

Relationale Zeit in der Quantenphysik

(Relational Time in Quantum Physics)

Diplomarbeit

vorgelegt von

Marc Oliver Hoge

Dezember 2008

II. Institut für Theoretische Physik
Department Physik
UNIVERSITÄT HAMBURG

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. Klaus Fredenhagen

Dr. Mattias Wohlfarth

Relationale Zeit in der Quantenphysik

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wird auf zwei verschiedene Weisen eine relationale und intrinsische Beschreibung des externen Zeitparameters in der nichtrelativistischen Quantenmechanik gegeben. Zum einen wird die Dynamik eines Systems bezüglich einer Wahl physikalischer Observablen, sogenannter „Uhr“-Variablen, beschrieben, die Teil des Systems sind. Speziell wird in dieser Arbeit untersucht, inwiefern man für die Bewegung eines Teilchens die Position eines zweiten als „Uhr“ verwenden kann. Zum anderen wird eine Erweiterung der Quantenmechanik entwickelt, die den Zeitparameter selbst als physikalische Observable enthält und eine Beschreibung liefert, die allgemeiner ist als der Formalismus der „Uhr“-Variablen. Mit Hilfe dieser Beschreibung wird schließlich ein Problem aus der Quantenkosmologie neu analysiert.

Relational Time in Quantum Physics

Abstract

In this diploma thesis a relational and intrinsic description of the external time parameter in non-relativistic quantum mechanics is given using two separate methods. Firstly, the dynamics of a system is expressed in terms of a collection of physical observables, so called “clock” variables, which are themselves part of the system. In particular it is studied how the position of one particle can be used as a “clock” for parameterising the motion of another particle. Secondly, a formal generalisation is developed which implements time as a physical observable into quantum mechanics. This leads to a formalism which is more general than the “clock” variable approach. Using this formalism a novel analysis of a particular problem in quantum cosmology is carried out.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Der quantenmechanische Messprozess und relationale Zeit	11
1.1 Zustände und Operationen	12
1.2 Das Kraussche Theorem	14
1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten bei mehrfacher Messung	17
1.4 Relationale Zeit durch bedingte Wahrscheinlichkeiten	19
2 Relationale Zeit in der Brownschen Bewegung	23
2.1 Die Brownsche Bewegung	23
2.2 Bedingte Aufenthaltswahrscheinlichkeiten	24
2.3 Der Fall $d \geq 3$	25
2.4 Der Fall $d = 1, 2$	30
3 Relationale Zeit in der Quantenmechanik	33
3.1 Positive operatorwertige Maße	34
3.2 Der Zeitpunkt eines Ereignisses als Observable	35
3.3 Konstruktion und Eigenschaften von $W_{A_1 A_2}$	38
3.3.1 Konstruktion	38
3.3.2 Eigenschaften	38
3.4 Beispiele	41
3.4.1 Ankunftszeit eines freien Teilchens am Ursprung	41
3.4.2 Zwei freie Teilchen	44
3.4.3 Zwei harmonische Oszillatoren	46
4 Zeit als intrinsischer Freiheitsgrad	49
4.1 Quantenmechanik in t	50
4.2 „Uhr“-Variablen im neuen Formalismus	54
4.3 Dynamische Quantenvariable der Zeit	57
4.3.1 Motivation und Modell	57
4.3.2 Zeitunabhängige Probleme	58
4.3.3 Ungetriebener harmonischer Oszillator	60
4.3.4 Getriebener harmonischer Oszillator	61
4.4 Skalares Feld als emergente Zeit	63

4.4.1	Das klassische Modell	64
4.4.2	Wheeler-DeWitt-Theorie des Modells	65
4.4.3	Semiklassische Lösungen als Gewichte	69
4.4.4	Zeitpunkt des Urknalls	71
	Zusammenfassung und Ausblick	75
	A Positive Operatoren	77
	B GNS-Konstruktion für Zustände und Gewichte	79
B.1	Grundlegende Begriffe	79
B.2	GNS-Konstruktion für Zustände	82
B.3	GNS-Konstruktion für Gewichte	83
	C Getriebener harmonischer Oszillator	87
C.1	Behandlung im Rahmen der Schrödingergleichung	87
C.2	Lösung der Zwangsbedingung	89
C.3	Null-Lage der Oszillation	97
	Literaturverzeichnis	101

Einleitung

Am Anfang des 18. Jahrhunderts brach mit einem berühmten Briefwechsel [38] zwischen S. Clarke, einem Schüler und engen Vertrauten von I. Newton, und dem deutschen Mathematiker und Philosophen G.W. Leibniz eine große Debatte um die Frage nach dem *absoluten* gegenüber dem *relationalen* Charakter von Raum und Zeit aus. Während Clarke und Newton die Auffassung vertraten, Raum und Zeit seien als real existierende Objekte absolut, legte Leibniz seine Überzeugung dar, dass Raum und Zeit lediglich Ordnungen zwischen real existierenden Dingen darstellten und keine eigene Realität besäßen.

„[...] it is not possible for two things to differ from one another in respect of place and time alone, but it is always necessary that there shall be some other internal difference [...] in general, place, position and quantity are mere relations.“

LEIBNIZ, 1696 in [27].

Etwa 150 Jahre später stellte sich auch der österreichische Philosoph und Physiker E. Mach auf die Seite Leibniz’.

„Der physikalische Raum, den ich im Sinne habe (und welcher zugleich die Zeit in sich enthält) ist also nichts anderes als Abhängigkeit der Erscheinungen von einander. Die vollendete Physik, welche diese Grundabhängigkeit kennen würde, hätte keine besondern Raum- und Zeitbetrachtungen mehr nöthig, denn diese wären ohnehin schon mit erschöpft.“

MACH, 1866 in [28].

Diese alte Debatte hat im Licht moderner physikalischer Theorien immer noch nicht an Aktualität verloren. Die Quantenfeldtheorie als die heute akzeptierte Theorie der Elementarteilchen ist auf einer Hintergrundraumzeit mit fixierter Metrik formuliert, die im Rahmen der Theorie einen absoluten Charakter hat. Auf der anderen Seite steht die Allgemeine Relativitätstheorie, die gängige Theorie der Gravitation, die die Metrik der Raumzeit als dynamische Größe enthält und innerhalb derer ein einzelner Punkt auf der Raumzeit-Mannigfaltigkeit keine physikalische Bedeutung mehr hat [40]. Ebenso wenig ist es in diesem Zusammenhang sinnvoll, vom Wert eines Feldes *an einem Punkt* zu sprechen. Es überrascht nicht, dass diese unterschiedlichen Sichtweisen insbesondere bei dem Versuch, die beiden Theorien in einer einzigen Theorie der Quantengravitation zu vereinen,

zu großen Schwierigkeiten führen: Die Raumzeit, die einerseits den Parameterbereich der Quantenfelder darstellt, muss andererseits gleichzeitig als dynamische Quantenvariable in der Theorie auftreten. Die grundlegende Frage, was in einer Quantengravitation überhaupt die observablen Größen sind, ist nicht abschließend geklärt [36].

Wie viele andere plädiert C. Rovelli für einen relationalen Standpunkt [37]: Die Physik könne prinzipiell nur Aussagen über die *Relationen* physikalischer Größen treffen. Diese theoretisch vorhersagbaren Relationen nennt Rovelli *vollständige Observablen*. Betrachtet man beispielsweise ein schwingendes Fadenpendel, so kann neben der Auslenkung des Pendels auch die Zeit experimentell gemessen werden (*partielle* Observablen nach Rovelli). Die Theorie liefert jedoch nur *Korrelationen* der gemessenen Größen, zum Beispiel die Auslenkung x zu dem Zeitpunkt, in dem eine mitlaufende Uhr die Zeit t anzeigt. Die vollständige Observable ist also der funktionale Zusammenhang $x(t)$ und nur dafür gibt es eine theoretische Vorhersage.

Ansätze zur Konstruktion relationaler Observablen in der Gravitation bzw. Quantengravitation finden sich schon in Arbeiten von P. Bergmann [5] und B. DeWitt [12] aus den 60er Jahren. Bergmann verfolgte den Ansatz, Punkte einer vierdimensionalen Raumzeit durch die Werte von vier unabhängigen Feldern an diesen Punkten zu beschreiben. Ein fünftes Feld kann dann als Funktion der anderen vier dargestellt werden und repräsentiert eine von der Theorie vorher-sagbare vollständige Observable im Sinne Rovellis. Ausgehend von einer Lösung der Einstein-Gleichungen konnte Bergmann aus dem Krümmungstensor genau vier unabhängige Skalarfelder konstruieren, die sich als lokale Koordinaten verwenden lassen. Auf diese Resultate aufbauend gab es kürzlich einige Fortschritte im Programm der Loop-Quantengravitation [2, 42], einem der prominentesten Kandidaten für eine volle Quantengravitationstheorie. In den Arbeiten [13, 14] gelang es B. Dittrich, vollständige relationale Observablen in der kanonischen Form der Allgemeinen Relativitätstheorie zu konstruieren, sodass diese im Rahmen der Loop-Quantengravitation direkt quantisiert werden können. Im Rahmen der Anwendung der Loop-Quantengravitation auf die Kosmologie gibt es eine Arbeit [3] von A. Ashtekar, T. Pawłowski und P. Singh, in der ein skalares Feld auf einer Robertson-Walker-Raumzeit untersucht wird. Durch die hohe Symmetrie der Raumzeit gibt es nur einen Gravitationsfreiheitsgrad, repräsentiert durch den Skalenfaktor. Man erhält eine einzige Feldgleichung, die von den Autoren als Schrödingergleichung zur Energie Null aufgefasst wird, in der das skalare Feld ϕ die Rolle des Zeitparameters übernimmt. Als Lösung ergibt sich (relational) der Skalenfaktor als Funktion der „emergenten Zeit“ ϕ .

Gerade in der durch die Schrödingergleichung beschriebenen nichtrelativistischen Quantenmechanik äußert sich jedoch das Konzept einer absoluten Zeit sehr deutlich. Es wird von einer rein klassischen Zeit ausgegangen, die die Theorie extern parametrisiert und insbesondere keinen (quantenmechanischen) Freiheitsgrad darstellt. *Das Hauptaugenmerk dieser Diplomarbeit wird daher darauf liegen, eine*

relationale Sichtweise der Zeit in die Quantenmechanik zu implementieren.

Diese Sichtweise wurde von N.D. Mermin vehement gefordert [29], und eine Möglichkeit ihrer Umsetzung besteht darin, nicht mehr von Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Observablen *zu einer Zeit t* zu sprechen, sondern stattdessen *bedingte Wahrscheinlichkeiten* zu betrachten, für eine Observable einen gewissen Wert zu messen unter der Voraussetzung, dass die Messung einer weiteren Observablen einen anderen, definierten Wert liefert. Der Standpunkt einer auf bedingten Wahrscheinlichkeiten basierenden Quantenmechanik ist aus der maßgeblich von R. Griffiths entwickelten Theorie der „konsistenten Geschichten“ (*consistent histories*) [21, 22] bereits bekannt. Hierbei handelt es sich um einen modernen Ansatz zur Interpretation der Quantenmechanik, bei der die Evolution (Geschichte) eines Systems durch eine zeitlich geordnete Abfolge von Ereignissen beschrieben wird, die ein Konsistenzkriterium erfüllen müssen, das die Möglichkeit einer statistischen Deutung garantiert. Dort berechnete Wahrscheinlichkeiten haben die konsistente Systemgeschichte zur Bedingung.

Einen ersten Vorstoß in Richtung einer relationalen Zeit in der Quantenmechanik lieferten 1983 D. Page und W. Wothers [31]. Diese Autoren zeigen, dass die Dynamik durch interne „Uhr“-Variablen ausgedrückt werden kann. Eine „Uhr“-Variable ist dabei eine ausgewählte Observable des Systems, in Relation zu der die Entwicklung aller anderen Observablen betrachtet wird. Daran anknüpfend gibt es eine Reihe von Arbeiten von R. Gambini, R. Porto und J. Pullin [16, 17, 18, 19], in denen die bedingten Wahrscheinlichkeiten konstruiert werden, einen bestimmten Wert einer Observablen unter der Voraussetzung zu messen, dass die Messung der „Uhr“-Variablen gerade eine bestimmte Zeit ergeben hat. *Das Konzept von bedingten Wahrscheinlichkeiten dieser Art ist zentral für diese Arbeit.* Gambini, Porto und Pullin zeigen weiter, dass nach Wahl einer geeigneten „Uhr“ eine vollständige Beschreibung der Dynamik mittels bedingter Wahrscheinlichkeiten ohne Rekurs auf einen externen Zeitparameter möglich ist.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit lässt sich folgendermaßen umreißen: Zu Beginn werden einige Grundlagen zusammengestellt. Will man in der Quantenmechanik bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen für zwei hintereinander ausgeführte Messungen berechnen, ist es notwendig, die Auswirkung der ersten Messung auf den Zustand des Quantensystems zu studieren. Eine Messung führt zu einer Zustandstransformation, die sich mit Hilfe von Krausoperatoren darstellen lässt. Die Kraussche Theorie des Messprozesses wird zusammen mit den für diese Arbeit wichtigen Ergebnissen von Gambini, Porto und Pullin in Kapitel 1 behandelt.

In den Kapiteln 2 und 3 wird eine spezielle Wahl der „Uhr“-Variablen getroffen und die zugehörigen bedingten Wahrscheinlichkeiten werden konstruiert. Zur Parametrisierung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens wird als „Uhr“ die Position eines zweiten Teilchens verwendet und nach der bedingten Wahrscheinlichkeit gefragt, das erste Teilchen in einem Gebiet A_1 anzutreffen,

wenn sich das Referenzteilchen gerade in einem zweiten Gebiet A_2 aufhält. Der Zeitparameter t wird so aus der Beschreibung vollständig eliminiert. Kapitel 2 behandelt diesen Ansatz zur Eliminierung der Zeit zunächst im klassischen Rahmen der Brownschen Bewegung, während die quantenmechanische Konstruktion in Kapitel 3 erfolgt.

Das letzte Kapitel 4 greift dann Fragen aus der erwähnten Arbeit [3] von Ashtekar, Pawłowski und Singh auf und untersucht, in welcher Weise die Zeit als intrinsischer, quantenmechanischer Freiheitsgrad in der Schrödingergleichung verstanden werden kann. Das Hauptproblem bei einer solchen Interpretation ist, dass Lösungen der Schrödingergleichung nicht normierbar in t sind. Es wird gezeigt, dass sich die nicht normierbaren Lösungen jedoch als Gewichte auf der Algebra der Observablen auffassen lassen, die wiederum eine Interpretation mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten erlauben. Durch diese Interpretation lässt sich darüber hinaus eine Verbindung zum vorher diskutierten Formalismus der „Uhr“-Variablen herstellen. Unter Verwendung der entwickelten Methoden wird anschließend ein Modell betrachtet, in dem in der Schrödingergleichung zusätzlich ein „kinetischer Term“ für die Zeitvariable hinzugefügt wird, und Effekte der so erhaltenen *dynamischen Zeit* werden studiert. Zum Abschluss wird die in [3] auftretende Schrödingergleichung neu analysiert und gezeigt, dass die Betrachtung der Lösungen als Gewichte auf dieselben Ergebnisse führt, die Ashtekar et al. auf alternative Weise erhalten. Darüber hinaus ist es möglich, neben dem Skalarfeld ϕ auch andere Observablen als „Uhren“ zu verwenden, und es wird ferner gezeigt, dass im hier betrachteten kosmologischen Modell eine Beschreibung der Zeit durch den Wert des Skalenfaktors gegeben werden kann.

Kapitel 1

Der quantenmechanische Messprozess und relationale Zeit

Eine *bedingte* oder auch *konditionale Wahrscheinlichkeit* ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass das Ereignis B mit Sicherheit eintritt bzw. bereits eingetreten ist. Notiert wird die bedingte Wahrscheinlichkeit mit $\mathcal{W}(A|B)$. Sei $W(B) > 0$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B allein und $W(A \cup B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass A und B gemeinsam eintreten, dann setzt man

$$\mathcal{W}(A|B) := \frac{W(A \cup B)}{W(B)}. \quad (1.1)$$

In der Quantenmechanik spielen bedingte Wahrscheinlichkeiten eine Rolle, wenn an einem quantenmechanischen System nacheinander zwei Messungen durchgeführt werden. Wird mit der ersten Messung festgestellt, dass das System die Eigenschaft E' besitzt, so lässt sich nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}(E|E')$ fragen, mit der anschließend in der zweiten Messung die Eigenschaft E beobachtet wird.¹ Bedingte Wahrscheinlichkeiten dieser Form bilden den Ausgangspunkt für eine relationale Betrachtungsweise der Zeit in der Quantenmechanik. Arbeiten von R. Gambini, R. Porto und J. Pullin [16, 17, 18, 19] folgend, wählt man dazu eine Observable des Systems als „Uhr“-Variable aus und bestimmt die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Messresultate für alle anderen Observablen unter der Bedingung, dass die physikalische „Uhr“ eine bestimmte Zeit anzeigt.

Um jedoch bedingte Wahrscheinlichkeiten der Form $\mathcal{W}(E|E')$ bestimmen zu können, sind zunächst einige Überlegungen zum quantenmechanischen Messprozess nötig. Speziell muss untersucht werden, welche Auswirkungen eine Messung mit dem definierten Ergebnis E' auf den Zustand des Systems hat, bevor die zweite Messung durchgeführt wird.

