Einführung in die Theoretische Physik II

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — Gauß'sches Gesetz
Ein unendlich langer Zylinder mit der z-Achse als Symmetrieachse und mit Radius R sei auf seiner Oberfläche homogen mit Ladung belegt. In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ist die Ladungsdichte gegeben durch:

$$\rho(r, \varphi, z) = \sigma\delta(r - R) \ .$$

a) Berechnen Sie die Gesamtladung Q, indem Sie $\rho(\boldsymbol{r})$ über den gesamten Raum integrieren! Nehmen Sie dazu an, dass der Zylinder eine endliche aber sehr große Höhe H hat ($0 < z < H$). Welche Bedeutung hat die Konstante σ, und wie hängt σ mit Q zusammen?

b) Nutzen Sie das Gauß'sche Gesetz, um das elektrische Feld der Ladungsverteilung zu berechnen! Hinweis: Betrachten Sie einen Zylinder mit Radius r, und unterscheiden Sie die beiden Fälle $r > R$ und $r < R$! Hängt das Ergebnis von H ab?

Aufgabe 2 — Dipolfeld
Weit entfernt von einer in der Nähe des Ursprungs $\boldsymbol{r} = 0$ lokalisierten Ladungsverteilung $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r})$ hat das elektrische Feld (bis auf kleine Korrekturen der Ordnung r^{-4}) die Form

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{pr}) - r^2\boldsymbol{p}}{r^5} \ ,$$

wobei $Q = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})$ die Gesamtladung und $\boldsymbol{p} = \int d^3r\, \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})$ das Dipolmoment der Ladungsverteilung sind. Nehmen Sie an, dass $Q = 0$ und dass $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e}_z$, und zeigen Sie, dass die Energiedichte durch

$$w(\boldsymbol{r}) = \frac{p^2}{32\pi\varepsilon_0}\frac{3z^2 + r^2}{r^8}$$

gegeben ist! Ist die Gesamtenergie $W = \int d^3r\, w(\boldsymbol{r})$ eines Punktdipols endlich? Verwenden Sie Kugelkoordinaten, um dies zu entscheiden!

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Feldenergie einer homogen geladenen Kugeloberfläche
Die Oberfläche einer Kugel vom Radius R sei homogen mit Ladung belegt:

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = \rho(r) = \sigma\delta(r - R) \ .$$

σ ist eine Konstante und $\delta(r - R)$ die eindimensionale δ-Funktion der Radialvariable.

a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Gesamtladung Q, indem Sie ρ über den gesamten Raum integrieren! Nutzen Sie dazu Kugelkoordinaten! Hinweis: $d^3r = r^2 \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta$. Welche Bedeutung hat σ, und wie hängt σ mit Q zusammen?

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ im gesamten Raum! Hinweis: Betrachten Sie die Oberfläche einer Kugel mit Radius r, und unterscheiden Sie die Fälle $r < R$ und $r > R$!

c) (3 Punkte, alternativ zu b, schwieriger) Alternativ zu b) können Sie auch das elektrostatische Potenzial $\Phi(\boldsymbol{r})$ (innerhalb und außerhalb der Kugeloberfläche) bestimmen, indem Sie die Volumenintegration in

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

durchführen! Hinweise: Betrachten Sie $\boldsymbol{r}$ als beliebig aber fest, und legen Sie das Koordinatensystem so, dass $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$. Benutzen Sie Kugelkoordinaten r', ϑ', φ' für die Integration, und schreiben Sie $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta'}$!

Berechnen Sie jetzt $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ mit Hilfe von $\Phi(\boldsymbol{r})$!

d) (1 Punkt) Wie groß ist die Energiedichte $w(\boldsymbol{r})$ und die gesamte Feldenergie W der Ladungsverteilung? Wie verhält sich W für $R \to 0$, wenn die Gesamtladung Q konstant bleibt? Vergleichen Sie mit dem Resultat (siehe Vorlesung) einer homogen geladenen Kugel mit $R \to 0$ und konstantem Q!

Aufgabe 2 — Normalableitung, Anwendung des Gaußschen Satzes, Laplace-Gleichung
(schwierig, nur 1 Punkt) Für ein skalares Feld $\psi(\boldsymbol{r})$ und einen Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ ist die Ableitung in Richtung von $\boldsymbol{n}$ durch

$$\frac{\partial \psi(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}} = \mathsf{grad}\psi(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}$$

definiert. Ist $\boldsymbol{n}$ der Normaleneinheitsvektor in einem Punkt der Oberfläche $S(V)$ eines Volumens V, so heißt $\partial\psi/\partial\boldsymbol{n}$ auch die Normalableitung von ψ in diesem Punkt.

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_V d^3r \left(\psi_1(\boldsymbol{r})\Delta\psi_2(\boldsymbol{r}) + \nabla\psi_1(\boldsymbol{r})\nabla\psi_2(\boldsymbol{r})\right) = \oint_{S(V)} da \, \psi_1(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \psi_2(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}}$$

für zwei skalare Felder $\psi_1(\boldsymbol{r})$ und $\psi_2(\boldsymbol{r})$!

Hinweis: Definieren Sie $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \psi_1(\boldsymbol{r}) \, \mathsf{grad}\psi_2(\boldsymbol{r})$ und benutzen Sie den Gaußschen Satz für $\boldsymbol{F}$.

b) Zeigen Sie weiter, dass

$$\int_V d^3r \left(\psi_1(\boldsymbol{r})\Delta\psi_2(\boldsymbol{r}) - \psi_2(\boldsymbol{r})\Delta\psi_1(\boldsymbol{r})\right) = \oint_{S(V)} da \left(\psi_1(\boldsymbol{r})\frac{\partial \psi_2(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}} - \psi_2(\boldsymbol{r})\frac{\partial \psi_1(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}}\right) !$$

c) Gegeben sei jetzt ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ mit

$$\text{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \text{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0 \; .$$

Begründen Sie, dass sich das Vektorfeld als $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\text{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ mit einem skalaren Feld $\varphi(\boldsymbol{r})$ schreiben lässt, für das die sogenannte Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$$

gilt! Nehmen Sie an, dass $\varphi(\boldsymbol{r}) \to 0$ für $r \to \infty$, und nutzen Sie das Resultat aus a) für $\psi_1 = \psi_2 = \varphi$, um zu zeigen, dass

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \text{const.} \qquad \text{und somit} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0$$

im ganzen Raum! Diskutieren Sie das Resultat in bezug auf den Eindeutigkeitssatz!