Einführung in die Theoretische Physik II

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — Poisson-Gleichung und Fourier-Transformation
Die Methode der Fourier-Transformation soll zur Lösung der aus der Elektrostatik bekannten Poisson-Gleichung eingesetzt werden.

a) Gehen Sie zunächst von den Grundgleichungen der Elektrostatik aus,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0 \;, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \;,$$

begründen Sie kurz, warum das elektrische Feld durch ein Potenzial in der Form $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$ ausgedrückt werden kann, und leiten Sie damit die Poisson-Gleichung ab:

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\,!$$

Die Poisson-Gleichung soll für eine Punktladung q im Ursprung gelöst werden, d.h. es ist:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r})\;.$$

b) Nutzen Sie die Fourier-Transformation,

$$\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r\; e^{-i\boldsymbol{kr}}\,\Phi(\boldsymbol{r})\;,$$

und die Fourier-Rücktransformation,

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3k\, e^{i\boldsymbol{kr}}\,\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{k})$$

um zu zeigen, dass die Lösung der Poisson-Gleichung im Fourier-Raum durch

$$\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{k}) = \frac{q}{(2\pi)^3\varepsilon_0}\frac{1}{k^2}$$

gegeben ist!

Hinweis: Berechnen Sie dazu zunächst

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = \Delta\int d^3k\, e^{i\boldsymbol{kr}}\,\widetilde{\Phi}(\boldsymbol{k})\;,$$

und vergleichen Sie dann mit der Fourier-Darstellung der δ-Funktion:

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\boldsymbol{kr}}\;!$$

c) Berechnen Sie jetzt $\Phi(\boldsymbol{r})$ durch Fourier-Rücktransformation:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3k \, e^{i\boldsymbol{kr}} \widetilde{\Phi}(\boldsymbol{k}) \; !$$

Hinweise: Benutzen Sie Kugelkoordinaten (k, ϑ, φ) für die $\boldsymbol{k}$-Integration, so dass $d^3k = k^2 \sin\vartheta \, dk d\vartheta d\varphi$, und legen Sie das (k_x, k_y, k_z)-Koordinatensystem so, dass $\boldsymbol{r}$ in k_z-Richtung weist, damit $\boldsymbol{kr} = kr\cos\vartheta$, wobei ϑ der Polarwinkel ist! Führen Sie erst die φ-, dann die ϑ- und zum Schluss die k-Integration aus! Es gilt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \; .$$

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Fourier-Transformation
Die Fourier-Transformierte

$$\widetilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx \, e^{-ikx} f(x)$$

einer komplexwertigen Funktion $f(x) \in \mathbb{C}$ ist im Allgemeinen wieder komplexwertig: $\widetilde{f}(k) \in \mathbb{C}$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass aus $f(x) = f(-x)$ folgt, dass $\widetilde{f}(k) = \widetilde{f}(-k)$, und dass aus $f(x) = -f(-x)$ folgt, dass $\widetilde{f}(k) = -\widetilde{f}(-k)$!

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\widetilde{f}(k)^* = \widetilde{f}(-k) \; ,$$

falls $f(x)$ reell ist!

c) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass $f(x)$ reell ist. Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte $\widetilde{f}(k)$ ebenfalls reell ist, falls $f(x) = f(-x)$, und dass $\widetilde{f}(k)$ rein imaginär ist, falls $f(x) = -f(-x)$!

Aufgabe 2 — Homogene Maxwell-Gleichungen und Fourier-Transformation
(2 Punkte) Betrachten Sie die Maxwell-Gleichungen in Abwesenheit von Quelltermen, also für $\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$:

$$\text{div}\boldsymbol{E} = 0 \; , \quad \text{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \; , \quad \text{div}\boldsymbol{B} = 0 \; , \quad \text{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \; ,$$

und leiten Sie durch Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \; e^{-i(\boldsymbol{kr} - \omega t)} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= \int d^3k \int d\omega \; e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)} \widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega) \end{aligned}$$

(analog für $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$) die Maxwell-Gleichungen für $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{k}, \omega)$ und $\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{k}, \omega)$ her, d.h. die Maxwell-Gleichungen im Fourier-Raum! Interpretieren Sie diese Gleichungen!