J. von Neumann führte 1932 das *Kollapspostulat* in die Quantenmechanik ein [30], nach dem der Zustand eines Systems nach einer Messung gegeben ist durch

¹Die Eigenschaften E und E' stehen beispielsweise für Messresultate der Form: „Der Messwert der Observablen \mathcal{O} liegt im Intervall $I \subset \mathbb{R}$.“

einen Eigenzustand, dessen Eigenwert der bei der Messung erhaltene Messwert ist. Das Kollapspostulat stellt neben der unitären Zeitentwicklung, die durch die Schrödingergleichung gegeben ist und in Abwesenheit von Messapparaten stattfindet, eine zweite quantenmechanische Zustandsentwicklung speziell für Messprozesse dar. Die Notwendigkeit einer solchen, Messprozessen eigenen Zeitentwicklung ist seither sehr umstritten (siehe exemplarisch [43]). In den Arbeiten [24, 25] geben K.-E. Hellwig und K. Kraus eine Beschreibung des quantenmechanischen Messprozesses, mit der die Angabe der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}(E|E')$ möglich ist, ohne auf das Kollapspostulat zurückzugreifen.

In den Abschnitten 1.1, 1.2 und 1.3 wird der Messprozess nach Hellwig und Kraus dargestellt und gezeigt, dass man einen Messprozess durch einen Satz beschränkter Operatoren, den *Krausoperatoren*, charakterisieren kann. Mit den Krausoperatoren kann die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}(E|E')$ leicht angegeben werden. Darauf aufbauend werden in Abschnitt 1.4 die Resultate von Gambini, Porto und Pullin über eine relationale Zeitentwicklung in der Quantenmechanik vorgestellt.

1.1 Zustände und Operationen

Der quantenmechanische Messprozess kann nach R. Haag und D. Kastler als eine *Operation* auf dem *Zustand* eines quantenmechanischen Systems aufgefasst werden [23]. Ein Zustand bedeutet dabei ein statistisches Ensemble physikalischer Quantensysteme. Eine Operation ist ein Prozess, bei dem ein physikalischer (Mess-)Apparat innerhalb eines endlichen Zeitintervalls mit dem Ensemble in Wechselwirkung tritt und den einlaufenden Zustand vor der Wechselwirkung in einen auslaufenden Zustand nach der Wechselwirkung transformiert. Die Auswirkung der Operation auf den Messapparat wird beobachtet und als Messergebnis interpretiert.

Um zu quantitativen Aussagen zu gelangen, wird eine mathematische Beschreibung der Begriffe *Zustand* und *Operation* benötigt. Der Zustandsbegriff ist dabei der einfachere:

Definition 1.1. Der *Zustand* eines Quantensystems ist gegeben durch ein Paar (\mathfrak{H}, ρ) , wobei \mathfrak{H} ein Hilbertraum² und ρ ein positiver Operator³ auf \mathfrak{H} mit $\text{Tr}\rho = 1$ ist. Ist E eine durch Beobachtung (Messung) nachweisbare Eigenschaft des Quantensystems und P_E der mit E assoziierte Projektor auf \mathfrak{H} , dann ist die Wahrscheinlichkeit, die Eigenschaft E im Zustand (\mathfrak{H}, ρ) nachzuweisen, durch

$$W(E) = \text{Tr}(\rho P_E) \tag{1.2}$$

²In dieser Arbeit ist ein Hilbertraum \mathfrak{H} stets ein separabler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt (\bullet, \bullet) , der bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.

³Grundlegende Definitionen und Eigenschaften positiver Operatoren sind in Anhang A zusammengestellt.

gegeben. ρ heißt *Dichtematrix*. Sind Verwechslungen ausgeschlossen, wird der Zustand eines Systems auch einfach mit ρ statt mit (\mathfrak{H}, ρ) angegeben.

Zur Analyse des Messprozesses ist es notwendig, die miteinander wechselwirkenden Systeme klar auseinanderzuhalten. Zu einem Anfangszeitpunkt steht auf der einen Seite das Quantensystem, auf dem die Messung durchgeführt werden soll, im Anfangszustand (\mathfrak{H}, ρ) . Auf der anderen Seite befindet sich das System des Messapparats vor der Wechselwirkung im Zustand (\mathfrak{H}', ρ') mit einem zweiten Hilbertraum \mathfrak{H}' . Der Anfangszeitpunkt sei dabei hinreichend früh gewählt, sodass bis zu diesem Zeitpunkt noch keine Wechselwirkung zwischen Quantensystem und Messapparat stattgefunden hat. Zum Anfangszeitpunkt ist der Zustand des Gesamtsystems von Quantensystem plus Messapparat folglich durch $(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}', \rho \otimes \rho')$ gegeben. Unter der Voraussetzung, dass das Gesamtsystem nach Außen abgeschlossen ist, also mit keinem dritten System in Wechselwirkung steht, ist die Zeitentwicklung im Gesamtsystem unitär. Es gibt daher einen unitären Operator S auf $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$, sodass der Gesamtzustand zu einem Endzeitpunkt, nach dem keine weitere Wechselwirkung mehr stattfindet, durch

$$(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}', S(\rho \otimes \rho')S^*) \quad (1.3)$$

gegeben ist.

Nach der Wechselwirkung wird nun am Messapparat die Eigenschaft E' abgelesen, die auf dem Hilbertraum \mathfrak{H}' durch den Projektor Q' realisiert sei. Die normierte Dichtematrix des Gesamtsystems ist dann

$$\mathcal{R} = \frac{\hat{\mathcal{R}}}{\text{Tr} \hat{\mathcal{R}}} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathcal{R}} := (\mathbf{1} \otimes Q')S(\rho \otimes \rho')S^*(\mathbf{1} \otimes Q'), \quad (1.4)$$

wobei $\text{Tr} \hat{\mathcal{R}}$ gemäß (1.2) gerade die Wahrscheinlichkeit $W(E')$ darstellt, nach der Wechselwirkung die Eigenschaft E' festzustellen. Man interessiert sich jetzt für den auslaufenden Zustand $(\mathfrak{H}, \hat{\rho})$ allein des Quantensystems und muss dazu das System des Messapparats aus der Betrachtung wieder herausnehmen. Um die Dichtematrix $\hat{\rho}$ auf \mathfrak{H} zu erhalten, bildet man die *partielle Spur* Tr' von \mathcal{R} nur über \mathfrak{H}' . Sei $(\xi_j)_{j \in J}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem in \mathfrak{H}' und J eine endliche oder abzählbar unendliche Indexmenge. Bezeichnen $(\bullet, \bullet)_{\mathfrak{H}}$ und $(\bullet, \bullet)_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'}$ die Skalarprodukte in \mathfrak{H} bzw. $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$, dann ist die partielle Spur $\text{Tr}' \hat{\mathcal{R}}$ als Operator auf \mathfrak{H} durch

$$(\varphi, \text{Tr}' \hat{\mathcal{R}} \psi)_{\mathfrak{H}} := \sum_{j \in J} ((\varphi \otimes \xi_j), \hat{\mathcal{R}}(\psi \otimes \xi_j))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{H} \quad (1.5)$$

erklärt. Die normierte Dichtematrix $\hat{\rho}$ auf \mathfrak{H} ist dann gegeben durch

$$\hat{\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\text{Tr} \tilde{\rho}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho} := \text{Tr}' \hat{\mathcal{R}}. \quad (1.6)$$

Mit diesen Vorüberlegungen lässt sich der Begriff der Operation exakt definieren:

Definition 1.2. Sei (\mathfrak{H}, ρ) der Anfangszustand eines Quantensystems. Eine *Operation* auf diesem Zustand ist ein Quintupel $(\mathfrak{H}', \rho', Q', S, \mathcal{E})$, wobei (\mathfrak{H}', ρ') der Anfangszustand des Messapparats, Q' ein Projektor auf \mathfrak{H}' und S ein unitärer Operator auf $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$ ist. Die Abbildung \mathcal{E} bildet die Dichtematrix des Anfangszustands des Quantensystems auf die Dichtematrix des Endzustands gemäß

$$\rho \mapsto \mathcal{E}(\rho) = \hat{\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\text{Tr} \tilde{\rho}}, \quad \tilde{\rho} = \text{Tr}'((\mathbf{1} \otimes Q')S(\rho \otimes \rho')S^*(\mathbf{1} \otimes Q')) \quad (1.7)$$

ab.

1.2 Das Kraussche Theorem

Es wird jetzt gezeigt, dass man die Abbildung \mathcal{E} der Operation $(\mathfrak{H}', \rho', Q', S, \mathcal{E})$ auf (\mathfrak{H}, ρ) mit Hilfe einer Familie von beschränkten Operatoren auf \mathfrak{H} charakterisieren kann, den sogenannten Krausoperatoren.

Dazu sind zwei Orthonormalsysteme von \mathfrak{H}' besonders nützlich, die nun definiert werden. Sei $(\varphi'_i)_{i \in J}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von \mathfrak{H}' , sodass ρ' die Spektralzerlegung

$$\rho' = \sum_{i \in J} c_i P_{\varphi'_i} \quad \text{mit} \quad \sum_{i \in J} c_i = 1 \quad \text{und} \quad c_i \geq 0 \quad \forall i \in J \quad (1.8)$$

besitzt, wobei $P_{\varphi'_i}$ die Projektion auf den von φ'_i erzeugten eindimensionalen Unterraum von \mathfrak{H}' ist. Man bezeichnet mit $I := \{i \in J ; c_i \neq 0\}$ die Indexmenge der nichtverschwindenden Koeffizienten. Sei ferner $(\psi'_k)_{k \in J}$ ein zweites vollständiges Orthonormalsystem in \mathfrak{H}' , sodass für eine geeignete Teilmenge $K \subset J$ die Vektoren $(\psi'_k)_{k \in K}$ den Unterraum $Q'\mathfrak{H}'$ aufspannen. Wählt man noch ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in L}$ in \mathfrak{H} mit einer endlichen oder abzählbar unendlichen Indexmenge L und verwendet $(\psi'_k)_{k \in J}$ für die Bildung der partiellen Spur über \mathfrak{H}' , lässt sich (1.5) umformen zu

$$\begin{aligned} (\varphi, \tilde{\rho} \psi)_{\mathfrak{H}} &= \sum_{k \in J} ((\varphi \otimes \psi'_k), (\mathbf{1} \otimes Q')S(\rho \otimes \rho')S^*(\mathbf{1} \otimes Q')(\psi \otimes \psi'_k))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} \\ &= \sum_{k, i, j \in J} \sum_{\lambda, \sigma \in L} \left[((\varphi \otimes \psi'_k), (\mathbf{1} \otimes Q')S(\varphi_\lambda \otimes \varphi'_i))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} \right. \\ &\quad \times ((\varphi_\lambda \otimes \varphi'_i), (\rho \otimes \rho')(\varphi_\sigma \otimes \varphi'_j))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} \\ &\quad \left. \times ((\varphi_\sigma \otimes \varphi'_j), S^*(\mathbf{1} \otimes Q')(\psi \otimes \psi'_k))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} \right] \quad (1.9) \\ &= \sum_{k \in K, i \in I} \sum_{\lambda, \sigma \in L} \left[((\varphi \otimes \psi'_k), S(\varphi_\lambda \otimes \varphi'_i))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} c_i (\varphi_\lambda, \rho \varphi_\sigma)_{\mathfrak{H}} \right. \\ &\quad \left. \times ((\varphi_\sigma \otimes \varphi'_i), S^*(\psi \otimes \psi'_k))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} \right]. \end{aligned}$$

Definiert man auf \mathfrak{H} die Operatoren A_{ki} für $k, i \in J$ durch

$$(\varphi, A_{ki}\psi)_{\mathfrak{H}} := ((\varphi \otimes \psi'_k), S(\psi \otimes \varphi'_i))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'}, \quad (1.10)$$

schreibt sich (1.5) schließlich als

$$\begin{aligned} (\varphi, \tilde{\rho}\psi)_{\mathfrak{H}} &= \sum_{k \in K, i \in I} \sum_{\lambda, \sigma \in L} (\varphi, A_{ki}\varphi_{\lambda})_{\mathfrak{H}} c_i (\varphi_{\lambda}, \rho\varphi_{\sigma})_{\mathfrak{H}} (\varphi_{\sigma}, A_{ki}^*\psi)_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{k \in K, i \in I} (\varphi, c_i A_{ki} \rho A_{ki}^* \psi)_{\mathfrak{H}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Da $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ beliebig sind, gilt die Gleichheit für die Operatoren und man bekommt für die betrachtete Operation, die die Dichtematrix ρ des einlaufenden Zustands in die Dichtematrix $\mathcal{E}(\rho)$ des auslaufenden Zustands transformiert,

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{\sum_{k \in K, i \in I} c_i A_{ki} \rho A_{ki}^*}{\text{Tr}(\sum_{k \in K, i \in I} c_i A_{ki} \rho A_{ki}^*)}. \quad (1.12)$$

Die Operatoren A_{ki} heißen *Krausoperatoren* und beschreiben zusammen mit den positiven Zahlen $(c_i)_{i \in I}$ die Operation vollständig. Im Folgenden werden Eigenschaften der A_{ki} untersucht.

Es sei zunächst bemerkt, dass $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$ isomorph ist zur direkten Summe $\bigoplus_{i \in J} \mathfrak{H}_i$ mit $\mathfrak{H}_i := \mathfrak{H} \otimes \varphi'_i$. Jeder Summand \mathfrak{H}_i ist isomorph zu \mathfrak{H} , sodass es Isometrien $U_i : \mathfrak{H}_i \rightarrow \mathfrak{H}$, $U_i(\varphi \otimes \varphi'_i) := \varphi$ gibt mit den Eigenschaften

$$U_i U_j^* = \delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathfrak{H}} \quad (1.13a)$$

$$U_i^* U_i = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}_i}. \quad (1.13b)$$

Dasselbe ergibt sich, wenn man $(\psi'_k)_{k \in J}$ als Basis in \mathfrak{H}' verwendet. $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$ ist isomorph zu $\bigoplus_{k \in J} \bar{\mathfrak{H}}_k$ mit $\bar{\mathfrak{H}}_k := \mathfrak{H} \otimes \psi'_k \cong \mathfrak{H}$. Die Isometrien $V_k : \bar{\mathfrak{H}}_k \rightarrow \mathfrak{H}$, $V_k(\varphi \otimes \psi'_k) := \varphi$ haben analog die Eigenschaften

$$V_k V_l^* = \delta_{kl} \mathbb{1}_{\mathfrak{H}} \quad (1.14a)$$

$$V_k^* V_k = \mathbb{1}_{\bar{\mathfrak{H}}_k}. \quad (1.14b)$$

Aus der Definition (1.10) der Operatoren A_{ki} lässt sich nun ablesen, dass

$$A_{ki} = V_k S U_i^* \quad (1.15)$$

gilt. Als Produkt dreier Operatoren mit Norm Eins sind die A_{ki} damit durch $\|A_{ki}\| \leq 1$ beschränkt. Aus (1.13), (1.14) sowie der Unitarität von S folgt weiter

$$\sum_{i \in J} A_{ki} A_{li}^* = \delta_{kl} \mathbb{1}_{\mathfrak{H}} \quad (1.16a)$$

$$\sum_{k \in J} A_{ki}^* A_{kj} = \delta_{ij} \mathbb{1}_{\mathfrak{H}}. \quad (1.16b)$$

Fasst man $(A_{ki})_{(k,i) \in J \times J}$ als Operatormatrix auf der direkten Summe $\bigoplus_{i \in J} \mathfrak{H}$ auf, so bedeuten die Gleichungen (1.16) die Unitarität dieser Operatormatrix. In der Beschreibung (1.12) der Operation auf dem Quantensystem tritt jedoch nur die „Untermatrix“

$$A := (A_{ki})_{(k,i) \in K \times I} \quad (1.17)$$

auf. A lässt sich auffassen als Abbildung von $\mathfrak{h} := \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{H}$ nach $\bar{\mathfrak{h}} := \bigoplus_{k \in K} \mathfrak{H}$. Aus (1.16) folgt dann für A

$$A^*A \leq \mathbb{1}_{\mathfrak{h}} \quad \text{und} \quad AA^* \leq \mathbb{1}_{\bar{\mathfrak{h}}}. \quad (1.18)$$

Damit ist gezeigt, dass eine Operation auf einem Quantensystem immer mit Hilfe von Krausoperatoren, die die Eigenschaft (1.18) erfüllen, sowie positiven Zahlen c_i , $i \in I$, mit $\sum_{i \in I} c_i = 1$ beschrieben werden kann.

