Übungen zur Einführung in die Quanteninformationsverarbeitung – Blatt 06
Sommersemester 2018 [1]

Abgabetermin Montag, 28. Mai 2018, vor Vorlesung

SCHRÖDINGER KATZE

Wenn $|\psi_a\rangle$ und $|\psi_b\rangle$ mögliche Zustände eines quantenmechanischen Systems sind, so ist auch die Überlagerung $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_a\rangle+|\psi_b\rangle)$ ein möglicher Zustand. Dieses Superpositionsprinzip ist essentiell, um Interferenzphänomene zu sehen. Wendet man es jedoch auf "große" Objekte an, so führt es z. B. zu der klassisch widersprüchlichen Aussage, dass das Objekt sich in zwei Zuständen respektive an zwei Orten gleichzeitig befinden kann. Das berühmteste Beispiel ist Schrödingers Katze, die sich in einer Überlagerung aus "$|\text{tot}\rangle$" und "$|\text{lebendig}\rangle$" befindet.

In diesem Übungsblatt werden Sie sehen, dass man die Überlagerung von makroskopischen Objekten in der Praxis nicht detektieren kann. Anders ist dies jedoch bei Experimenten mit Ionen mit relativ kleinem α [zur Definition siehe Gleichung (1)], bei denen sich ein solcher Zustand nachweisen ließ [siehe Monroe *et al.*, Science **272**, 1131 (1996)]. Makroskopische Überlagerungen sind extrem fragil und schon geringste Kopplung an die Umgebung kann sie zerstören. Wir werden auf dieses Phänomen im Zusammenhang mit Dekohärenz und Fehlerkorrektur wieder zurückkommen.

Hilfsmittel: Gegeben seien die Operatoren $\hat{X} = \hat{x}\sqrt{m\omega_x/\hbar}$ und $\hat{P} = \hat{p}/\sqrt{m\omega_x\hbar}$. Mit diesen lauten die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ und $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$. Zudem ist der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ wie folgt definiert:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{1}$$

wo $|n\rangle$ die Eigenzustände des harmonischen Oszillators mit Eigenenergien $E_n = \hbar\omega_x(n + 1/2)$ sind.

Aufgabe 1: **Katzen-Zustand**

(a) Zeigen Sie, dass für die neuen Variablen $\hat{X}$ und $\hat{P}$ gilt (1/2 Punkte):

$$\hat{P} = -i\frac{\partial}{\partial X} \qquad \hat{X} = i\frac{\partial}{\partial P} \tag{2}$$

(b) Konstruieren Sie die Orts- und Impulsdarstellung $\psi_\alpha(X) = \langle X|\alpha\rangle$ und $\psi_\alpha(P)$ des kohärenten Zustands $\hat{a}\psi_\alpha(X) = \alpha\psi_\alpha(X)$. Es ist nicht notwendig zu normalisieren. Benutzen Sie z.B. Gleichung (3) (1 Punkt).

(c) Berechnen Sie den Ortserwartungswert von einem kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ (1/2 Punkte).

(d) Numerisches Beispiel: Betrachten Sie ein Pendel mit Fadenlänge 1 m und Masse 1 g. Nehmen Sie an, dass das Pendel durch einen kohärenten Zustand beschrieben werden kann. Zur Zeit $t = 0$ hat das Pendel die Position $\langle x(0)\rangle = 1\,\mu$m und $\langle v(0)\rangle = 0$.

1. Was ist der Wert von $\alpha(0)$? (1/2 Punkte)
2. Was ist die relative Ortsunsicherheit $\Delta x/\langle x(0)\rangle$? (1/2 Punkte)

(e) Betrachten Sie den Schrödinger-Katzen Zustand

$$|S_-\rangle = \frac{|\alpha e^{+i\phi/2}\rangle - |\alpha e^{-i\phi/2}\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Nehmen Sie im Rest des Blattes an, dass α reell und $\phi = \pi$ sind. Was sind die physikalischen Eigenschaften des Zustands (Ort, Geschwindigkeit)? Sei $|\alpha|$ von ähnlicher Größenordnung wie in Aufgabe 1 (d). In wie fern realisiert dieser Zustand einen Schrödinger-Katzen Zustand, wie er in der Einleitung beschrieben ist? (1 Punkt)

[1] bei Fragen: anegrett@physik.uni-hamburg.de

Aufgabe 2: **Quantenmechanische Überlagerung und gemischte Zustände**

Untersuchen Sie nun die Eigenschaften des Zustands (5) in der makroskopischen Situation $|\alpha| \gg 1$, α reell, $\phi = \pi$ und $p_0 = \alpha\sqrt{2m\hbar\omega_x}$.

