Einführung in die Theoretische Physik II

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — Dipolmoment einer Ladungsverteilung
Betrachten Sie zwei unendlich dünne Kreisscheiben vom Radius R mit gemeinsamer auf den Scheiben senkrecht stehender Symmetrieachse. Der Abstand zwischen den Scheiben sei d. Die eine Kreisscheibe sei homogen mit der Ladung q, die andere mit der Ladung $-q$ belegt.

Skizzieren Sie diese Ladungsverteilung!

Wie groß ist die Flächenladungsdichte σ auf jeder der Kreisscheiben?

Benutzen Sie Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z), um einen geschlossenen Ausdruck für die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ anzugeben! Verwenden Sie hierzu die δ- und die Θ-Funktion!

Verifizieren Sie, dass die Gesamtladung $Q = \int d^3r \rho(\boldsymbol{r}) = 0$ ist!

Berechnen Sie jetzt das Dipolmoment der Ladungsverteilung! Beachten Sie dabei, dass das Volumenelement in Zylinderkoordinaten durch $d^3r = \varrho d\varrho d\varphi dz$ gegeben ist!

Aufgabe 2 — Coulomb-Eichung
Das Vektorpotenzial

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = c\,\boldsymbol{r}$$

sei gegeben ($c \neq 0$ ist eine Konstante).

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ nicht in Coulomb-Eichung gegeben ist!

b) Welche Bedingung muss das skalare Feld $\Lambda(\boldsymbol{r})$ erfüllen, so dass

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \operatorname{grad} \Lambda(\boldsymbol{r})$$

der Bedingung für Coulomb-Eichung genügt?

c) Geben Sie ein mögliches Feld $\Lambda(\boldsymbol{r})$ an!

d) Berechnen Sie das Magnetfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ vor und nach der Eichtransformation:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\ , \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r})\ !$$

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Dipolmoment und Quadrupoltensor
a) (3 Punkte) Gegeben ist eine sphärisch symmetrische Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$. Zeigen Sie, dass die x-Komponente des Dipolmoments $\boldsymbol{p}$ der Ladungverteilung verschwindet! Warum ist dann auch $\boldsymbol{p} = 0$?

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Spur $\sum_{i=1}^{3} Q_{ii}$ des Quadrupoltensors

$$Q_{ij} = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})\, (3x_i x_j - r^2\delta_{ij}) \qquad \text{mit: } \boldsymbol{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$$

für beliebige Ladungsverteilungen $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r})$ verschwindet!

c) (2 Punkte) Gegeben ist die Ladungsverteilung

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\, \delta(x)\, \delta(y)\, [\delta(z) - 2\delta(z - a) + \delta(z - 2a)]$$

mit Konstanten q und a. Skizzieren Sie die Ladungsverteilung und berechnen Sie das Dipolmoment und den Quadrupoltensor!

Aufgabe 2 — Grundgleichungen der Magnetstatik und ihre Lösung
(1 Punkt, sehr schwierig!) $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ sei eine lokalisierte und stationäre Stromverteilung, d.h. div$\boldsymbol{j} = 0$ und $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \to 0$ für $r \to \infty$. Damit wird ein Magnetfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ gemäß

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

erzeugt.

Berechnen Sie:

$$\text{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \quad \text{und} \quad \text{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\ ,$$

und zeigen Sie so, dass der oben angegebene Ausdruck für $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ in der Tat die Feldgleichungen

$$\text{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \text{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

erfüllt!