Die Umkehrung dieser letzten Aussage ist ebenfalls gültig. Seien K und I endliche oder abzählbar unendliche Indexmengen und A eine „ $K \times I$ “-Operatormatrix gemäß (1.17), die (1.18) erfüllt, sowie $(c_i)_{i \in I}$ positive Zahlen, die sich zu Eins summieren. Dann setze

$$\hat{\mathfrak{h}} := \bar{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{h} = \bigoplus_{k \in K} \mathfrak{H} \oplus \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{H}. \quad (1.19)$$

$\hat{\mathfrak{h}}$ ist isomorph zu $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$ mit einem Hilbertraum \mathfrak{H}' der Dimension $|K| + |I|$. Man wählt nun eine orthonormale Basis $\{\chi'_k; k \in K\} \cup \{\eta'_i; i \in I\}$ von \mathfrak{H}' und setzt

$$\rho' := \sum_{i \in I} c_i P_{\eta'_i} \quad \text{und} \quad Q' := \sum_{k \in K} P_{\chi'_k}. \quad (1.20)$$

Wegen (1.18) gilt

$$\mathbb{1}_{\bar{\mathfrak{h}}} - AA^* \geq 0 \quad \text{sowie} \quad \mathbb{1}_{\mathfrak{h}} - A^*A \geq 0 \quad (1.21)$$

und man kann nach Satz A.4 aus Anhang A die Wurzel aus diesen Operatoren ziehen. Mit

$$S := \begin{pmatrix} (\mathbb{1}_{\bar{\mathfrak{h}}} - AA^*)^{\frac{1}{2}} & A \\ A^* & -(\mathbb{1}_{\mathfrak{h}} - A^*A)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

ergibt sich direkt

$$((\varphi \otimes \chi'_k), S(\psi \otimes \eta'_i))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} = (\varphi, A_{ki}\psi)_{\mathfrak{H}} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{H}, \quad (1.23)$$

und es bleibt lediglich zu zeigen, dass S unitär ist. Dies folgt mit einem Argument aus [34, Anhang §4]. Sei dazu $T := (\mathbb{1}_{\bar{\mathfrak{h}}} - AA^*)^{\frac{1}{2}}$ und $Z := (\mathbb{1}_{\mathfrak{h}} - A^*A)^{\frac{1}{2}}$. Dann gilt

$$S^*S = SS^* = \begin{pmatrix} T & A \\ A^* & -Z \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} T^2 + AA^* & TA - AZ \\ A^*T - ZA^* & A^*A + Z^2 \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Die Diagonalelemente sind gleich $\mathbb{1}_{\bar{b}}$ bzw. $\mathbb{1}_b$. Es gilt ferner

$$T^2 A = (\mathbb{1}_{\bar{b}} - AA^*)A = A(\mathbb{1}_b - A^*A) = AZ^2 \quad (1.25)$$

und induktiv auch

$$T^{2n} A = AZ^{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.26)$$

Somit gilt $p(T^2)A = Ap(Z^2)$ für alle Polynome p . T und Z sind die positiven Wurzeln der Operatoren T^2 bzw. Z^2 und aus der Existenz einer Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen mit $p_n(T^2) \rightarrow T$ bzw. $p_n(Z^2) \rightarrow Z$ für $n \rightarrow \infty$ folgt auch

$$TA = AZ. \quad (1.27)$$

Außerdem gilt $A^*T = (TA)^* = (AZ)^* = ZA^*$ und daher verschwinden beide Nicht-Diagonalelemente in (1.24), was die Unitarität von S zeigt.

Dies beweist insgesamt den folgenden Satz, der eine vollständige Charakterisierung von Operationen auf einem Quantensystem liefert:

Satz 1.3 (Kraussches Theorem). *Sei (\mathfrak{H}, ρ) der Zustand eines Quantensystems. Dann wird eine Operation $(\mathfrak{H}', \rho', Q', S, \mathcal{E})$ auf dem Quantensystem beschrieben durch*

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{\sum_{k \in K, i \in I} c_i A_{ki} \rho A_{ki}^*}{\text{Tr}(\sum_{k \in K, i \in I} c_i A_{ki} \rho A_{ki}^*)} \quad (1.28)$$

mit einer Operatormatrix $(A_{ki})_{(k,i) \in K \times I}$, die (1.18) erfüllt, endlichen oder abzählbar unendlichen Indexmengen K und I sowie positiven Zahlen $(c_i)_{i \in I}$ mit $\sum_{i \in I} c_i = 1$. Umgekehrt ist jede Transformation \mathcal{E} der Dichtematrix ρ gemäß (1.28) mit Operatoren $A = (A_{ki})$, die (1.18) erfüllen, und positiven Zahlen $(c_i)_{i \in I}$ mit $\sum_{i \in I} c_i = 1$ Teil einer Operation $(\mathfrak{H}', \rho', Q', S, \mathcal{E})$, d.h. es gibt einen Hilbertraum \mathfrak{H}' , einen Zustand ρ' und einen Projektor Q' auf \mathfrak{H}' sowie einen unitären Operator S auf $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$, sodass die Transformation äquivalent durch

$$\mathcal{E}(\rho) = \hat{\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\text{Tr} \tilde{\rho}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho} = \text{Tr}'((\mathbb{1} \otimes Q')S(\rho \otimes \rho')S^*(\mathbb{1} \otimes Q')) \quad (1.29)$$

gegeben ist.

1.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten bei mehrfacher Messung

Man betrachte ein Quantensystem im Anfangszustand (\mathfrak{H}, ρ) , an dem aufeinander folgend zwei Messungen durchgeführt werden. Die erste sei beschrieben durch die Operation $(\mathfrak{H}', \rho', Q', S, \mathcal{E})$ und es werde nach der Messung die Eigenschaft E' , die mit dem Projektor Q' assoziiert ist, am Messapparat festgestellt. Mit Hilfe

der Krausoperatoren $(A_{ki})_{(k,i) \in K \times I}$, die zur Operation $(\mathfrak{H}', \rho', Q', S, \mathcal{E})$ gehören, lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}(E|E')$ angeben, mit der nach der Feststellung von E' die Eigenschaft E am Quantensystem beobachtet wird. Sei dazu Q der Projektor auf \mathfrak{H} , der mit E assoziiert ist, dann gilt

$$\mathcal{W}(E|E') = \text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)Q) = \frac{\text{Tr}(\sum_{k \in K, i \in I} c_i A_{ki}^* Q A_{ki} \rho)}{\text{Tr}(\sum_{k \in K, i \in I} c_i A_{ki}^* A_{ki} \rho)}. \quad (1.30)$$

Bemerkenswert an der Formel (1.30) ist, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}(E|E')$ von der genauen Form der Krausoperatoren A_{ki} abhängt, während in den Ausdruck im Nenner von (1.30), der die Wahrscheinlichkeit angibt, dass in der ersten Messung die Eigenschaft E' nachgewiesen wird, nur die Kombination $A_{ki}^* A_{ki}$ eingeht. Das bedingende Ereignis ist also durch die Angabe von $A_{ki}^* A_{ki}$ vollständig charakterisiert. Zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit hingegen wird noch zusätzlich die „Phaseninformation“ benötigt, durch welchen Operator A_{ki} das Ereignis genau realisiert wird. Dieses Phänomen hat in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie kein Analogon und wird in späteren Kapiteln wieder auftauchen.

Für die Anwendung von (1.30) folgt nun ein einfaches Beispiel, das außerdem die Beziehung zwischen dem Formalismus der Krausoperatoren und dem Kollapspostulat beleuchtet.

Beispiel. Auf einem (beliebigen) Quantensystem wird eine Messung betrachtet, bei der der Messapparat aus einem System besteht, das nur zwei Einstellungsmöglichkeiten besitzt. (Man denke etwa an den Spinzustand eines Teilchens mit Gesamtspin $\frac{1}{2}$.) Der Hilbertraum \mathfrak{H}' ist zweidimensional mit einem Orthonormalsystem $\{\chi'_0, \chi'_1\}$, wobei sich das Messsystem vor der Messung im Zustand χ'_0 befinde, also $\rho' = P_{\chi'_0}$. Das Quantensystem befinde sich ausgangs im Zustand (\mathfrak{H}, ρ) . Mit der Messung soll festgestellt werden, ob das Quantensystem die Eigenschaft E' besitzt, die mit dem Projektor P auf \mathfrak{H} assoziiert sei. Die Wechselwirkung zwischen Quanten- und Messsystem soll derart sein, dass eine Zustandsänderung im Messsystem (Spin-Flip) das Vorliegen der Eigenschaft E' anzeigen soll. Bleibt das Messsystem nach der Wechselwirkung im Anfangszustand, so liegt E' nicht vor. Der Operator S auf $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} S(\varphi \otimes \chi'_0) &= \frac{1}{2} \left(((\mathbf{1} - P)\varphi \otimes \chi'_0) + (P\varphi \otimes \chi'_1) \right) \\ S(\varphi \otimes \chi'_1) &= \frac{1}{2} \left((P\varphi \otimes \chi'_0) + ((\mathbf{1} - P)\varphi \otimes \chi'_1) \right). \end{aligned} \quad (1.31)$$

S erhält das Skalarprodukt auf $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'$, ist also unitär. Für die Basen (φ'_i) und (ψ'_k) von \mathfrak{H}' , wie sie im letzten Abschnitt eingeführt wurden, lässt sich jeweils die Basis $\{\chi'_0, \chi'_1\}$ wählen. Man berechnet dann

$$(\varphi, A_{10}\psi)_{\mathfrak{H}} = ((\varphi \otimes \chi'_1), S(\psi \otimes \chi'_0))_{\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}'} = (\varphi, P\psi)_{\mathfrak{H}}, \quad (1.32)$$

also

$$A_{10} = P . \quad (1.33)$$

Die übrigen Krausoperatoren ergeben sich analog zu

$$A_{01} = P \quad A_{00} = A_{11} = \mathbb{1} - P . \quad (1.34)$$

In diesem Fall sind die Krausoperatoren also gerade durch den Projektor P bzw. den Projektor $(\mathbb{1} - P)$ auf das orthogonale Komplement selbst gegeben.

Betrachtet werden soll nun die Operation, bei der nach der Wechselwirkung ein Spin-Flip im Messsystem aufgetreten ist, d.h. $Q' = P_{\chi'_1}$. Der einzige Krausoperator, der dann in die Abbildung \mathcal{E} eingeht, ist A_{10} . Es gilt

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{A_{10} \rho A_{10}}{\text{Tr}(A_{10} \rho A_{10})} = \frac{P \rho P}{\text{Tr}(P \rho)} , \quad (1.35)$$

wobei die Wahrscheinlichkeit, einen Spin-Flip und die Eigenschaft E' zu beobachten,

$$W(E') = \text{Tr}(P \rho) \quad (1.36)$$

beträgt. Trivialerweise gilt nun

$$P \mathcal{E}(\rho) = \mathcal{E}(\rho) \quad \text{und} \quad (\mathbb{1} - P) \mathcal{E}(\rho) = 0 . \quad (1.37)$$

Die Gleichungen (1.37) besagen, dass bei einer erneuten Messung unmittelbar nach der ersten die Eigenschaft E' mit Sicherheit wieder festgestellt wird, wenn auch in der ersten Messung E' beobachtet wurde. Dies ist der Inhalt des Kollapspostulats, das auf diese Weise aus der Behandlung des Messprozesses nach Hellwig und Kraus folgt.

In der Sprache von bedingten Wahrscheinlichkeiten nach (1.30) bedeutet dies

$$\mathcal{W}(E'|E') = \frac{\text{Tr}(A_{10} \rho A_{10} P)}{\text{Tr}(A_{10} \rho A_{10})} = 1 \quad (1.38)$$

und

$$\mathcal{W}(\neg E'|E') = \frac{\text{Tr}(A_{10} \rho A_{10} (\mathbb{1} - P))}{\text{Tr}(A_{10} \rho A_{10})} = 0 . \quad (1.39)$$

1.4 Relationale Zeit durch bedingte Wahrscheinlichkeiten

In den Arbeiten [16, 17, 18, 19] konstruieren Gambini, Porto und Pullin mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten eine relationale Beschreibung der Quantenmechanik, die ohne einen externen Zeitparameter t auskommt. Diese Konstruktion bildet den Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen in dieser Arbeit und wird nun (hauptsächlich [19] folgend) dargestellt.

Gegeben sei ein physikalisches Quantensystem im Zustand (\mathfrak{H}, ρ) . Zunächst wird unter den Observablen des Systems eine „Uhr“-Variable ausgewählt, relativ zu der die Dynamik der anderen Observablen beschrieben werden soll. Sei \mathcal{T} der mit der „Uhr“-Variablen assoziierte selbstadjungierte Operator auf \mathfrak{H} und sei eine weitere Observable durch einen zweiten selbstadjungierten Operator \mathcal{O} auf \mathfrak{H} gegeben. Nach dem Spektralsatz [33] gibt es zu den reellen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ Spektralprojektoren $P_{\mathcal{T}}(I)$ und $P_{\mathcal{O}}(J)$, sodass die Wahrscheinlichkeiten, zur Zeit t einen Messwert $\mathbf{t} \in I$ für die Observable \mathcal{T} bzw. einen Wert $\mathbf{o} \in J$ für \mathcal{O} zu finden, durch

$$W_t(\mathbf{t} \in I) = \frac{\text{Tr}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho(t))}{\text{Tr}(\rho(t))} \quad (1.40)$$

$$W_t(\mathbf{o} \in J) = \frac{\text{Tr}(P_{\mathcal{O}}(J) \rho(t))}{\text{Tr}(\rho(t))} \quad (1.41)$$

gegeben sind.⁴ Das Ziel ist nun die Berechnung der von t unabhängigen bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}(\mathbf{o} \in J | \mathbf{t} \in I)$, einen Messwert für \mathcal{O} in J zu erhalten, wenn für \mathcal{T} ein Wert in I gemessen wird. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall *zur Zeit* t eintritt, ist nach (1.30) und (1.35) durch

$$\mathcal{W}_t(\mathbf{o} \in J | \mathbf{t} \in I) = \frac{\text{Tr}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho(t) P_{\mathcal{T}}(I) P_{\mathcal{O}}(J))}{\text{Tr}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho(t))} \quad (1.42)$$

gegeben. Entscheidend für die Eliminierung des Parameters t ist die folgende Überlegung: $\mathcal{W}(\mathbf{o} \in J | \mathbf{t} \in I)$ ist der Quotient der mittleren Zeit, in der sowohl für \mathcal{O} ein Wert in J als auch für \mathcal{T} ein Wert in I gemessen wird, und der mittleren Zeit, in der (unabhängig von \mathcal{O}) für \mathcal{T} ein Wert in I gemessen wird. Man setzt

$$\mathcal{W}(\mathbf{o} \in J | \mathbf{t} \in I) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T dt W_t(\mathbf{o} \in J \cup \mathbf{t} \in I)}{\int_{-T}^T dt W_t(\mathbf{t} \in I)}. \quad (1.43)$$

Aus (1.1) folgt

$$W_t(\mathbf{o} \in J \cup \mathbf{t} \in I) = \mathcal{W}_t(\mathbf{o} \in J | \mathbf{t} \in I) \cdot W_t(\mathbf{t} \in I), \quad (1.44)$$

sodass man insgesamt

$$\mathcal{W}(\mathbf{o} \in J | \mathbf{t} \in I) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^T dt \text{Tr}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho(t) P_{\mathcal{T}}(I) P_{\mathcal{O}}(J))}{\int_{-T}^T dt \text{Tr}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho(t))} \quad (1.45)$$

erhält. Gleichung (1.45) bildet die Grundlage für die Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten in den Kapiteln 2 und 3.

⁴In diesem Abschnitt werden alle Rechnungen im Schrödingerbild durchgeführt, in dem die Dichtematrix von der Zeit abhängt, die Projektoren hingegen zeitunabhängig sind.

Bis zu diesem Punkt ist die Wahl der „Uhr“-Variablen noch völlig willkürlich. Um die Dynamik des Systems befriedigend darstellen zu können, ist es jedoch notwendig, eine Observable als „Uhr“ auszuwählen, die für die Zeitmessung innerhalb des Systems geeignet ist. Für die Dauer des betrachteten Experiments sollte die „Uhr“-Variable etwa monoton anwachsen oder abfallen. Ebenfalls wichtig ist, dass die „Uhr“ höchstens schwach mit dem Rest des Systems wechselwirkt.

Im Folgenden wird der idealisierte Fall betrachtet, in dem die „Uhr“ vollständig vom übrigen System absepariert werden kann. Es gilt dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\text{sys}} \otimes \mathfrak{H}_{\text{Uhr}}$ mit

$$\rho(t) = \rho_{\text{sys}}(t) \otimes \rho_{\text{Uhr}}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.46)$$

wobei die Zeitentwicklung sowohl von ρ_{sys} in $\mathfrak{H}_{\text{sys}}$ als auch von ρ_{Uhr} in $\mathfrak{H}_{\text{Uhr}}$ unitär ist. Die Spur in (1.45) faktorisiert und man erhält

$$\mathcal{W}(\mathfrak{o} \in J | \mathfrak{t} \in I) = \frac{\int dt \text{Tr}_{\text{sys}}(P_{\mathcal{O}}(J) \rho_{\text{sys}}(t)) \cdot \text{Tr}_{\text{Uhr}}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho_{\text{Uhr}}(t))}{\int dt \text{Tr}_{\text{sys}}(\rho_{\text{sys}}(t)) \cdot \text{Tr}_{\text{Uhr}}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho_{\text{Uhr}}(t))}, \quad (1.47)$$

wobei mit Tr_{sys} und Tr_{Uhr} die Spur in $\mathfrak{H}_{\text{sys}}$ bzw. $\mathfrak{H}_{\text{Uhr}}$ gemeint ist.⁵ Gibt es Intervalle $I \subset \mathbb{R}$, sodass die Größe

$$\mathcal{P}_t^I(\mathfrak{t}) := \frac{\text{Tr}_{\text{Uhr}}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho_{\text{Uhr}}(t))}{\int dt \text{Tr}_{\text{Uhr}}(P_{\mathcal{T}}(I) \rho_{\text{Uhr}}(t))} \quad (1.48)$$

existiert (dies ist im Wesentlichen die Forderung nach Monotonie der „Uhr“-Variablen), lässt sich $\mathcal{P}_t^I(\mathfrak{t})$ als Wahrscheinlichkeitsdichte auffassen, bei einer Messung von \mathcal{T} zur Zeit t einen Wert $\mathfrak{t} \in I$ zu finden. Es gilt

$$\int dt \mathcal{P}_t^I(\mathfrak{t}) = 1. \quad (1.49)$$

Definiert man zu I die *effektive Dichtematrix*

$$\rho^I(\mathfrak{t}) := \int dt \rho_{\text{sys}}(t) \mathcal{P}_t^I(\mathfrak{t}), \quad (1.50)$$

so erhält man für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{W}(\mathfrak{o} \in J | \mathfrak{t} \in I) = \frac{\text{Tr}_{\text{sys}}(P_{\mathcal{O}}(J) \rho^I(\mathfrak{t}))}{\text{Tr}_{\text{sys}}(\rho^I(\mathfrak{t}))}, \quad (1.51)$$

also einen zu (1.41) formal identischen Ausdruck. Dies zeigt, dass man durch die Wahl einer geeigneten „Uhr“-Variablen die zeitliche Entwicklung eines Systems durch eine effektive Dichtematrix beschreiben kann. An die Stelle der externen klassischen Zeit t tritt die intrinsische Quantenobservable \mathcal{T} . Die Dynamik einer

⁵In dieser Arbeit ist mit einem Integral ohne spezifiziertes Integrationsgebiet stets das Integral über die volle reelle Achse gemeint.

zweiten Observablen \mathcal{O} ist relational bezüglich \mathcal{T} durch (1.51) gegeben.

