auch diese Matrix beschreibt eine Ellipse im Phasenraum, die Kovarianzellipse. Ihre Fläche ist gleich

$$B = \pi \epsilon = \sqrt{\text{Det}(\Sigma_{\text{beam}})} = \sqrt{\sigma_x{}^2 \sigma_{x'}{}^2 - r^2} \tag{22}$$

Die Größe ϵ nennt man die **Emittanz des Strahls**, das ist *die* kanonische Zahl zur Beschreibung der Strahlqualität.

Jetzt kommt der große Trick: **wenn** (!) die Strahlmatrix sich nur um einen Faktor von der β-Matrix unterscheidet, wenn also

$$\Sigma_{\text{beam}} = \epsilon \Sigma_\beta = \epsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \tag{23}$$

ist, **dann** verhält sich die Strahlmatrix entlang des Orbit genauso wie die β-Matrix und deren Verhalten kann man, wie oben gesagt, aus der Abfolge der Magnetfelder berechnen. Einen solchen Strahl

nennt man "angepassten Strahl" oder "matched beam" und das ist was man im allgemeinen anstrebt. Die **Emittanz** ist, ebenso wie die Courant-Snyder Invariante, eine **Erhaltungsgröße** bei der Teilchenbewegung.
Das gilt, solange Gl. (8) gültig ist, d.h. solange keine "Dämpfungsterme" (proportional zu x') in der Differentialgleichung auftreten.

Für einen solchen angepassten Strahl liest man sofort ab, daß sich die Breite des Strahls (seine Einhüllende) als

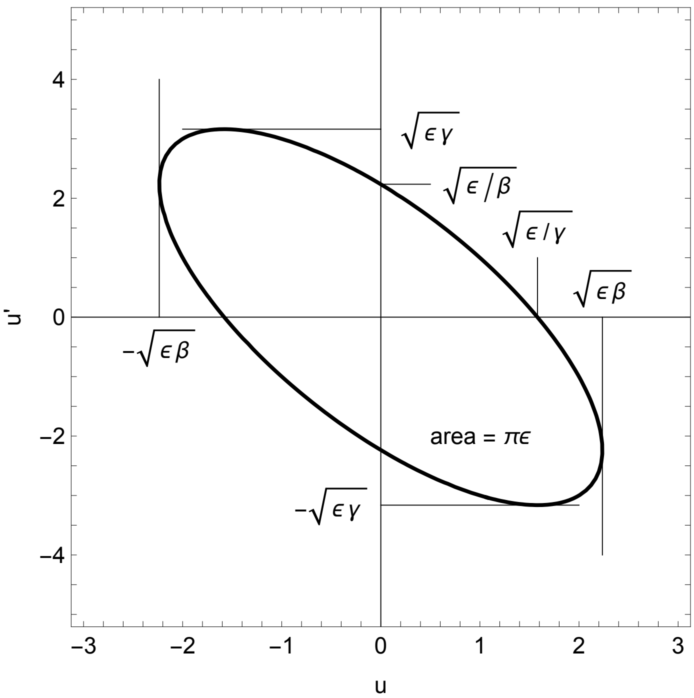
$$\sigma_x(s) = \sqrt{\epsilon\,\beta(s)} \tag{24}$$

darstellt, die Divergenz an jeder Stelle ist durch

$$\sigma_x{}'(s) = \sqrt{\epsilon\,\gamma(s)} \tag{25}$$

gegeben.

Allgemein sieht die Strahlellipse (Kovarianzellipse) im Phasenraum so aus :



Für $\alpha = 0$ fallen die Hauptachsen der Ellipse mit den Koordinatenachsen zusammen, wegen $\beta'[s] = -2\,\alpha[s]$ ist dies immer am Ort einer Strahltaille (Minimum der Einhüllenden) oder einem Strahlbauch (Maximum der Einhüllenden) der Fall.
Ein konvergenter Strahl hat ein positives α, ein divergenter Strahl ein negatives α.

Wie oben gesagt bestimmt im allgemeinen Fall die Magnetoptik die Veränderung der Twiss-Parameter mit s, Startwerte muss man irgendwie festlegen. Bei einem Linearbeschleuniger macht man das beispielsweise an der Teilchenquelle. Dort werden die Teilchen mit einer bestimmten transversalen Breite σ_x und Divergenz $\sigma_{x'}$ erzeugt, Korrelation hat man üblicherweise nicht, d.h. $r = 0$.
Dann bestimmt

$$\epsilon = 1/\pi\ \sigma_x\,\sigma_{x'} \tag{26}$$

die Emittanz des Stahls und die Twiss Parameter an dieser Stelle sind durch

$$\beta_0 = \sigma_x{}^2/\epsilon \quad \gamma_0 = \sigma_{x'}{}^2/\epsilon \quad \alpha = 0 \tag{27}$$

festgelegt.

Diese "transportieren" sich dann durch die gesamte Magnetoptik. Möchte man an einer Stelle ganz bestimmte Strahlparameter haben, so muss man die Optik davor so auslegen oder anpassen, dass eben diese erreicht werden. (Diesen Vorgang nennt man "matching").
In einem Kreisbeschleuniger sieht die Welt allerdings etwas anders aus ...

