Einführung in die Theoretische Physik II

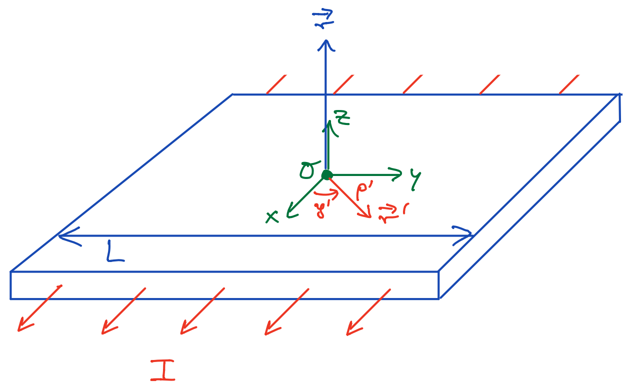
Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — Vektorpotenzial
Welches Magnetfeld gehört zum dem Vektorpotenzial

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r} \qquad ?$$

($\boldsymbol{B}$ ist ein konstanter Vektor).

Aufgabe 2 — Stromdurchflossene Platte
Betrachten Sie eine unendlich dünne Platte in der x-y-Ebene, die von einem homogenen Strom in x-Richtung durchflossen wird. Länge und Breite der Platte in x- und y-Richtung sei jeweils L. Der gesamte durch die Platte fließende Strom sei I.



a) Begünden Sie, dass die Stromdichte durch

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{L}\,\delta(z)\,\boldsymbol{e}_x$$

gegeben ist!

b) Setzen Sie $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ in die Formel für das resultierende Magnetfeld ein:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,,$$

und berechnen Sie das Magnetfeld für eine Platte mit unendlicher Ausdehnung $L\to\infty$ (so dass I/L aber konstant bleibt)!

Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (ρ,φ,z), und begründen Sie zunächst, dass

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{\infty}d\rho'\,\rho'\,\frac{I}{L}\,\delta(z')\,\boldsymbol{e}_x\times\frac{-\rho'\boldsymbol{e}_{\rho'}+z\boldsymbol{e}_z}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}\,,$$

(s. Skizze und unterscheiden Sie klar zwischen z und z'), und führen Sie die z'-Integration durch!

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_{\rho'} = \sin\varphi'\boldsymbol{e}_z$, und argumentieren Sie, dass der entsprechende Term nach der φ'-Integration Null liefert.

Für den verbleibenden Term ($\sim z\boldsymbol{e}_z$) können Sie benutzen, dass

$$\int_0^\infty d\rho' \, \frac{\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{z} \, .$$

c) Ist das Ergebnis für $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ plausibel?

d) Was passiert, wenn zwei große stromdurchflossene Platten im Abstand d platziert werden? Wie hängen die auftretenden Kräfte von den Stromrichtungen ab?

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Magnetisches Dipolmoment
a) (2 Punkte) Betrachten Sie eine von einem Strom der Stärke I durchflossene unendlich dünne und kreisförmige Drahtschleife mit Radius R. Die Drahtschleife liege in der x-y-Ebene mit Mittelpunkt $x = y = 0$. In Zylinderkoordinaten gilt dann für die Stromdichte:

$$\boldsymbol{j}(\rho, \varphi, z) = I\delta(\rho - R)\delta(z)\boldsymbol{e}_\varphi \, .$$

Berechnen Sie mit Hilfe von Zylinderkoordinaten

$$\int d^3r \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \qquad !$$

Was bedeutet das für das magnetische Monopolmoment der Schleife?

b) (3 Punkte) Das magnetische Dipolmoment einer Stromverteilung $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ ist

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \, .$$

Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment für die Drahtschleife aus a) !
Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten: $d^3r = \rho d\rho d\varphi dz$ und, falls $\boldsymbol{r}$ in der x-y-Ebene liegt, $\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho$

c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\nabla)\boldsymbol{r}$$

für eine beliebige Stromverteilung!

d) (1 Punkt) Leiten Sie mit Hilfe von c) und aus der für die Magnetostatik gültigen Bedingung div $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0$ ab, dass:

$$\int d^3r \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0$$

für eine beliebige lokalisierte Stromverteilung!
Hinweis: Benutzen Sie kartesische Koordinaten! Die Integration erstreckt sich über den ganzen Raum. Bei partieller Integration können Sie annehmen, dass der Randterm jeweils verschwindet, da die Stromverteilung lokalisiert sein soll, d.h. $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \to 0$ für $r \to \infty$.