Gambini, Porto und Pullin zeigen in ihren Arbeiten weiter, dass aus der Beschreibung des Systems durch (1.51) ein Effekt der Dekohärenz folgt, d.h. reine Anfangszustände entwickeln sich in gemischte Zustände. Grund dafür ist allein die Tatsache, dass die „Uhr“-Variable als quantenmechanischer Freiheitsgrad ebenfalls Quantenfluktuationen unterworfen ist und keine perfekte klassische Uhr darstellt, wie sie in der Standardbeschreibung der Quantenmechanik angenommen wird. Für Details zu diesen Aussagen sei auf die Publikationen der Autoren verwiesen.

Kapitel 2

Relationale Zeit in der Brownschen Bewegung

Ein klassisches Beispiel, an dem sich die Ideen zur Eliminierung des Zeitparameters zu Gunsten einer relationalen Beschreibungsweise testen lassen, stellt die Brownsche Bewegung dar. In der Standardbehandlung der Brownschen Bewegung wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens in einem Gebiet¹ A mit der Zeit t parametrisiert. Wählt man nun als „Uhr“-Variable die Position eines zweiten Brownschen Teilchens, so lässt sich das Konzept einer relationalen Zeit auf die Brownsche Bewegung übertragen.

Es wird in diesem Kapitel gezeigt, dass die bedingten Wahrscheinlichkeiten, ein Teilchen in einem Gebiet A_1 anzutreffen, unter der Nebenbedingung, dass sich das Referenzteilchen gerade in einem zweiten Gebiet A_2 befindet, für die Brownsche Bewegung in $d \geq 3$ Dimensionen wohldefiniert und im Allgemeinen ungleich Null sind. Im Fall $d = 1$ oder 2 hingegen ist eine relationale Beschreibung in dieser Weise nicht möglich.

2.1 Die Brownsche Bewegung

Der Botaniker R. Brown beschrieb 1828 die zufälligen Bewegungen von Pollen in Wassertropfen, die er unter dem Mikroskop untersuchte. Erst rund 80 Jahre später fand A. Einstein in einer seiner drei berühmten Arbeiten aus dem Jahr 1905 [15] eine mathematisch präzise Beschreibung dieser Bewegung als stochastischen Prozess, für den charakteristisch ist, dass sich jede zukünftige Entwicklung nur auf Grundlage des gegenwärtigen Zustands ohne notwendige Kenntnis der Vorgeschichte vorhersagen lässt (sog. *Markov-Prozess*).

Sei $P(t, x)$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Brownschen Teilchens zur Zeit t am Ort $x \in \mathbb{R}^d$. Die Markov-Eigenschaft impliziert, dass die

¹In dieser Arbeit ist mit *Gebiet* stets eine beschränkte, nichtleere Teilmenge des \mathbb{R}^d gemeint.

Differentialgleichung, die die zeitliche Entwicklung von $P(t, x)$ bestimmt, von erster Ordnung in der Zeit sein muss. In der Tat lässt sich über den Kontinuumsimes des d -dimensionalen Random Walk auf dem Gitter zeigen [35], dass die Evolution von $P(t, x)$ gegeben ist durch die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, x) = D \Delta_d P(t, x) \quad (2.1)$$

mit dem d -dimensionalen Laplace-Operator $\Delta_d = \sum_{n=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ und der Diffusionskonstanten D , die im Folgenden gleich $\frac{1}{2}$ gesetzt wird. Mit der Randbedingung $P(0, x) = \delta^{(d)}(x)$, die besagt, dass das Teilchen zur Zeit Null im Ursprung startet, besitzt (2.1) für $t > 0$ die Lösung

$$P_0(t, x) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (2.2)$$

Dabei bedeutet $x^2 := \|x\|_2^2$ das Quadrat der euklidischen Norm im \mathbb{R}^d . Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, das Brownsche Teilchen zur Zeit $t > 0$ in einem Gebiet $A \subset \mathbb{R}^d$ zu finden, gegeben durch das Integral

$$W^{(d)}(A, t) = \int_A d^d x (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (2.3)$$

Eine interessante Eigenschaft der Brownschen Bewegung ist die *Rekurrenz* bzw. *Transienz* der Brownschen Pfade, wobei man sagt, ein Pfad sei rekurrent, wenn zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ jede beliebig kleine Umgebung von x mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft besucht wird, bzw. transient, wenn es eine Umgebung gibt, die mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft durchlaufen wird. Es gilt der bekannte

Satz 2.1. *Die Brownsche Bewegung ist für $d = 1, 2$ rekurrent und für $d \geq 3$ transient.*

Einen Beweis findet man etwa in [26], in den folgenden Überlegungen wird dieser Satz allerdings implizit mitbewiesen.

2.2 Bedingte Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Es ist die leitende Frage dieses Kapitels, ob es möglich ist, die Brownsche Bewegung in d Dimensionen ohne Rekurs auf den Zeitparameter t zu charakterisieren. Dafür geht man dazu über, nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$ zu fragen, mit der sich ein Teilchen in einem vorgegebenen Gebiet $A_1 \subset \mathbb{R}^d$ befindet, unter der Voraussetzung, dass sich das zweite Teilchen zur selben Zeit in einem zweiten Gebiet $A_2 \subset \mathbb{R}^d$ aufhält. Teilchen 2 soll wie Teilchen 1 zur Zeit Null im Ursprung starten. Sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$ wohldefiniert und ungleich Null, so ist eine relationale Beschreibung der Brownschen Bewegung möglich.

Die Zeit, die ein Brownsches Teilchen im Mittel während des Zeitintervalls $[0, T]$ im Gebiet A verbringt, beträgt

$$\int_0^T dt W^{(d)}(A, t) = \int_0^T dt \int_A d^d x (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (2.4)$$

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$ ist analog zu (1.43) der Quotient der mittleren Zeit, in der sowohl Teilchen 1 in A_1 als auch Teilchen 2 in A_2 ist, und der mittleren Aufenthaltsdauer von Teilchen 2 in A_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2) &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T dt (W^{(d)}(t, A_1) \cdot W^{(d)}(t, A_2))}{\int_0^T dt W^{(d)}(t, A_2)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T dt \int_{A_1} d^d x \int_{A_2} d^d y (2\pi t)^{-d} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}}}{\int_0^T dt \int_{A_2} d^d x (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Integrale in (2.5) bilden den Ausgangspunkt zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$.

Es wird im Folgenden gezeigt, dass für beliebige endliche Gebiete A_1 und A_2 in $d = 1$ oder 2 Dimensionen die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$ verschwindet. In diesen Fällen ist die Voraussetzung, dass sich das zweite Teilchen im Gebiet A_2 aufhält, durch die Wiederkehrigkeit der Brownschen Bewegung (Satz 2.1) für insgesamt unendlich lange Zeit erfüllt und stellt somit keine Einschränkung an den Zeitparameter dar. In höheren Dimensionen ($d \geq 3$) hingegen verbringt ein Teilchen nur eine endliche Zeit in einem beschränkten Gebiet, und es wird gezeigt, dass $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$ dann im Allgemeinen von Null verschieden ist und die bedingten Wahrscheinlichkeiten eine Eliminierung der Zeit ermöglichen. Für die spezielle Wahl der A_i , $i = 1, 2$, als Kugeln um den Ursprung (bzw. beliebige Intervalle für $d = 1$) können die bedingten Wahrscheinlichkeiten explizit berechnet werden.

2.3 Der Fall $d \geq 3$

In drei und höheren Dimensionen ist es möglich, die Integrale aus (2.5) geschlossen zu lösen. Es wird sich herausstellen, dass sowohl das Integral im Zähler als auch das Integral im Nenner einzeln für $T \rightarrow \infty$ konvergieren, sodass $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$ durch den Quotienten der Grenzwerte gegeben ist. Um dies einzusehen, wird zunächst die folgende Hilfsbehauptung bewiesen:

Proposition 2.2. *Für $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$, gilt mit $r > 0$ die Formel*

$$I_\infty(d, r) := \int_0^\infty dt (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{r^2}{2t}} = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{d}{2}} r^{2-d} \Gamma(-1 + \frac{d}{2}). \quad (2.6)$$

Beweis. Man betrachte das eigentliche Integral

$$I_T(d, r) := \int_0^T dt (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{r^2}{2t}}, \quad d \in \mathbb{N}, r > 0, \quad (2.7)$$

dessen Integrand für beliebiges d bezüglich t die Stammfunktion

$$\frac{1}{2} \pi^{-\frac{d}{2}} r^{2-d} \cdot \Gamma\left(-1 + \frac{d}{2}, \frac{r^2}{2t}\right) \quad (2.8)$$

besitzt, wobei $\Gamma(z, a)$ die *unvollständige Gammafunktion*, definiert durch

$$\Gamma(z, a) := \int_a^\infty dt t^{z-1} e^{-t}, \quad (2.9)$$

ist. Mit der Stammfunktion (2.8) lässt sich I_T berechnen zu

$$I_T(d, r) = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{d}{2}} r^{2-d} \Gamma\left(-1 + \frac{d}{2}, \frac{r^2}{2t}\right) \Big|_{t=0}^{t=T}. \quad (2.10)$$

Wegen $\lim_{a \rightarrow \infty} \Gamma(z, a) = 0$ gilt schließlich

$$I_T(d, r) = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{d}{2}} r^{2-d} \Gamma\left(-1 + \frac{d}{2}, \frac{r^2}{2T}\right). \quad (2.11)$$

Dies gilt in dieser Form für beliebiges d , der Limes $T \rightarrow \infty$ existiert aber nur für $d \geq 3$, da für $d = 1, 2$ das Integral

$$\Gamma\left(-1 + \frac{d}{2}, \frac{r^2}{2T}\right) = \int_{\frac{r^2}{2T}}^\infty dt t^{-2+\frac{d}{2}} e^{-t} \quad (2.12)$$

divergiert, wenn die untere Grenze gegen Null geht. Für $d \geq 3$ ist der Integrand jedoch integrierbar über ganz \mathbb{R}_+ und wegen $\lim_{a \rightarrow 0} \Gamma(z, a) = \Gamma(z)$ (falls $z > 0$) gilt (2.6). \square

Nun können die Integrale aus (2.5) einzeln betrachtet werden. Das Nennerintegral ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \int_{A_2} d^d x (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} &= \int_{A_2} d^d x I_\infty(d, \|x\|) \\ &= \frac{\pi^{-\frac{d}{2}}}{2} \Gamma\left(-1 + \frac{d}{2}\right) \int_{A_2} d^d x \|x\|^{2-d}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Das verbleibende Integral kann für den Fall $A_2 = K_{R_2} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| < R_2\}$, $R_2 > 0$, explizit berechnet werden. Aus der Rotationsinvarianz des Integranden folgt

$$\int_{K_{R_2}} d^d x \|x\|^{2-d} = d \cdot \kappa_d \int_0^{R_2} dr r^{d-1} r^{2-d} = d \kappa_d \frac{R_2^2}{2}, \quad (2.14)$$

wobei κ_d das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^d

$$\kappa_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})} \quad (2.15)$$

ist. Unter zweimaliger Benutzung der Identität $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ ergibt sich insgesamt für den Nenner aus (2.5)

$$\int_0^\infty dt \int_{K_{R_2}} d^d x (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} = \frac{1}{d-2} R_2^2. \quad (2.16)$$

Damit ist auch gezeigt, dass das Integral für jedes beschränkte Gebiet $A_2 \subset \mathbb{R}^d$ endlich ist. Die Tatsache, dass die mittlere Zeit, die ein Brownsches Teilchen in $d \geq 3$ Dimensionen in einem beschränkten Gebiet verbringt, endlich ist, beweist auch die in Satz 2.1 behauptete Transienz für $d \geq 3$.

Das Integral im Zähler von (2.5) ist ebenfalls endlich, und wenn für die Integrationsgebiete A_i Kugeln K_{R_i} , $R_i > 0$, $i = 1, 2$, angesetzt werden, berechnet man

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \int_{K_{R_1}} d^d x \int_{K_{R_2}} d^d y (2\pi t)^{-d} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} &= \int_{K_{R_1}} d^d x \int_{K_{R_2}} d^d y I_\infty(2d, \sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= \frac{\Gamma(d-1)}{2\pi^d} \cdot (d\kappa_d)^2 \int_0^{R_1} dr_1 \int_0^{R_2} dr_2 \left(\frac{r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \right)^{d-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Da für $r_1, r_2 > 0$ die Ungleichung

$$\frac{r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} \leq \frac{1}{2} \quad (2.18)$$

gilt, ist der Integrand von (2.17) beschränkt, sodass das Integral existiert. Tatsächlich lässt sich mit Hilfe von hypergeometrischen Funktionen sogar ein expliziter, aber sehr unhandlicher Ausdruck für (2.17) finden. Insbesondere bekommt man ein endliches und von Null verschiedenes Ergebnis, was bedeutet, dass $\mathcal{W}^{(d)}(K_{R_1}|K_{R_2}) > 0$ ist für $d \geq 3$.

Im etwas übersichtlicheren Spezialfall von $d = 3$ Dimensionen bekommt man für (2.17)

$$R_2^2 - \frac{8R_2^3 {}_2F_1(\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{R_2^2}{R_1^2})}{3\pi R_1} - \frac{8R_2^5 {}_2F_1(\frac{3}{2}, 3, \frac{7}{2}, -\frac{R_2^2}{R_1^2})}{15\pi R_1^3}. \quad (2.19)$$

Hierbei ist ${}_2F_1(a, b, c, z)$ die Gaußsche hypergeometrische Funktion². Das Integral

²Die Gaußsche hypergeometrische Funktion besitzt die hypergeometrische Reihendarstellung

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!},$$

wobei $(a)_k$, $(b)_k$ und $(c)_k$ Pochhammersymbole mit $(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+k-1)$ sind.

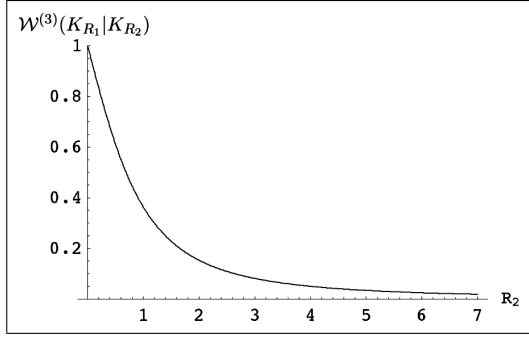


Abbildung 2.1: $\mathcal{W}^{(3)}(K_{R_1}|K_{R_2})$ aufgetragen gegen R_2 mit $R_1 = 1$.

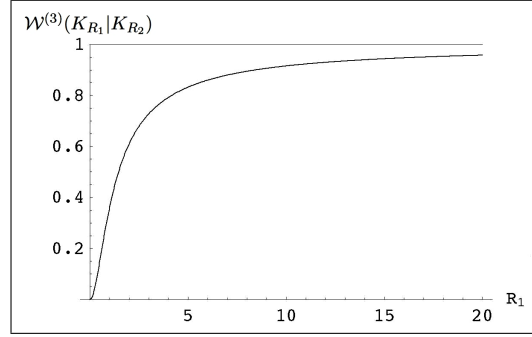


Abbildung 2.2: $\mathcal{W}^{(3)}(K_{R_1}|K_{R_2})$ aufgetragen gegen R_1 mit $R_2 = 1$.

(2.16) ist in drei Dimensionen gleich R_2^2 , sodass die bedingte Wahrscheinlichkeit durch

$$\mathcal{W}^{(3)}(K_{R_1}|K_{R_2}) = 1 - \left(\frac{8}{3\pi} \frac{R_2}{R_1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}, -\frac{R_2^2}{R_1^2}\right) + \frac{8}{15\pi} \frac{R_2^3}{R_1^3} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{7}{2}, -\frac{R_2^2}{R_1^2}\right) \right)$$

explizit gegeben ist. In Abbildung 2.1 ist $\mathcal{W}^{(3)}(K_{R_1}|K_{R_2})$ für festes $R_1 = 1$ gegen R_2 aufgetragen. Die Kurve startet für $R_2 = 0$ bei Eins, denn befindet sich Teilchen 2 noch in unmittelbarer Nähe des Ursprungs, ist erst wenig Zeit vergangen und Teilchen 1 hält sich mit hoher Wahrscheinlichkeit noch innerhalb der Einheitskugel auf. Mit größer werdendem R_2 wird die Einschränkung an den Zeitparameter durch die Forderung „Teilchen 2 innerhalb K_{R_2} “ immer schwächer, sodass die bedingte Wahrscheinlichkeit für $R_2 \rightarrow \infty$ schließlich gegen Null strebt.