Der Spezialfall : die Magnetfeldkonfiguration ist periodisch

Kreisbeschleuniger sind per Definition eine **periodische Magnetanordnung** mit der Periodenlänge C , der Bahnlänge der Sollbahn.
In diesem Fall hat Herr Gaston Floquet im 19. Jahrhundert bewiesen, dass es eine ***β(s)* ebenfalls periodische Funktion** gibt, d.h. ein β(s) das eine eindeutige Funktion der Position s entlang des Kreisbeschleunigers ist.
In diesem Fall, und nur in diesem Fall, heißt die Gleichung (8) "Hillsche Differentialgleichung" nach einem bedeutenden US-Amerikanischen Astronomen des 19./20. Jahrhunderts , George William Hill, 1838 - 1914 (harmonischer Oszillator mit periodischen Parametern, wichtig für die Planetenbewegung).

Die Funktion ψ(s) ist allerdings im Normalfall NICHT periodisch, d.h. es gilt

$$\psi(s+C) = 2\pi Q \quad \text{mit} \quad Q \notin \mathbb{N} \tag{28}$$

Die Größe ***Q* wird der “tune”** des Kreisbeschleunigers genannt, er berschreibt die Anzahl der Betatronschwingungen pro Umlauf, $\mu = 2\pi Q$ ist der Phasenvorschub pro Umlauf.

Im Fall des Kreisbeschleunigers gibt es also einen "angepassten" Strahl für den die Strahlparameter entlang des Orbits zeitunabhängig sind, die Strahleinhüllende ist eine zeitunabhängige periodische Funktion von s.
Achtung : dies betrifft das Ensemble der Teilchen ! Die Bewegung der einzelnen Teilchen ist für $Q \notin \mathbb{N}$ *nicht* periodisch und sollte dies tunlichst auch nicht sein.
Zwischen "Geburt" des Strahls (also der Teilchenquelle) und dem Eintritt in den Kreisbeschleuniger muss man durch eine geeignete "Injektionsoptik" dafür sorgen, dass er (der Strahl) mit den richtigen, den "matched" Twiss-Parametern in den Kreis (die periodische Struktur) eintritt.

Teilchen mit Impulsabweichung

Nicht alle Teilchen haben den idealen Sollimpuls p_0, wir beschreiben das durch die relative Impulsabweichung

$$\delta_p = \frac{p - p_0}{p_0} \tag{29}$$

In der Näherung dass $\delta_p << 1$ ist wird dann aus der homogenen Gleichung (8) eine inhomogene Gleichung

$$x'' + K(s)\, x = \frac{\delta_p}{\rho(s)} \tag{30}$$

wobei ρ(s) der Krümmungsradius der Bahn an der Stelle s ist.
Die Lösung dieser Gleichung findet man als Summe der bereits bekannten Lösung der homogenen Gleichung die wir x_β nennen (das ist die ungestörte Betatronschwingung) plus eine zusätzliche Abweichung x_D(s).

$$x(s) = x_\beta(s) + x_D(s) \tag{31}$$

Da x_D(s) für $\delta_p << 1$ linear mit δ_p skaliert schreiben wir

$$x_D(s) = D(s)\ \delta_p$$
$$x_D'(s) = D'(s)\ \delta_p \tag{32}$$

und nennen $D(s)$ die **"Dispersionsbahn"**. Teilchen mit Impulsabweichung machen also Betatronschwingungen nicht um den Referenzorbit sondern um die mit ($\delta_p$skalierte) Dispersionsbahn. Ursache für die "Dispersion" sind immer die Dipolmagnete (also die Ablenkmagnete) da Quadrupole in erster Ordnung (!) keinen impulsabhängigen Einfluss auf die Lage der Dispersionsbahn haben. (Eine Impulsabweichung hat aber sehr wohl einen Einfluss auf die Quadrupolstärke, d.h. auf die Fokussierwirkung, d.h. die Twissparameter, vor allem der Tune bei Kreisbeschleunigern, ändern sich. Das nennt man dann "Chromatizität").

In Linearbeschleunigern gilt für D und D' das Gleiche wie für die Twiss-Parameter, nur die *Änderung* mit s ist durch die Magnetoptik definiert.
In Kreisbeschleunigern gibt es durch die periodischen Randbedingungen auch hier wieder eine besondere, die **periodische Dispersionsfunktion η(s) und η'(s)**.
Man kann diese klarerweise aus der Abfolge der Magnetoptik (Matrizen) berechnen (siehe Skript) oder, wenn man die Twiss-Parameter schon kennt, auch in dieser eleganten Integraldarstellung :

$$\eta(s_0) = \frac{\sqrt{\beta(s_0)}}{2\,\mathrm{Sin}[\pi\, Q]} \oint \frac{\sqrt{\beta(s)}}{\rho}\,\mathrm{Cos}\left(\,|\,\psi(s) - \psi(s_0)\,|\, - \pi\, Q\right) \mathrm{ds} \tag{33}$$

Das Integral führt dabei von der Stelle s_0 um den gesamten Ring herum wieder an diese Stelle.
Man sieht : es tragen nur Bereiche zum Integral bei in denen ρ (der Krümmungsradius) endlich ist, d.h. keine geraden Abschnitte, d.h. Abschnitte ausserhalb von Dipolmagneten.
Man sieht auch daß der Tune der Maschine Q möglichst keine ganze Zahl sein sollte da sonst die Dispersion divergiert.