(a) Berechnen Sie die Orts- und Impulswahrscheinlichkeitsverteilung (ohne Normalisierung). Sie sind in der Abbildung 1 auch für $\alpha = 5$ gezeichnet. Interpretieren Sie zudem diese Verteilungen (1 Punkt).

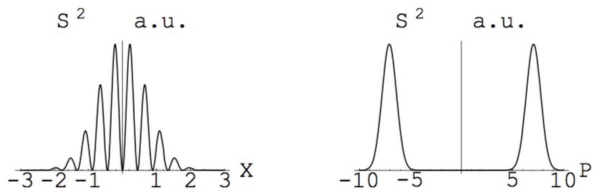

Abbildung 1: Aufenthaltswahrscheinlickeit von S_- im Orts und Impulsraum.

(b) Alice präpariert N unabhängige Systeme im Zustand (5) und misst deren Impuls. Der Messapparat hat die Auflösung δp so dass $\sqrt{m\hbar\omega_x} \ll \delta p \ll p_0$. Zeichnen Sie das Histogramm der Ergebnisse der N Messungen qualitativ (1 Punkt).

(c) Der Zustand (5) repräsentiert die Überlagerung von zwei Zuständen, die makroskopisch unterschiedlich sind und führt zu dem in der Einleitung beschriebenen Paradox. Bob behauptet, dass Alice gar nicht den Zustand (5) präpariert habe, sondern eine statistische Mischung von $N/2$ Systemen im Zustand $|i\alpha\rangle$ und die andere Hälfte im Zustand $|-i\alpha\rangle$. Angenommen, das wäre wahr, würde man dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung wie in der vorhergehenden Aufgabe bei N Impulsmessungen erhalten? (1 Punkt)

(d) Um die Frage zu entscheiden misst Alice die Position Ihrer N Systeme, welche im Zustand (5) sind. Zeichnen Sie die Form des Messergebnisses unter der Annahme, dass die Ortsauflösung des Detektors $\delta x \ll 1/\alpha\sqrt{\hbar/m\omega_x}$ erfüllt. Was erhält Bob bei gleicher Messung mit seiner statistischen Mischung? (1 Punkt)

(e) Nehmen Sie an, Sie hätten das Pendel aus der Aufgabe 1 (d) verschränkt, d.h. es befinde sich im Zustand (5) mit dem α aus der Aufgabe 1 (d). Welche Ortsauflösung δx müsste der Detektor besitzen, um den Unterschied zwischen einer quantenmechanischen Überlagerung und einem statistischen Gemisch festzustellen? (1 Punkt)

Aufgabe 3: **Das Ionenfallen-Experiment**

Sie haben nun alles beisammen, um zu verstehen, wie eine Schrödinger Katze in einer Ionenfalle erzeugt wird. Lesen Sie den Artikel von Monroe *et al.*, Science **272**, 1131 (1996). Zum Verständnis der Anregung der kohärenten Zustände ist folgendes Bild hilfreich: Im Experiment werden zwei Ramanlaser (b) und (c) eingestrahlt, die eine Frequenzdifferenz $\Delta\omega = \omega_x$ besitzen. Wenn wir das resultierende E-Feld der zwei Überlagerten Strahlen betrachten, hat es eine schnell rotierende Komponente und eine Komponente, die genau dem mit der Fallenfrequenz oszillierenden E-Feld aus Blatt 5, Aufgabe 2 (a) entspricht.

Erklären Sie qualitativ, wie die Forscher den Überlagerungszustand nachweisen, ohne die hohe Ortsauflösung δx zu benötigen (1 Punkt).