Umgekehrtes Verhalten ergibt sich in Abbildung 2.2, in der $\mathcal{W}^{(3)}(K_{R_1}|K_{R_2})$ für festes $R_2 = 1$ gegen R_1 aufgetragen ist. Mit R_2 bleibt auch die Einschränkung an den Zeitparameter fixiert, folglich steigt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Teilchen 1 in K_{R_1} mit wachsendem R_1 monoton und erreicht Eins für $R_1 \rightarrow \infty$.

In $d \geq 3$ Dimensionen kann für die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$ auch der Grenzfall betrachtet werden, in dem das Gebiet A_2 auf einen einzigen Punkt zusammengezogen wird, $A_2 \rightarrow \{x_0\}$ mit einem $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. In diesem Grenzfall kann der Zeitparameter t auf sehr einsichtige Weise durch die Variable $a := \|x_0\|$ ersetzt werden. Man definiert als die bedingte Wahrscheinlichkeit, Teilchen 1 im Gebiet A anzutreffen, wenn sich Teilchen 2 gerade im Punkt x_0 befindet³,

$$\mathcal{W}^{(d)}(A|a) := \mathcal{W}^{(d)}(A|\{x_0\}) := \frac{\int_0^\infty dt \int_A d^d x (2\pi t)^{-d} e^{-\frac{x^2+a^2}{2t}}}{\int_0^\infty dt (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{a^2}{2t}}}. \quad (2.20)$$

³Tatsächlich hängt diese Wahrscheinlichkeit nur vom Abstand a von x_0 zum Ursprung ab und es handelt sich daher um die bedingte Wahrscheinlichkeit, Teilchen 1 in A anzutreffen, wenn sich Teilchen 2 gerade im Abstand $a > 0$ von seinem Startpunkt befindet.

Die t -Integrationen in Zähler und Nenner lassen sich mit Proposition 2.2 leicht ausführen und man bekommt

$$\mathcal{W}^{(d)}(A|a) = \pi^{-\frac{d}{2}} a^{d-2} \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \int_A d^d x \frac{1}{(x^2 + a^2)^{d-1}}. \quad (2.21)$$

Wählt man wieder $A = K_R$, $R > 0$, liefert dies

$$\mathcal{W}^{(d)}(K_R|a) = 2a^{d-2} \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^R dr \left(\frac{r}{r^2 + a^2} \right)^{d-1}. \quad (2.22)$$

Mit der unvollständigen Eulerschen Betafunktion⁴ schreibt sich das letzte Integral als

$$\int_0^R dr \left(\frac{r}{r^2 + a^2} \right)^{d-1} = \frac{1}{2} a^{2-d} B_{\frac{R^2}{R^2+a^2}} \left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - 1 \right), \quad (2.23)$$

sodass man insgesamt

$$\mathcal{W}^{(d)}(K_R|a) = \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)\Gamma(\frac{d}{2})} B_{\frac{R^2}{R^2+a^2}} \left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - 1 \right) \quad (2.24)$$

erhält. Im Spezialfall $d = 3$ zeigt man leicht die Identität

$$B_{\frac{R^2}{R^2+a^2}} \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) = \arctan \frac{R}{a} - \frac{aR}{R^2 + a^2} \quad (2.25)$$

und bekommt in drei Dimensionen schließlich für die bedingte Wahrscheinlichkeit, Teilchen 1 in K_R zu finden, wenn Teilchen 2 im Abstand a vom Startpunkt ist, die Formel

$$\mathcal{W}^{(3)}(K_R|a) = \frac{2}{\pi} \left(\arctan \frac{R}{a} - \frac{aR}{R^2 + a^2} \right). \quad (2.26)$$

Dies kann mit der „klassischen“ Beschreibung der Brownschen Bewegung verglichen werden, in der man die Wahrscheinlichkeit $W^{(d)}(K_R, t)$ angibt, ein Teilchen zur Zeit t in K_R anzutreffen. Nach (2.3) gilt

$$W^{(3)}(K_R, t) = \int_{K_R} d^3 x (2\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} = \operatorname{erf} \frac{R}{\sqrt{2t}} - \sqrt{\frac{2}{\pi t}} R e^{-\frac{R^2}{2t}} \quad (2.27)$$

mit der Gaußschen Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^x dt e^{-t^2}$. In den Abbildungen 2.3 und 2.4 werden die Standardbeschreibung durch $W^{(3)}(K_R, t)$ und die durch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{W}^{(3)}(K_R|a)$ neu gewonnene Beschreibung für

⁴Die unvollständige Eulersche Betafunktion ist definiert als

$$B_z(x, y) := \int_0^z du u^{x-1} (1-u)^{y-1}.$$

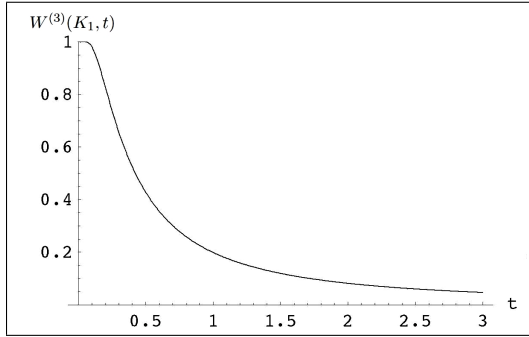


Abbildung 2.3: Die klassische Wahrscheinlichkeit $W^{(3)}(K_1, t)$, ein Brownsches Teilchen zur Zeit t in K_1 zu finden.

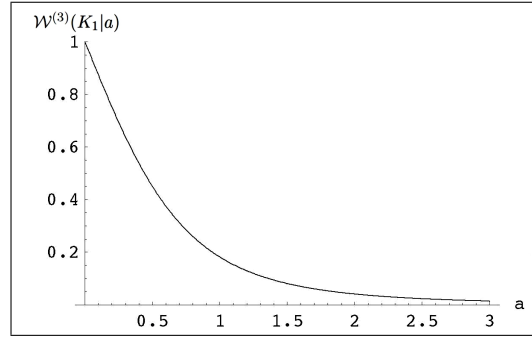


Abbildung 2.4: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}^{(3)}(K_1|a)$, Teilchen 1 in K_1 zu finden, wenn sich das Referenzteilchen 2 gerade im Abstand a von seinem Startpunkt befindet.

$R = 1$ gegenüber gestellt. Der Verlauf der beiden Kurven ist qualitativ identisch bis auf das Verhalten am Startpunkt $t = 0$ bzw. $a = 0$. Die Kurve für die klassische Wahrscheinlichkeit $W^{(3)}(K_1, t)$ startet mit horizontaler Tangente in $t = 0$, während die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}^{(3)}(K_1|a)$ mit Steigung $-4/\pi$ in $a = 0$ fällt. Grund für das unterschiedliche Verhalten ist, dass das im Ursprung startende Brownsche Teilchen erst eine endliche Zeit benötigt, bis es den Rand von K_1 erreicht hat. Dies erklärt die horizontale Tangente von $W^{(3)}$. Das zweite Referenzteilchen benötigt aber natürlich ebenfalls eine endliche Zeit, um einen Abstand a vom Startpunkt zu erreichen, was den linearen Abfall von $\mathcal{W}^{(3)}$ in $a = 0$ verursacht.

2.4 Der Fall $d = 1, 2$

Eine Beschreibung der Brownschen Bewegung durch bedingte Wahrscheinlichkeiten ist für $d = 1, 2$ nicht möglich, da in beiden Fällen $\mathcal{W}^{(d)}(A_1|A_2)$ für beliebige Gebiete A_1 und A_2 verschwindet. Der Fall $d = 2$ ist etwas einfacher und wird zuerst behandelt.

Den Zähler von (2.5) bekommt man durch eine Rechnung analog zu (2.17)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt \int_{K_{R_1}} d^2x \int_{K_{R_2}} d^2y (2\pi t)^{-2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} \\ &= 2 \int_0^{R_1} dr_1 \int_0^{R_2} dr_2 \frac{r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2} = R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} \ln \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Der Ausdruck ist also endlich, sodass auch das Integral über beliebige beschränkte Gebiete $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$ endlich bleibt. Der Nenner von (2.5) hingegen divergiert für

jedes Gebiet A_2 im Limes $T \rightarrow \infty$, denn es gilt

$$\int_0^T dt \int_{A_2} d^2x (2\pi t)^{-1} e^{-\frac{x^2}{2t}} = \frac{1}{2\pi} \int_{A_2} d^2x \int_{\frac{x^2}{2T}}^{\infty} dt' \frac{e^{-t'}}{t'} = \frac{1}{2\pi} \int_{A_2} d^2x \Gamma\left(0, \frac{x^2}{2T}\right). \quad (2.29)$$

Hierbei wurde die Substitution $t' := x^2/(2t)$ verwendet. Da $\Gamma(0, \frac{x^2}{2T})$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}^2$ divergiert, wenn T gegen Unendlich strebt, divergiert auch (2.29), sodass man im zweidimensionalen Fall insgesamt

$$\mathcal{W}^{(2)}(A_1|A_2) = 0 \quad \text{für beschränkte Gebiete } A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2, A_2 \neq \emptyset, \quad (2.30)$$

erhält. Die Divergenz von (2.29) bedeutet, dass die mittlere Zeit, die ein Brownsches Teilchen in einem beliebigen Gebiet verbringt, unendlich ist. Dies beweist die Rekurrenz aus Satz 2.1 für $d = 2$. Auf Grund dieser Rekurrenzeigenschaft beinhaltet die Voraussetzung, dass sich Teilchen 2 im beschränkten Gebiet A_2 aufhält, keinerlei Informationen über den Zeitparameter t , da diese Voraussetzung bei beliebig späten Zeiten immer wieder erfüllt wird. Zu beliebig späten Zeiten hält sich das Teilchen 1 jedoch mit annähernd gleichverteilter Wahrscheinlichkeit in ganz \mathbb{R}^2 auf, sodass daher $\mathcal{W}^{(2)}(A_1|A_2)$ für beschränktes A_1 verschwinden muss.

Für $d = 1$ erwartet man ein ähnliches Ergebnis und in der Tat gilt

$$\mathcal{W}^{(1)}(I_1|I_2) = 0 \quad \text{für beschränkte Intervalle } I_1, I_2 \subset \mathbb{R}, I_2 \neq \emptyset. \quad (2.31)$$

Um dies zu zeigen, berechnet man zunächst den Zähler von (2.5) mit $A_1 = I_1 := [a, b]$ und $A_2 = I_2 := [c, d]$, $a < b$, $c < d$,

$$\int_0^T dt \int_a^b dx \int_c^d dy (2\pi t)^{-1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b dx \int_c^d dy \Gamma\left(0, \frac{x^2+y^2}{2T}\right) \quad (2.32)$$

analog zu (2.29). Da im eindimensionalen Fall auch der Nenner divergieren wird, ist es erforderlich, die Divergenz von (2.32) genauer zu studieren. Für alle $z > 0$ gilt die Potenzreihendarstellung

$$\Gamma(0, z) = -\gamma - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n! n}. \quad (2.33)$$

Die Zahl γ ist die Euler-Mascheroni-Konstante ($\gamma \approx 0,577215\dots$), die auftretende Reihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{R}$ und nur der Logarithmus divergiert für $z \rightarrow 0$. Damit ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b dx \int_c^d dy \Gamma\left(0, \frac{x^2+y^2}{2T}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b dx \int_c^d dy \left(-\gamma - \ln \frac{x^2+y^2}{2T} \right) + o(1/T), \quad (2.34)$$

wobei $o(1/T)$ für Terme steht, die für $T \rightarrow \infty$ wie $1/T$ oder schneller gegen Null gehen. Führt man das Integral über den Logarithmus aus, so erhält man

$$\int_0^T dt \int_a^b dx \int_c^d dy (2\pi t)^{-1} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} = (b-a)(d-c) \ln T + \Omega(a, b, c, d, T). \quad (2.35)$$

$\Omega(a, b, c, d, T)$ steht dabei für eine Summe von Termen, die im Limes $T \rightarrow \infty$ entweder endlich sind oder gegen Null gehen. Das Zählerintegral ist also logarithmisch divergent.

Zu untersuchen bleibt noch das Nennerintegral aus (2.5), das für $d = 1$ elementar integrierbar ist. Man findet

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_c^d dx (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \\ &= \frac{1}{2} \left(c^2 - d^2 + (d^2 + T) \operatorname{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2T}}\right) - (c^2 + T) \operatorname{erf}\left(\frac{c}{\sqrt{2T}}\right) + \sqrt{\frac{2T}{\pi}} \left(d e^{-\frac{d^2}{2T}} - c e^{-\frac{c^2}{2T}} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Für die Fehlerfunktion gilt $\operatorname{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2T}}\right) = \sqrt{2/\pi} \cdot \frac{d}{\sqrt{T}} + o(T^{-3/2})$, wobei $o(T^{-3/2})$ wieder für Terme steht, die wie $T^{-3/2}$ oder schneller für $T \rightarrow \infty$ gegen Null gehen. Das Integral (2.36) ist ebenfalls divergent und man erhält

$$\int_0^T dt \int_c^d dx (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (d-c) \sqrt{T} + \tilde{\Omega}(c, d, T), \quad (2.37)$$

wobei $\tilde{\Omega}(c, d, T)$ wieder eine Summe aus endlichen oder für $T \rightarrow \infty$ verschwindenden Termen ist. Insgesamt gilt dann für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{W}^{(1)}([a, b] | [c, d]) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(b-a)(d-c) \ln T + \Omega(a, b, c, d, T)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} (d-c) \sqrt{T} + \tilde{\Omega}(c, d, T)} = 0 \quad (2.38)$$

wie oben behauptet. Die Divergenz von (2.37) beendet schließlich den Beweis von Satz 2.1 für den noch fehlenden Fall $d = 1$.

Kapitel 3

Relationale Zeit in der Quantenmechanik

Wie im vorigen Kapitel über die Brownsche Bewegung wird nun in der Quantenmechanik ein Zweiteilchensystem betrachtet und die Position eines Teilchens als „Uhr“-Variable für die Bewegung des anderen verwendet. An eine Arbeit von R. Brunetti und K. Fredenhagen [7] angelehnt, wird ein positiver Operator $W_{A_1|A_2}$ konstruiert, dessen Erwartungswert die bedingte Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\mathcal{W}(A_1|A_2)$ des Teilchens 1 im Gebiet A_1 unter der Voraussetzung, dass sich Teilchen 2 im Gebiet A_2 befindet, liefert.

Die Hauptschwierigkeit in der Definition von $W_{A_1|A_2}$ liegt darin, einen Operator zu finden, dessen Erwartungswert die Gesamtdauer ergibt, während der sich ein Teilchen im Mittel in einem bestimmten Gebiet aufhält. In [7] konstruieren Brunetti und Fredenhagen eine Observable, die den Zeitpunkt des Eintretens eines Ereignisses misst, und weite Teile dieser Konstruktion können für die Definition von $W_{A_1|A_2}$ verwendet werden. Da es in der Quantenmechanik jedoch keinen selbstadjungierten Operator gibt, der Zeitmessungen beschreibt¹, verwenden Brunetti und Fredenhagen eine Verallgemeinerung des Observablenbegriffs in Form von positiven operatorwertigen Maßen (*positive operator-valued measures*, POVMs) [11].

Im folgenden Abschnitt 3.1 werden POVMs als Verallgemeinerung von Spektralmaßen eingeführt, die in der Quantenmechanik üblicherweise zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Messwerten verwendet werden. Abschnitt 3.2 stellt die Konstruktion nach Brunetti und Fredenhagen vor, die in 3.3 dazu verwendet wird, den Operator $W_{A_1|A_2}$ zu definieren und einige seiner Eigenschaften zu untersuchen. Abschließend wird in Abschnitt 3.4 das POVM, das den Zeitpunkt des Eintreffens eines freien Teilchens im Ursprung misst, explizit berechnet

¹Dies wird zum ersten Mal in W. Paulis Buch [32] aus dem Jahr 1933 in einer Fußnote angemerkt. Gäbe es einen solchen selbstadjungierten Operator, so wäre das Spektrum des Hamiltonoperators gegeben durch die volle reelle Achse. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall.

sowie der Operator $W_{A_1|A_2}$ in zwei einfachen Beispielen bestimmt.

3.1 Positive operatorwertige Maße

In der Standardformulierung der Quantenmechanik² entsprechen den Observablen selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum \mathfrak{H} . Sei ein Zustand gegeben durch eine Dichtematrix ρ und sei A ein selbstadjungierter Operator. Dann gibt es nach dem Spektralsatz [33] das zu A gehörige Spektralmaß E^A , sodass die Wahrscheinlichkeit, im Zustand ρ für die Observable A einen Wert in der (messbaren) Menge $X \subset \mathbb{R}$ zu messen, durch

$$W_\rho^A(X) = \text{Tr}(\rho E^A(X)) \quad (3.1)$$

gegeben ist. Die Operatoren $E^A(X)$ sind hierbei Projektoren, $E^A(X) = E^A(X)^* = E^A(X)^2$, und die Abbildung $E^A(\bullet)$ heißt ein *projektorwertiges Maß*.

