Einführung in die Theoretische Physik II

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — Stromdurchflossene Platte - nochmal
Betrachten Sie eine unendlich dünne Platte in der x-y-Ebene, die von einem homogenen Strom in x-Richtung durchflossen wird. Länge und Breite der Platte in x- und y-Richtung sei jeweils L. Der gesamte durch die Platte fließende Strom sei I. Die Stromdichte ist (siehe Übungsblatt 9):

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{L}\,\delta(z)\,\boldsymbol{e}_x\,.$$

Berechnen Sie das Magnetfeld der Stromverteilung mit Hilfe des Ampèreschen Durchflutungsgesetzes! Vernachlässigen Sie dabei Randeffekte, und nehmen Sie an, dass $L \to \infty, I \to \infty$ mit $I/L = \text{const}$.

Benennen Sie die Annahmen, die Sie aufgrund der Symmetrie des Problems für Richtung und Stärke des Magnetfelds machen dürfen!

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Geschlossene Wegintegrale
(3 Punkte) C sei ein Kreis um $\mathcal{O}$ mit Radius R in der x-y-Ebene. Die Orientierung von C sei mathematisch positiv, d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn. Berechnen Sie die folgenden, zum Teil unkonventionellen Wegintegrale:

$$\oint\limits_C \boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}\,, \qquad \oint\limits_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}\,, \qquad \oint\limits_C r\,d\boldsymbol{r}\;!$$

Neben der immer bestehenden Möglichkeit den Weg zu parametrisieren, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\lambda)$, und das Integral in ein einfaches Integral über λ zu transformieren, können Sie hier auch ohne Wegparametrisierung zum Ziel kommen, indem Sie sich die Geometrie veranschaulichen.

Aufgabe 2 — Geschlossene Flächenintegrale
(3 Punkte) S sei die Oberfläche einer Kugel um $\mathcal{O}$ mit Radius R. Berechnen Sie:

$$\oint\limits_S \boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{a}\,, \qquad \oint\limits_S \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{a}\,, \qquad \oint\limits_S \frac{1}{r}\,d\boldsymbol{a}\;!$$

Aufgabe 3 — Skalar- und Kreuzprodukte mit Nabla
(1 Punkt, bei mehr als 4 von 7 gelösten Teilaufgaben) $\boldsymbol{u}$ sei ein konstanter Vektor. Berechnen Sie:

$$\nabla(\boldsymbol{u}\boldsymbol{r})\;, \quad \boldsymbol{u}(\nabla\boldsymbol{r})\;, \quad (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{r}\;, \quad \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{r})\;, \quad (\boldsymbol{u}\times\nabla)\times\boldsymbol{r}\;, \quad \nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{r})\;, \quad (\boldsymbol{u}\times\nabla)\boldsymbol{r}\;!$$

Aufgabe 4 — Anwendung des Stokesschen Satzes
(schwierig, nur 1 Punkt) $\varphi(\boldsymbol{r})$ sei ein skalares Feld. $C(S)$ sei die Kurve, die eine Fläche S berandet. Zeigen Sie, dass

$$\oint\limits_{C(S)} \varphi(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} = \int_S d\boldsymbol{a} \times \mathsf{grad}\varphi(\boldsymbol{r})\;!$$

Hinweis: Definieren Sie ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ durch $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}\,\varphi(\boldsymbol{r})$, wobei $\boldsymbol{u}$ ein beliebiger konstanter Vektor ist, und nutzen Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ aus!