Einführung in die Theoretische Physik II

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — δ-Funktion
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\int dx\, \delta(x)\ , \quad \int_{-2}^{-1} dx\, \delta(x)\ , \quad \int dx\, x\, \delta(x-2)$$

und

$$\int_K d^3r\, \delta(\boldsymbol{r})\ , \quad \int d^3r\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\, e^{-r^2/r_0^2}\ , \quad \int\int dxdy\, (x+1)\cos(y\pi)\, \delta(x)\, \delta(y-2)\,!$$

Hier ist $\boldsymbol{r}_0$ ein beliebiger konstanter Vektor, und K bezeichnet eine Kugel mit Radius $R=1$ und mit Mittelpunkt $\boldsymbol{r}_{\mathrm{Mittel}} = (1,1,1)$. Berechnen Sie weiter:

$$\boldsymbol{r}_1 \int d^3r\, \boldsymbol{r}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\ !$$

Hier sind $\boldsymbol{r}_1 = (0,1,-1)$ und $\boldsymbol{r}_2 = (-2,1,1)$ konstante Vektoren.

Beachten Sie die übliche Konvention, dass fett gedruckte Symbole Vektoren bezeichnen, und machen Sie in handschriftlichen Aufzeichnungen den Vektorcharakter durch einen Vektorpfeil deutlich, also $\boldsymbol{r} = \vec{r}$ etc.!

Beachten Sie weiter, dass ein Volumenintegral über eine vektorielle Funktion ein Vektor von Volumenintegralen ist!

Aufgabe 2 — "Delta-Kamm"
(1 Punkt) Berechnen Sie

$$\int_{\pi/2}^{\infty} dx\, \delta(\sin(x))\, \frac{1}{x^2} \quad !$$

Benutzen Sie dazu die allgemeine Formel für $\delta(f(x))$ aus der Vorlesung für eine beliebige Funktion $f(x)$ und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Rechnen mit der δ-Funktion
a) (5 Punkte) Betrachten Sie zwei Punktladungen $q_1 = -q$ und $q_2 = +q$ an den Orten $\boldsymbol{r}_1 = 0$ und $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{d}$. Die Ladungsmenge q sei gegeben. Die entsprechende Ladungsdichte ist:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q_1\,\delta(\boldsymbol{r}) + q_2\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d})\ .$$

Berechnen Sie die Gesamtladung und das sogenannte Dipolmoment:

$$Q = \int d^3r\ \rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{p} = \int d^3r\ \boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}) \quad !$$

(Die physikalische Bedeutung des Dipolmoments wird erst später in der Vorlesung behandelt.)
Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn beide Ladungen um einen Vektor $\boldsymbol{a}$ verschoben werden:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q_1\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) + q_2\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}) \quad ?$$

b) (2 Punkte) Gegeben sei die Ladungsdichte einer "abgeschirmten Punktladung":

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\,\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{q\lambda^2}{4\pi r}e^{-\lambda r}\ , \qquad \lambda, q = \text{ const.}$$

Veranschaulichen Sie sich dies Ladungsverteilung (z.B. durch eine Skizze). Berechnen Sie die Ladung in einer Kugel um den Ursprung $(0,0,0)$ mit Radius R, und berechnen Sie die Ladung im gesamten Raum, also für $R \to \infty$!
Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten!

c) (1 Punkt, schwierig) Eine Hohlkugel mit Radius R trage die Ladungsdichte

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r, \vartheta, \varphi) = \sigma_0 \cos\vartheta\,\delta(r - R)\ .$$

σ_0 ist eine gegebene Konstante. Veranschaulichen Sie sich diese Ladungsverteilung!

Berechnen Sie die Gesamtladung und das Dipolmoment:

$$Q = \int d^3r\ \rho(\boldsymbol{r}) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{p} = \int d^3r\ \boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}) \quad !$$