Es gibt jedoch Situationen, in denen experimentell messbare Größen auftreten, die nicht mit einem projektorwertigen Maß in obiger Weise beschrieben werden können. Ein Beispiel stellt etwa die in Kapitel 1 diskutierte Operation $(\mathfrak{H}', \rho', Q', S, \mathcal{E})$ auf dem Quantenzustand (\mathfrak{H}, ρ) dar, bei der ein Messsystem mit dem Quantensystem wechselwirkt und anschließend eine projektive Messung auf dem Messsystem (repräsentiert durch den Projektor Q' auf \mathfrak{H}') durchgeführt wird. Betrachtet man nur das Quantensystem, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, die mit Q' verknüpfte Eigenschaft nachzuweisen, in der Terminologie von Abschnitt 1.2

$$W_\rho^{Q'} = \text{Tr} \left(\rho \sum_{k \in K, i \in I} c_i A_{ki}^* A_{ki} \right). \quad (3.2)$$

Der Operator $(\sum_{k \in K, i \in I} c_i A_{ki}^* A_{ki})$ ist im Allgemeinen kein Projektor, sondern nur noch ein positiver Operator auf \mathfrak{H} . Es liegt daher nahe, den Begriff des Spektralmaßes in folgender Weise zu verallgemeinern:

Definition 3.1 (vgl. [11]). Sei \mathfrak{H} ein Hilbertraum und (Ω, Σ) ein Messraum³. Ein *positives operatorwertiges Maß (POVM)* auf (Ω, Σ) ist eine Abbildung $E : \Sigma \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, für die gilt

²siehe beispielsweise Kapitel 3 in [41]

³Für eine nichtleere Menge Ω ist (Ω, Σ) ein Messraum, falls Σ ein System von Teilmengen von Ω ist, das die Bedingungen

- (a) $\Omega \in \Sigma$
- (b) $X \in \Sigma \implies \Omega \setminus X \in \Sigma$
- (c) $(X_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \Sigma \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \in \Sigma$

erfüllt.

- (i) $E(X) \geq 0$ für alle $X \in \Sigma$,
- (ii) $E(\Omega) = \mathbb{1}$,
- (iii) $E(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)$ für alle paarweise disjunkten Mengen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$. Dabei konvergiert die Summe in der schwachen Operatortopologie⁴ von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Sei ein physikalisches System in einem Zustand, der durch die Dichtematrix ρ gegeben ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Messwert der zum POVM E gehörenden Observablen in der Menge $X \in \Sigma$ liegt, ist dann gegeben durch

$$W_{\rho}^E(X) = \text{Tr}(\rho E(X)) . \quad (3.3)$$

Die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) stellen sicher, dass W_{ρ}^E ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, Σ) ist.

Der POVM-Formalismus enthält die Standardformulierung als einen Spezialfall. Falls $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit den Borelmengen⁵ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und das POVM E multiplikativ ist, wenn also gilt

$$E(X \cap Y) = E(X)E(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) , \quad (3.4)$$

dann gilt auch $E(X) = E(X)^2$ und $E(X) = E(X)^*$ sowieso, da $E(X)$ positiv ist (Lemma A.3 aus Anhang A). In diesem Fall ist E also ein Spektralmaß, dessen erstes Moment

$$A := \int_{\mathbb{R}} x \, dE(x) \quad (3.5)$$

nach dem Spektralsatz [33] eindeutig einen selbstadjungierten Operator definiert, und man erhält die Standardformulierung zurück. Im nächsten Abschnitt wird jedoch ein POVM definiert, für das die Eigenschaft (3.4) nicht gilt.

3.2 Der Zeitpunkt eines Ereignisses als Observable

In [7] konstruieren Brunetti und Fredenhagen eine Observable, die den Zeitpunkt des Eintretens eines Ereignisses misst. Die Konstruktion wird in diesem Abschnitt vorgestellt und im nächsten dazu verwendet, den Operator $W_{A_1|A_2}$ zu definieren, der mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}(A_1|A_2)$ assoziiert ist. An einigen Stellen der Konstruktion werden Aussagen aus Anhang A verwendet.

⁴Konvergenz von $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ gegen $T \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ in der schwachen Operatortopologie auf einem Hilbertraum \mathfrak{H} bedeutet die Konvergenz von $(x, T_n y)$ gegen $(x, T y)$ in \mathbb{C} für alle $x, y \in \mathfrak{H}$.

⁵Die Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind definiert als das kleinste System von Teilmengen von \mathbb{R} , das alle offenen Intervalle enthält, sodass $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ein Messraum ist.

Sei P ein positiver Operator auf einem Hilbertraum \mathfrak{H} . Durch einen selbstadjungierten Hamiltonoperator H sei eine Zeitentwicklung auf \mathfrak{H} erklärt und der Heisenbergoperator⁶ $P(t) = e^{iHt} P e^{-iHt}$ messe die Wahrscheinlichkeit, dass ein vorgegebenes Ereignis zur Zeit t eintritt. Da $P(t)$ für jedes t ein positiver Operator ist, gilt auch für jedes beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}$

$$T_P(I) := \int_I dt P(t) \geq 0. \quad (3.6)$$

Ist P ein Projektor auf das Gebiet A , dann können die Erwartungswerte von $T_P(I)$ interpretiert werden als die Zeit, die das Teilchen im Mittel während des Zeitintervalls I im Gebiet A verbringt.

Ziel ist nun, den Operator $T_P := T_P(\mathbb{R})$ zu konstruieren und auf denjenigen Unterraum $\tilde{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H}$ einzuschränken, auf dem die Erwartungswerte von T_P endlich und von Null verschieden sind. Dazu sei zunächst bemerkt, dass die Operatoren $T_P(I)$ ein monoton wachsendes Netz⁷ von positiven Operatoren mit

$$T_P(I) \geq T_P(J), \quad \text{falls } I \supset J, \quad (3.7)$$

bilden. Aus der Positivität von $T_P(I)$ folgt nach Lemma A.3 die Selbstadjungiertheit. Ferner ist wegen der Positivität -1 kein Eigenwert von $T_P(I)$, sodass die Operatoren $(\mathbf{1} + T_P(I))$ bijektiv sind und ein stetiges Inverses besitzen. Man setzt

$$C_P(I) := (\mathbf{1} + T_P(I))^{-1}. \quad (3.8)$$

Die $C_P(I)$ bilden ein monoton fallendes Netz von positiven Operatoren, denn es gilt in diesem Fall $C_P(I) \leq C_P(J)$, falls $I \supset J$. Man setzt daher $C_P := C_P(\mathbb{R}) := \inf_{I \subset \mathbb{R}} C_P(I)$ in dem Sinne, dass die Erwartungswerte von C_P durch

$$(\Psi, C_P \Psi) = \inf_{I \subset \mathbb{R}} (\Psi, C_P(I) \Psi) \quad (3.9)$$

für alle $\Psi \in \mathfrak{H}$ gegeben sind. Nach Lemma A.2 bestimmt dies den Operator C_P eindeutig. Würde man T_P mit dem Operator $(C_P^{-1} - \mathbf{1})$ auf ganz \mathfrak{H} identifizieren, so wäre der Erwartungswert von T_P in Zuständen aus dem Eigenraum von C_P zum Eigenwert 1 gleich Null und unendlich für Zustände aus dem Eigenraum von C_P zum Eigenwert 0. Sei daher $\tilde{\mathfrak{H}}$ das orthogonale Komplement dieser beiden Eigenräume, dann definiert man den linearen Operator $T_P : \tilde{\mathfrak{H}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$ durch

$$T_P := C_P^{-1} - \mathbf{1} \Big|_{\tilde{\mathfrak{H}}}. \quad (3.10)$$

Dass $T_P(\tilde{\mathfrak{H}}) \subset \tilde{\mathfrak{H}}$ gilt, sieht man, da $C_P T_P = C_P(C_P^{-1} - \mathbf{1}) = \mathbf{1} - C_P$ ist. Wenn also $C_P T_P$ auf einem Zustand den Eigenwert 0 bzw. 1 hat, so hat C_P auf diesem Zustand den Eigenwert 1 bzw. 0.

⁶In dieser Arbeit werden Einheiten benutzt, in denen die Planck-Konstante \hbar gleich Eins ist.

⁷Ein Netz ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der Folge. Sei X eine gerichtete Menge und Y eine Menge, dann heißt eine Abbildung $x : X \rightarrow Y$ ein Netz. Im vorliegenden Fall ist X die Menge der (messbaren) Teilmengen von \mathbb{R} mit der Mengeninklusion als Richtung und Y die Menge der positiven Operatoren auf \mathfrak{H} .

T_P ist auf $\tilde{\mathfrak{H}}$ invertierbar und es gilt $T_P^{-1} > 0$, sodass man nach Satz A.4 die Wurzel ziehen kann. Nun kann das POVM, das der gesuchten Observablen entspricht, als

$$E_P(I) := T_P^{-\frac{1}{2}} T_P(I) T_P^{-\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

für (messbares) $I \subset \mathbb{R}$ definiert werden. Die $E_P(I)$ sind positive Operatoren mit $E_P(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$. Damit sind die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 3.1 erfüllt. Um zu zeigen, dass auch (iii) gilt, seien $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkte Intervalle. Es gilt

$$T_P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{I_n} dt P(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_{I_n} dt P(t). \quad (3.12)$$

Zu zeigen ist die schwache Konvergenz der rechten Seite. Wertet man (3.12) im Erwartungswert mit einem Zustand $\Psi \in \mathfrak{H}$ aus, bilden die Partialsummen in \mathbb{R} eine beschränkte, monoton wachsende und damit konvergente Folge. Nach dem Beweis von Lemma A.2 konvergieren dann auch alle Matrixelemente von (3.12), was die Konvergenz von $E_P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n)$ gegen $\sum_{n \in \mathbb{N}} E_P(I_n)$ in der schwachen Operator-topologie zeigt.

Damit handelt es sich bei $E_P(\bullet)$ um ein POVM auf $\tilde{\mathfrak{H}}$, das wie folgt interpretiert werden kann: Befindet sich das System im Zustand gegeben durch die Dichtematrix ρ , dann ist

$$W_\rho^{E_P}(I) = \text{Tr}(\rho E_P(I)) = \text{Tr} \left(\rho T_P^{-\frac{1}{2}} T_P(I) T_P^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.13)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis, dessen Eintreten mit dem Operator P beschrieben wird, während des Zeitintervalls $I \subset \mathbb{R}$ eintritt. Man sieht auch, dass die Multiplikativitätseigenschaft (3.4) für E_P im Allgemeinen nicht gilt, sodass es keinen selbstadjungierten Operator gibt, mit dem die hier konstruierte Observable assoziiert werden kann.

In Unterabschnitt 3.4.1 wird für ein freies Teilchen in einer Dimension explizit das POVM angegeben, das den Ankunftszeitpunkt des Teilchens am Ursprung misst.

Bemerkung. Die Definition (3.11) ist nicht die einzige Möglichkeit, ein POVM mit der gesuchten Interpretation zu definieren. Man kann ebenfalls

$$\tilde{E}_P(I) := \tilde{T}^* T_P(I) \tilde{T} \quad (3.14)$$

verwenden, wobei \tilde{T} ein Operator mit der Eigenschaft $\tilde{T}^* T_P \tilde{T} = \mathbf{1}$ ist. Die Wahrscheinlichkeit

$$W_\rho^{\tilde{E}_P}(I) = \text{Tr} \left(\rho \tilde{T}^* T_P(I) \tilde{T} \right) \quad (3.15)$$

hängt dann von \tilde{T} ab. In der obigen Konstruktion wird die Wahl $\tilde{T} = T_P^{-1/2}$ getroffen. Eine solche Abhängigkeit von der Darstellung durch Operatoren wurde bereits in Kapitel 1 bei der Diskussion der bedingten Wahrscheinlichkeiten (1.30) für hintereinander ausgeführte Messungen festgestellt.

3.3 Konstruktion und Eigenschaften von $W_{A_1|A_2}$

3.3.1 Konstruktion

Gegeben sei ein System bestehend aus zwei Teilchen. Es wird nun der Operator $W_{A_1|A_2}$ konstruiert, dessen Erwartungswert im Zweiteilchenzustand ρ die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}_\rho(A_1|A_2)$ angibt, Teilchen 1 im Gebiet A_1 anzutreffen, wenn man zur selben Zeit Teilchen 2 in Gebiet A_2 findet.

Seien P_{A_i} Projektionsoperatoren, die im Ortsraum auf die Gebiete A_i projizieren, $i = 1, 2$. Man betrachte auf dem Hilbertraum $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \otimes \mathfrak{H}_2$ des Zweiteilchensystems die Heisenbergoperatoren

$$A(t) := \mathbf{1} \otimes P_{A_2}(t) \quad (3.16)$$

$$B(t) := P_{A_1}(t) \otimes P_{A_2}(t) . \quad (3.17)$$

$A(t)$ und $B(t)$ sind positive Operatoren mit $A(t) \geq B(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zunächst sei T_A der nach (3.10) definierte zu $A(t)$ gehörige Operator. Der Raum $\tilde{\mathfrak{H}}$, auf dem T_A nur endliche und von Null verschiedene Erwartungswerte besitzt, sei im Folgenden mit \mathcal{H} bezeichnet. Der Operator T_B kann auf ganz \mathcal{H} definiert werden,

$$T_B : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}, \quad T_B := C_B^{-1} - \mathbf{1}|_{\mathcal{H}} . \quad (3.18)$$

Die Erwartungswerte von T_B sind auf \mathcal{H} immer noch endlich, können aber auch Null sein. Auf \mathcal{H} gilt immer noch

$$T_A \geq T_B . \quad (3.19)$$

Nun lässt sich der gesuchte Operator $W_{A_1|A_2}$ auf dem Raum \mathcal{H} definieren als

$$W_{A_1|A_2} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad W_{A_1|A_2} := T_A^{-\frac{1}{2}} P_{\mathcal{H}} T_B P_{\mathcal{H}} T_A^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.20)$$

wobei $P_{\mathcal{H}}$ die Projektion auf \mathcal{H} ist. $W_{A_1|A_2}$ ist positiv, durch Eins nach oben beschränkt und gestattet die Interpretation als bedingte Wahrscheinlichkeit gemäß

$$\mathcal{W}_\rho(A_1|A_2) = \text{Tr}(\rho W_{A_1|A_2}), \quad (3.21)$$

wenn sich das System in einem Zustand ρ befindet, der „in \mathcal{H} liegt“, wenn also $\rho = P_{\mathcal{H}} \rho P_{\mathcal{H}}$ gilt. Für solche Zustände lässt sich die Position des zweiten Teilchens als „Uhr“ für die Bewegung des ersten einsetzen. Eine Eliminierung des Zeitparameters t zu Gunsten der bedingten Wahrscheinlichkeiten (3.21) ist dann möglich.

3.3.2 Eigenschaften

In diesem Unterabschnitt wird untersucht, inwiefern sich die Eigenschaften bedingter Wahrscheinlichkeiten aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie auf die hier verwendeten positiven Operatoren $W_{A_1|A_2}$ übertragen.

Die entscheidenden Eigenschaften bedingter Wahrscheinlichkeiten in der klassischen Theorie⁸ sind die folgenden:

Satz 3.2. *Bezeichne $P(\mathcal{A})$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses \mathcal{A} und $P(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von \mathcal{A} unter der Voraussetzung \mathcal{B} . Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ Ereignisse und seien $(\mathcal{B}_n)_{n \in M}$, M eine Indexmenge, paarweise unvereinbare Ereignisse⁹, sodass $P(\bigcup_{n \in M} \mathcal{B}_n) = 1$ ist. Dann gilt*

$$(i) \quad P(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = P(\mathcal{A}_1|\mathcal{A}_2) P(\mathcal{A}_2),$$

$$(ii) \quad P(\mathcal{A}) = \sum_{n \in M} P(\mathcal{A}|\mathcal{B}_n) P(\mathcal{B}_n),$$

$$(iii) \quad P(\mathcal{B}_n|\mathcal{A}) = \frac{P(\mathcal{A}|\mathcal{B}_n) P(\mathcal{B}_n)}{\sum_{i \in M} P(\mathcal{A}|\mathcal{B}_i) P(\mathcal{B}_i)}.$$

Um diese Eigenschaften für die Operatoren $W_{A_1|A_2}$ zu prüfen, wird Folgendes vereinbart: \mathcal{A}_i sei für $i = 1, 2$ das Ereignis, Teilchen i im Gebiet A_i aufzufinden. An die Stelle von Eigenschaft (i) tritt dann

Proposition 3.3. *Seien $A(t) := \mathbf{1} \otimes P_{A_2}(t)$ und $B(t) := P_{A_1}(t) \otimes P_{A_2}(t)$ wie oben. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Unterabschnitt 3.3.1*

$$P_{\mathcal{H}} T_B P_{\mathcal{H}} = T_A^{\frac{1}{2}} W_{A_1|A_2} T_A^{\frac{1}{2}}. \quad (3.22)$$

Der Beweis ist trivial. Ersetzt werden hier die Wahrscheinlichkeiten $P(\mathcal{A}_2)$ bzw. $P(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$ durch die entsprechenden Gesamtaufenthaltsdauern, repräsentiert durch die Operatoren T_A bzw. T_B . Dies ist nötig, da in der Beschreibung des Systems mit Hilfe der Operatoren $W_{A_1|A_2}$ die t -Abhängigkeit gerade eliminiert wurde, die Größen $P(\mathcal{A}_i)$ hingegen zeitabhängig sind. Außerdem ist in (3.22) die Ordnung der Operatoren auf der rechten Seite wichtig, da T_A und $W_{A_1|A_2}$ nicht kommutieren. Während es in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie natürlich nicht auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt, reproduziert sich das klassische Ergebnis im Operatorkalkül nur, wenn die Faktoren $T_A^{1/2}$ symmetrisch links und rechts von $W_{A_1|A_2}$ stehen. (Nur dann bleibt auch die Positivität des Operators erhalten.)

Gemäß dieser Einschränkungen lässt sich auch Eigenschaft (ii) verallgemeinern:

Proposition 3.4. *Seien $(I_n)_{n \in M}$, M eine höchstens abzählbare Indexmenge, sowie J Gebiete im \mathbb{R}^d mit $I_n \cap I_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und $\bigcup_{n \in M} I_n = \mathbb{R}^d$. Seien weiter $A_n(t) := \mathbf{1} \otimes P_{I_n}(t)$ und $D(t) := P_J(t) \otimes \mathbf{1}$. Sei $\tilde{\mathfrak{H}}^{(n)}$ für $n \in M$ gemäß Abschnitt 3.2 der Unterraum, auf dem T_{A_n} wohldefiniert ist, und seien $\tilde{\mathcal{H}} := \bigcap_{n \in M} \tilde{\mathfrak{H}}^{(n)}$ sowie $P_{\tilde{\mathcal{H}}}$ der Projektor auf $\tilde{\mathcal{H}}$. Dann gilt auf $\tilde{\mathcal{H}}$*

$$P_{\tilde{\mathcal{H}}} T_D P_{\tilde{\mathcal{H}}} = \sum_{n \in M} T_{A_n}^{\frac{1}{2}} W_{J|I_n} T_{A_n}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

⁸siehe beispielsweise [4]

⁹Paarweise unvereinbar bedeutet $P(\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m) = 0$ für $n \neq m$.

Beweis. Für $n \in M$ sei $B_n(t) := P_J(t) \otimes P_{A_n}(t)$. Auf $\tilde{\mathcal{H}}$ ist dann

$$W_{J|I_n} = T_{A_n}^{-\frac{1}{2}} P_{\tilde{\mathcal{H}}} T_{B_n} P_{\tilde{\mathcal{H}}} T_{A_n}^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.24)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n \in M} T_{A_n}^{\frac{1}{2}} W_{J|I_n} T_{A_n}^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n \in M} P_{\tilde{\mathcal{H}}} T_{B_n} P_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ &= P_{\tilde{\mathcal{H}}} \left(\sum_{n \in M} \int dt P_J(t) \otimes P_{I_n}(t) \right) P_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ &= P_{\tilde{\mathcal{H}}} \left(\int dt P_J(t) \otimes \mathbf{1} \right) P_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ &= P_{\tilde{\mathcal{H}}} T_D P_{\tilde{\mathcal{H}}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Von der zweiten zur dritten Zeile werden Summation und Integration vertauscht. Falls M endlich ist, ist dies trivialerweise erlaubt. Für abzählbar unendliches M folgt die Vertauschbarkeit aus dem Satz über monotone Konvergenz. Außerdem wurde $\sum_n P_{I_n} = \mathbf{1}$ verwendet, was aus den Voraussetzungen über die (I_n) folgt. \square

Die Eigenschaft (iii) gilt ebenfalls entsprechend:

Proposition 3.5. *Mit den Voraussetzungen aus Proposition 3.4 und $B_n(t) := P_J(t) \otimes P_{A_n}(t)$ gilt auf $\tilde{\mathcal{H}}$*

$$\begin{aligned} &P_{\tilde{\mathcal{H}}} T_D^{-\frac{1}{2}} P_{\tilde{\mathcal{H}}} T_{B_n} P_{\tilde{\mathcal{H}}} T_D^{-\frac{1}{2}} P_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ &= \left(\sum_{i \in M} T_{A_i}^{\frac{1}{2}} W_{J|I_i} T_{A_i}^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} T_{A_n}^{\frac{1}{2}} W_{J|I_n} T_{A_n}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in M} T_{A_j}^{\frac{1}{2}} W_{J|I_j} T_{A_j}^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Beweis. Nach Proposition 3.4 gilt $\sum_{i \in M} T_{A_i}^{\frac{1}{2}} W_{J|I_i} T_{A_i}^{\frac{1}{2}} = T_D$ auf $\tilde{\mathcal{H}}$. Zusammen mit Proposition 3.3 beweist dies die Aussage. \square

Man findet also eine genaue Entsprechung zwischen den quantenmechanischen Operatoren und den klassischen bedingten Wahrscheinlichkeiten, wenn man auf der Operatorseite zwei Punkte beachtet:

- Einschränkung auf einen geeigneten Raum \mathcal{H} , auf dem die Erwartungswerte von Operatoren der Form $(\mathbf{1} \otimes P)$ mit einem Projektor P endlich und von Null verschieden sind, und
- Beachtung der Nichtkommutativität und damit der Reihenfolge in Produkten von Operatoren.

3.4 Beispiele

In diesem Abschnitt wird zunächst für ein Teilchen, das sich frei in einer Dimension bewegt, das POVM konstruiert, das den Zeitpunkt misst, an dem das freie Teilchen den Ursprung erreicht. Daran anknüpfend kann für zwei freie Teilchen leicht der Operator $W_{A_1|A_2}$ angegeben werden. Abschließend wird der Operator $W_{A_1|A_2}$ für zwei nicht miteinander wechselwirkende Teilchen in einem harmonischen Oszillatorpotential bestimmt.

3.4.1 Ankunftszeit eines freien Teilchens am Ursprung

Gegeben sei ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension. Der Hamiltonoperator ist dann durch

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (3.27)$$

auf dem Hilbertraum $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R})$ gegeben. Es wird nun Abschnitt 3.2 folgend das POVM $E_{(b)} := E_P$ bestimmt, wobei $P \equiv P_{[-b,b]}$ der Projektionsoperator ist, der im Ortsraum auf das Intervall $[-b, b]$ mit $b > 0$ projiziert. $E_{(b)}$ ist dann die Observable, die der Messung des Ankunftszeitpunktes des Teilchens im Intervall $[-b, b]$ entspricht. Das Maß wird schließlich im Limes $b \rightarrow 0$ betrachtet.

Zunächst ist für ein messbares $I \subset \mathbb{R}$ der Operator

$$T_P(I) = \int_I dt P(t) \quad (3.28)$$

zu bestimmen, wobei $P(t) = e^{iHt} P e^{-iHt}$ ist. Mit der Ortsraumwellenfunktion $\check{\phi}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int dk \phi(k) e^{ikx}$ gilt

$$(\phi, T_P(I) \phi) = \int_I dt \int dx \overline{\check{\phi}(x)} e^{iHt} \mathbf{1}_{[-b,b]}(x) e^{-iHt} \check{\phi}(x), \quad (3.29)$$

wobei $\mathbf{1}_{[-b,b]}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-b, b]$ ist. Die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion ist gegeben durch

$$\widehat{\mathbf{1}_{[-b,b]}}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kb}{k}, \quad (3.30)$$

sodass man für (3.29) bekommt

$$(\phi, T_P(I) \phi) = \int_I dt \int dk \int dk' \overline{\phi(k)} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(k-k')b}{k-k'} e^{it(\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m})} \phi(k'). \quad (3.31)$$

Der Integralkern¹⁰ von $T_P(I)$ lässt sich nun ablesen zu

$$T_P(I)(k, k') = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(k-k')b}{k-k'} \int_I dt e^{it(\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m})}. \quad (3.32)$$

¹⁰Der Integralkern $T_P(k, k')$ des Operators T_P ist definiert durch $(T_P \phi)(k) = \int dk' T_P(k, k') \phi(k')$.

Für den Operator $T_P = T_P(\mathbb{R})$ lässt sich die Integration über t ausführen und man erhält

$$\begin{aligned} T_P(k, k') &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(k - k')b}{k - k'} \cdot 2\pi \delta\left(\frac{k^2}{2m} - \frac{k'^2}{2m}\right) \\ &= \frac{\sin(k - k')b}{k - k'} \frac{2m}{|k|} (\delta(k - k') + \delta(k + k')) \\ &= \frac{2mb}{|k|} \delta(k - k') + \frac{m}{k|k|} \sin 2kb \delta(k + k'). \end{aligned} \quad (3.33)$$

$\delta(k + k')$ ist der Integalkern des Paritätsoperators Π mit $\Pi\phi(k) := \phi(-k)$, sodass insgesamt gilt

$$(T_P \phi)(k) = \frac{2mb}{|k|} \left(1 + \frac{\sin 2kb}{2kb} \Pi\right) \phi(k). \quad (3.34)$$

Der erste Summand ist gerade die Gesamtzeit, in der sich ein *klassisches* freies Teilchen mit Geschwindigkeit $|k|/m$ in einem Intervall der Länge $2b$ aufhält. Der zweite Summand stellt eine Quantenkorrektur dar.

Zur Bestimmung des Definitionsbereichs \mathcal{H} von T_P müssen die Eigenräume des Operators $C_P = (\mathbb{1} + T_P)^{-1}$ zu den Eigenwerten 1 und 0 bestimmt werden. Aus

$$(C_P \phi)(k) = ((\mathbb{1} + T_P)^{-1} \phi)(k) = \left[1 + \frac{2mb}{|k|} \left(1 + \frac{\sin 2kb}{2kb} \Pi\right)\right]^{-1} \phi(k) \quad (3.35)$$

folgt aber, dass 1 und 0 keine Eigenwerte zu C_P sind, da der Ausdruck in eckigen Klammern an höchstens endlich vielen Stellen in k gleich 1 bzw. für $k \neq 0$ immer endlich ist. Es ist also $\mathcal{H} = \mathfrak{H}$.

Zur Konstruktion des Operators $T_P^{-\frac{1}{2}}$ werden die Wellenfunktionen zunächst in die Anteile gerader und ungerader Parität aufgespalten, $\phi = \phi_+ + \phi_-$ mit

$$\phi_+ := \frac{\mathbb{1} + \Pi}{2} \phi \quad \text{und} \quad \phi_- := \frac{\mathbb{1} - \Pi}{2} \phi. \quad (3.36)$$

Dann schreibt sich die Wirkung von T_P als

$$(T_P \phi)(k) = \frac{2mb}{|k|} [(1 + \text{si } 2kb)\phi_+(k) + (1 - \text{si } 2kb)\phi_-(k)] \quad (3.37)$$

mit der Abkürzung $\text{si } x := \sin x/x$. In dieser Aufspaltung nach Paritäten lässt sich T_P leicht invertieren und die Wurzel ziehen. Man erhält

$$(T_P^{-\frac{1}{2}} \phi)(k) = \frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{2mb}} \left[(1 + \text{si } 2kb)^{-\frac{1}{2}} \phi_+(k) + (1 - \text{si } 2kb)^{-\frac{1}{2}} \phi_-(k)\right]. \quad (3.38)$$

Für das POVM ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
(E_{(b)}(I)\phi)(k) &= (T_P^{-\frac{1}{2}} T_P(I) T_P^{-\frac{1}{2}} \phi)(k) \\
&= \frac{\sqrt{|k|}}{2\pi m} \int_I dt \int dk' e^{it\frac{k^2-k'^2}{2m}} \frac{\sin(k-k')b}{(k-k')b} \sqrt{|k'|} \\
&\quad \times \left[(1 + \operatorname{si} 2kb)^{-\frac{1}{2}} (1 + \operatorname{si} 2k'b)^{-\frac{1}{2}} \phi_+(k') \right. \\
&\quad \left. + (1 - \operatorname{si} 2kb)^{-\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{si} 2k'b)^{-\frac{1}{2}} \phi_-(k') \right], \tag{3.39}
\end{aligned}$$

wobei die Eigenschaft $(T_P(I)\phi)_\pm = T_P(I)\phi_\pm$ des Operators $T_P(I)$ verwendet wurde. Setzt man nun für ϕ_\pm wieder die Definitionen (3.36) ein und ersetzt für alle auftretenden Summanden, die $\phi(-k')$ enthalten, k' durch $-k'$ in der Integration, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
(E_b(I)\phi)(k) &= \frac{\sqrt{|k|}}{4\pi m} \int_I dt \int dk' e^{it\frac{k^2-k'^2}{2m}} \sqrt{|k'|} \phi(k') \\
&\quad \times \left[\operatorname{si}((k-k')b) \left((1 + \operatorname{si} 2kb)^{-\frac{1}{2}} (1 + \operatorname{si} 2k'b)^{-\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 - \operatorname{si} 2kb)^{-\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{si} 2k'b)^{-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{si}((k+k')b) \left((1 + \operatorname{si} 2kb)^{-\frac{1}{2}} (1 + \operatorname{si} 2k'b)^{-\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1 - \operatorname{si} 2kb)^{-\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{si} 2k'b)^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \\
&=: \frac{\sqrt{|k|}}{4\pi m} \int_I dt \int dk' e^{it\frac{k^2-k'^2}{2m}} \sqrt{|k'|} \phi(k') \cdot F(k, k', b). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Das POVM E_0 wird nun als Limes $b \rightarrow 0$ von $E_{(b)}$ definiert und stellt die Observable „Zeitpunkt des Eintreffens am Ursprung“ dar. Einzig der Faktor $F(k, k', b)$, gegeben durch die Summe in eckigen Klammern in (3.40), ist von b abhängig. Die darin vorkommende Funktion si kann man für kleine Argumente durch

$$\operatorname{si} x = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4) \tag{3.41}$$

darstellen, wobei $o(x^4)$ für Terme steht, die wie x^4 oder schneller für $x \rightarrow 0$ gegen Null gehen. Mit dieser Entwicklung zeigt man, dass gilt

$$\lim_{b \rightarrow 0} F(k, k', b) = 1 + \frac{kk'}{|k||k'|} = \begin{cases} 2 & \text{für } kk' > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{3.42}$$

Der Integralkern von E_0 ist dann im Limes gegeben durch

$$E_0(I)(k, k') := \lim_{b \rightarrow 0} E_b(I)(k, k') = \begin{cases} \frac{\sqrt{kk'}}{2\pi m} \int_I dt e^{it\frac{k^2-k'^2}{2m}} & \text{für } kk' > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{3.43}$$

Dies ist das gesuchte POVM. Das erste Moment des Maßes E_0 definiert einen Zeitoperator

$$T := \int t \, dE_0(t) , \quad (3.44)$$

der sich im aktuellen Beispiel ebenfalls explizit berechnen lässt. Sei zunächst der Fall $k > 0$ betrachtet, dann gilt

$$\begin{aligned} (T\phi)(k) &= \int dk' \int t \, dE_0(t)(k, k') \phi(k') \\ &= \int_0^\infty dk' \int dt \frac{\sqrt{kk'}}{2m\pi} t e^{it\frac{k^2-k'^2}{2m}} \phi(k') \\ &= \frac{\sqrt{k}}{2m\pi} \int_0^\infty dk' \sqrt{k'} \int dt \frac{m}{ik} \left(\frac{d}{dk} e^{it\frac{k^2-k'^2}{2m}} \right) \phi(k') \\ &= \frac{-2mi}{\sqrt{k}} \frac{d}{dk} \int_0^\infty dk' \sqrt{k'} \delta(k^2 - k'^2) \phi(k') \\ &= \frac{-2mi}{\sqrt{k}} \frac{d}{dk} \int_0^\infty dk' \sqrt{k'} \frac{1}{2k} (\delta(k - k') + \delta(k + k')) \phi(k') \\ &= \frac{-mi}{\sqrt{k}} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \phi(k) \right) = \frac{im}{2} \left(\frac{\phi(k)}{k^2} - 2 \frac{\phi'(k)}{k} \right) \\ &= -\frac{m}{2} \left(\frac{1}{k} i \frac{d}{dk} + i \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \right) \phi(k) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Eine analoge Rechnung für $k < 0$ führt zum selben Ergebnis. Der so erhaltene Zeitoperator lässt sich durch den Impulsoperator p und den Ortsoperator $x = i \frac{d}{dk}$ als

$$T = -\frac{m}{2} (p^{-1}x + xp^{-1}) \quad (3.46)$$

darstellen. Dieser Zeitoperator wurde bereits von Y. Aharonov und D. Bohm als Operator zur Messung der Ankunftszeit eines Teilchens am Ursprung eingeführt [1]. T ist symmetrisch, erlaubt jedoch keine selbstadjungierte Erweiterung. Eine Diskussion dieses Zeitoperators findet man in [10].

3.4.2 Zwei freie Teilchen

Nun soll der Operator $W_{A_1|A_2}$ für ein System aus zwei freien Teilchen gleicher Masse m angegeben werden. Für die Gebiete A_1 und A_2 werden die um den Ursprung symmetrischen Intervalle $[-a, a]$ bzw. $[-b, b]$ mit $a, b > 0$ gewählt. Der Hilbertraum des Systems ist entsprechend $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ mit einem Hamiltonoperator

$$H = H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2 , \quad H_i = \frac{p^2}{2m} , \quad i = 1, 2 . \quad (3.47)$$

Auf \mathfrak{H} betrachte man die Operatoren

$$A(t) := \mathbf{1} \otimes P_{[-b,b]}(t) \quad (3.48)$$

$$B(t) = P_{[-a,a]}(t) \otimes P_{[-b,b]}(t). \quad (3.49)$$

Aus der Kenntnis von T_P aus (3.34) kann man direkt den Integralkern¹¹ von T_A zu

$$T_A(l, l'; k, k') = \delta(l - l') \frac{2mb}{|k|} \left(\delta(k - k') + \frac{\sin 2kb}{2kb} \delta(k + k') \right) \quad (3.50)$$

angeben. Wie im vorigen Unterabschnitt gesehen, ist T_A auf ganz \mathfrak{H} invertierbar und mit $\mathcal{H} = \mathfrak{H}$ gilt $P_{\mathcal{H}} = \mathbf{1}$.

Der Erwartungswert von T_B im Zustand $\psi \otimes \phi$ ist nun

$$\begin{aligned} & (\psi \otimes \phi, T_B \psi \otimes \phi) \\ &= \int dt \left(\int dx \overline{\check{\psi}(x)} e^{iH_1 t} \mathbf{1}_{[-a,a]}(x) e^{-iH_1 t} \check{\psi}(x) \cdot \int dy \overline{\check{\phi}(y)} e^{iH_2 t} \mathbf{1}_{[-b,b]}(y) e^{-iH_2 t} \check{\phi}(y) \right) \\ &= \int dt dl dl' dk dk' \frac{1}{\pi^2} \overline{\psi(l)} \overline{\phi(k)} e^{\frac{it}{2m}(l^2 - l'^2 + k^2 - k'^2)} \frac{\sin(l-l')a}{l-l'} \frac{\sin(k-k')b}{k-k'} \phi(k') \psi(l') \\ &= \int dl dl' dk dk' \overline{\psi(l)} \overline{\phi(k)} \frac{4m}{\pi} \frac{\sin(l-l')a}{l-l'} \frac{\sin(k-k')b}{k-k'} \delta(l^2 - l'^2 + k^2 - k'^2) \phi(k') \psi(l'), \end{aligned} \quad (3.51)$$

woraus man den Integralkern von T_B zu

$$T_B(l, l'; k, k') = \frac{4m}{\pi} \frac{\sin(l-l')a}{l-l'} \frac{\sin(k-k')b}{k-k'} \delta(l^2 - l'^2 + k^2 - k'^2) \quad (3.52)$$

ablesen kann. Man findet so für den Operator $W_{[-a,a][[-b,b]]} = T_A^{-\frac{1}{2}} T_B T_A^{-\frac{1}{2}}$, der die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit beschreibt,

$$\begin{aligned} & W_{[-a,a][[-b,b]]}(l, l'; k, k') \\ &= \frac{2\sqrt{|k||k'|}}{\pi} \left(1 + \frac{\sin 2kb}{2kb} \Pi_k \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\sin 2k'b}{2k'b} \Pi_{k'} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \frac{\sin(l-l')a}{l-l'} \frac{\sin(k-k')b}{(k-k')b} \delta(l^2 - l'^2 + k^2 - k'^2), \end{aligned} \quad (3.53)$$

wobei Π_k und $\Pi_{k'}$ die Paritätsoperatoren sind, die auf die Variablen k bzw. k' wirken.

¹¹Auf dem Zweiteilchenraum ist der Integralkern entsprechend durch $(T_A \psi \otimes \phi)(l, k) = \int dl' dk' T_A(l, l'; k, k') \psi(l') \phi(k')$ definiert.

3.4.3 Zwei harmonische Oszillatoren

Gegeben seien nun zwei Teilchen gleicher Masse, die sich eindimensional im Potential eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz $\omega \equiv 1$ bewegen, ohne miteinander wechselzuwirken. Der Hamiltonoperator des Systems ist also gegeben durch

$$H = H_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_2, \quad H_i = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m x^2, \quad i = 1, 2. \quad (3.54)$$

Für die Gebiete A_1 und A_2 werden (nicht notwendig symmetrische) reelle Intervalle $A_1 = [a, b]$ und $A_2 = [c, d]$ gewählt. Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ das vollständige System der reellen Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators, also

$$H_i \varphi_n = E_n \varphi_n \quad \text{mit} \quad E_n = n + \frac{1}{2}. \quad (3.55)$$

Zur Bestimmung von T_A kann Teilchen 1 zunächst ignoriert werden. Der Zustand von Teilchen 2 ist gegeben durch eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{C})$, sodass die Ortsraumwellenfunktion zur Zeit Null durch $\phi(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \varphi_n(x)$ gegeben ist. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion ist in dieser Darstellung

$$\phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-iE_n t} \varphi_n(x). \quad (3.56)$$

Sei nun $S := P_{[c,d]}$ der Projektionsoperator auf das reelle Intervall $[c, d]$, $c < d$. Im Fall des harmonischen Oszillators treten nur Bindungszustände als Lösungen auf, sodass die Operatoren T_A und T_B nicht als Zeitintegrale über ganz \mathbb{R} definiert werden können. Stattdessen wird nur über eine Periode $[0, 2\pi]$ integriert und man setzt

$$T_S := \int_0^{2\pi} dt S(t). \quad (3.57)$$

Man findet

$$\begin{aligned} (\phi, T_S \phi) &= \int_0^{2\pi} dt \int dx \overline{\phi(t, x)} \mathbf{1}_{[c,d]}(x) \phi(t, x) \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int dx \sum_{n,m=0}^{\infty} \overline{h_n} \varphi_n(x) e^{i(E_n - E_m)t} \mathbf{1}_{[c,d]}(x) h_m \varphi_m(x) \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(|h_n|^2 \int_c^d |\varphi_n(x)|^2 dx \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Hierbei wurde im letzten Schritt verwendet, dass

$$\int_0^{2\pi} e^{i(E_n - E_m)t} dt = 2\pi \delta_{n,m} = \begin{cases} 2\pi & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases} \quad (3.59)$$

gilt. Die Zahlen $\beta_n^{c,d} := \int_c^d |\varphi_n(x)|^2 dx$ sind für alle n positiv und liegen zwischen Null und Eins. Als Operator auf $\ell_2(\mathbb{C})$ aufgefasst, wirkt T_S also gemäß

$$T_S (h_n)_n = 2\pi (\beta_n^{c,d} h_n)_n, \quad (3.60)$$

wobei $(h_n)_n$ als Kurzschreibweise für die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ steht. Man sieht aus (3.58) einerseits, dass $T_S \leq 2\pi \cdot \mathbf{1}$ ist, was eine Konsequenz des beschränkten Integrationsgebietes in (3.57) ist, und andererseits, dass $(\phi, T_S \phi)$ nicht Null werden kann, da $\beta_n^{c,d} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daher ist $\mathcal{H} = \mathfrak{H}$ und $P_{\mathcal{H}} = \mathbf{1}$, sodass auch in diesem Fall die Projektoren in der Definition von $W_{[a,b][c,d]}$ fortgelassen werden können.

Es wird jetzt wieder das volle Zweiteilchensystem zusammen mit den Operatoren

$$A(t) := \mathbf{1} \otimes P_{[c,d]}(t) \quad (3.61)$$

$$B(t) := P_{[a,b]}(t) \otimes P_{[c,d]}(t). \quad (3.62)$$

betrachtet. Die vorherigen Überlegungen haben gezeigt, dass für $(g_p)_p \otimes (h_n)_n \in \ell_2(\mathbb{C}) \otimes \ell_2(\mathbb{C})$

$$T_A ((g_p)_p \otimes (h_n)_n) = (g_p)_p \otimes 2\pi (\beta_n^{c,d} h_n)_n \quad (3.63)$$

gilt. Invertieren und Wurzelziehen liefert

$$T_A^{-\frac{1}{2}} ((g_p)_p \otimes (h_n)_n) = (g_p)_p \otimes (2\pi)^{-\frac{1}{2}} ((\beta_n^{c,d})^{-\frac{1}{2}} h_n)_n. \quad (3.64)$$

Mit den Wellenfunktionen

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= \sum_{p=0}^{\infty} g_p e^{-iE_p t} \varphi_p(x) \\ \phi(t, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-iE_n t} \varphi_n(y) \end{aligned}$$

findet man weiter

$$\begin{aligned} & \left(((g_p)_p \otimes (h_n)_n), T_B ((g_p)_p \otimes (h_n)_n) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} dt \left(\int dx \overline{\psi(t, x)} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \psi(t, x) \cdot \int dy \overline{\phi(t, y)} \mathbf{1}_{[c,d]}(y) \phi(t, y) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} dt \int_a^b dx \int_c^d dy \sum_{n,m,p,q=0}^{\infty} e^{i(E_p - E_q + E_n - E_m)t} \overline{g_p} \varphi_p(x) g_q \varphi_q(x) \overline{h_n} \varphi_n(y) h_m \varphi_m(y) \\ &= 2\pi \sum_{n,m,p,q=0}^{\infty} \delta_{p+n,q+m} \overline{g_p} g_q \overline{h_n} h_m \int_a^b dx \varphi_p(x) \varphi_q(x) \cdot \int_c^d dy \varphi_n(y) \varphi_m(y). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Mit den Zahlen

$$\alpha_{n,m}^{c,d} := \int_c^d \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx$$

schreibt sich die Wirkung von T_B als

$$T_B((g_p)_p \otimes (h_n)_n) = \sum_{p,n=0}^{\infty} 2\pi \left(\sum_{q,m=0}^{\infty} \delta_{p+n,q+m} \alpha_{p,q}^{a,b} \alpha_{n,m}^{c,d} g_q h_m \right) e_p \otimes e_n, \quad (3.66)$$

wobei $e_i \in \ell_2(\mathbb{C})$, $i \in \mathbb{N}_0$, der i -te kanonische Basisvektor von $\ell_2(\mathbb{C})$ ist. Damit kann man den gesuchten Operator $W_{[a,b][c,d]} = T_A^{-\frac{1}{2}} T_B T_A^{-\frac{1}{2}}$ angeben zu

$$\begin{aligned} & W_{[a,b][c,d]}((g_p)_p \otimes (h_n)_n) \\ &= \sum_{p,n=0}^{\infty} \left(\sum_{q,m=0}^{\infty} \delta_{p+n,q+m} (\beta_n^{c,d})^{-\frac{1}{2}} (\beta_m^{c,d})^{-\frac{1}{2}} \alpha_{p,q}^{a,b} \alpha_{n,m}^{c,d} g_q h_m \right) e_p \otimes e_n. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Kapitel 4

Zeit als intrinsischer Freiheitsgrad

Bisher wurde versucht, den externen, absoluten Zeitparameter der Quantenmechanik durch interne „Uhr“-Variablen zu ersetzen und die Dynamik mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten bezüglich dieser „Uhren“ darzustellen. In diesem Kapitel wird eine alternative Herangehensweise zur Konstruktion einer relationalen Zeit untersucht. Die Hauptmotivation dazu liefert die bereits in der Einleitung erwähnte Arbeit [3] von Ashtekar, Pawłowski und Singh, in der die Feldgleichung eines skalaren Feldes auf einer Robertson-Walker-Raumzeit als Schrödingergleichung mit dem Skalarfeld ϕ als Zeitparameter interpretiert wird. Aufgrund dessen bezeichnen die Autoren das Feld ϕ auch als „emergente Zeit“, obwohl es im betrachteten Modell eine Quantenvariable darstellt. Die Frage, die dadurch aufgeworfen wird, lautet: *Ist es möglich, den Zeitparameter der Schrödingergleichung als einen dynamischen Freiheitsgrad in der Quantenmechanik aufzufassen?* In diesem Kapitel wird dieser Frage sowie möglichen Konsequenzen einer dynamischen Zeit nachgegangen und schließlich die Feldgleichung aus [3] im Licht der entwickelten Methoden neu analysiert.

Zunächst wird dazu der Standardformalismus der Quantenmechanik dahingehend erweitert, dass der Zeitparameter als Observable implementiert werden kann, die Dynamik jedoch weiterhin durch die Schrödingergleichung gegeben ist. Dabei tritt das Problem auf, dass eine Lösung der Schrödingergleichung im erweiterten Formalismus nicht mehr normierbar ist und daher keinen Zustand definiert. Der entscheidende Schritt besteht nun darin, die Lösung als *Gewicht* auf der Algebra der Observablen aufzufassen.¹ Während zwar eine direkte Wahrscheinlichkeitsinterpretation des Gewichts nicht möglich ist, gelingt jedoch eine Interpretation mittels *bedingter Wahrscheinlichkeiten*. Es stellt sich schließlich sogar heraus, dass man unter bestimmten Voraussetzungen genau die bedingten Wahrscheinlichkeiten erhält, die einer Beschreibung durch „Uhr“-Variablen entsprechen. Die Defi-

¹Auf dem Gebiet der Physik findet sich eine Behandlung nichtnormierbarer Lösungen der Schrödingergleichung als Gewichte (nach bestem Wissen des Autors) einzig in der Arbeit [9] von D. Buchholz, M. Poppmann und U. Stein, in der uneigentliche Impulseigenfunktionen als Gewichte aufgefasst werden, sowie in einigen darauf aufbauenden Arbeiten.

nition und Interpretation des neuen Formalismus' sowie die Einordnung der Ergebnisse des letzten Kapitels in diesen Formalismus ist Inhalt der Abschnitte 4.1 und 4.2.

In der Schrödingergleichung besitzt die nun definierte Zeitobservable jedoch keinen „kinetischen Term“, d.h. keinen Term mit einer zweiten Ableitung nach t , und stellt in diesem Sinne keine *dynamische* Quantenvariable dar. Im Abschnitt 4.3 wird ein Modell betrachtet, in dem der Zeitparameter durch einen Freiheitsgrad a mit kinetischem Term in der Schrödingergleichung ersetzt wird, und Effekte der so gewonnenen dynamischen Zeit werden untersucht.

Zum Abschluss erfolgt in Abschnitt 4.4 die Anwendung des in 4.1 entwickelten Formalismus' auf die in [3] auftretende Feldgleichung. Es wird einerseits gezeigt, dass sich die von Ashtekar et al. auf andere Weise hergeleiteten Resultate im neuen Formalismus reproduzieren, und andererseits, dass zusätzlich zur „emergenten Zeit“ ϕ auch andere Variablen als „Uhren“ verwendet werden können. Als ein Beispiel wird explizit ein POVM konstruiert, mit dem innerhalb des betrachteten Modells der Zeitpunkt des Urknalls bestimmt werden kann.

Zu Beginn des Kapitels werden einige operatoralgebraische Grundlagen zu Zuständen, Gewichten und durch diese induzierte GNS-Darstellungen benötigt, die in Anhang B zusammengestellt sind.

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Kapitels finden sich außerdem in einer gemeinsamen Publikation mit R. Brunetti und K. Fredenhagen [8], die sich zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit jedoch noch in Vorbereitung befindet.

4.1 Quantenmechanik in t

Sei \mathfrak{H}_0 ein Hilbertraum, dessen Skalarprodukt im Folgenden mit $\langle \bullet, \bullet \rangle$ notiert ist. Ferner sei auf \mathfrak{H}_0 ein selbstadjungierter Hamiltonoperator H_0 mit dichtem Definitionsbereich $D(H_0) \subset \mathfrak{H}_0$ erklärt. Im Schrödingerbild der Quantenmechanik wird ein physikalisches System beschrieben durch eine differenzierbare Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow D(H_0)$, die der Schrödingergleichung

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = H_0 \psi(t) \quad (4.1)$$

genügt. Eine Lösung $\psi(t)$ definiert dann auf der Observablenalgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ das Erwartungswertfunktional

$$\omega_0^{\psi(t)}(A) := \frac{\langle \psi(t), A \psi(t) \rangle}{\langle \psi(t), \psi(t) \rangle}, \quad (4.2)$$

das einem Element $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ seinen Erwartungswert zur Zeit t zuordnet. $\omega_0^{\psi(t)}$ ist ein positives Funktional auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ mit $\omega_0^{\psi(t)}(\mathbf{1}) = 1$. Ein solches Funktional

heißt auch *Zustand* auf der Algebra der Observablen.²

Zur Behandlung der Zeit als intrinsische quantenmechanische Variable wird nun die Schrödingergleichung (4.1) auf einem um einen zusätzlichen Freiheitsgrad erweiterten Hilbertraum

$$\mathfrak{H} := L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_0) := \left\{ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{H}_0 ; \int dt \langle \psi(t), \psi(t) \rangle < \infty \right\} \quad (4.3)$$

betrachtet. Das Skalarprodukt auf \mathfrak{H} ist gegeben durch

$$(\varphi, \psi) := \int dt \langle \varphi(t), \psi(t) \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{H} \quad (4.4)$$

und die Schrödingergleichung nimmt auf \mathfrak{H} die Form einer Zwangsbedingung

$$H\psi = 0 \quad \text{mit} \quad H := -i \frac{d}{dt} + H_0 \quad (4.5)$$

an. H ist als Operator auf $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_0)$ selbstadjungiert und besitzt ein kontinuierliches Spektrum. Daraus folgt jedoch, dass Lösungen von (4.5), also uneigentliche Eigenfunktionen von H zum Spektralwert Null, nicht im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_0)$ liegen. Dies sieht man ebenfalls an der Tatsache, dass die Norm in \mathfrak{H}_0 einer Lösung $\psi(t)$ der Schrödingergleichung (4.1) nicht von t abhängt, sodass Integrale der Form

$$\int dt \langle \psi(t), \psi(t) \rangle = \int dt \langle \psi(0), \psi(0) \rangle \quad (4.6)$$

divergieren. Daher existiert zu ψ auf dem erweiterten Hilbertraum \mathfrak{H} kein Zustandsfunktional gemäß (4.2).

Es ist allerdings möglich, die Lösung ψ nicht als Zustand, sondern als *Gewicht* auf der Algebra der Observablen aufzufassen. Dazu sei bemerkt, dass die uneigentliche Eigenfunktion ψ von H als ein lineares Funktional (ψ, \bullet) auf einem dichten Unterraum $D_\psi \subset \mathfrak{H}$ realisiert ist. Sei nun $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in D_ψ und für $N \in \mathbb{N}$ setze man

$$\psi_N := \sum_{i=1}^N \overline{(\psi, \zeta_i)} \zeta_i. \quad (4.7)$$

Proposition 4.1. *Bezeichnet $\mathfrak{B}_+(\mathfrak{H})$ die Menge der positiven Operatoren auf \mathfrak{H} , so hängt die Abbildung*

$$w_\psi : \mathfrak{B}_+(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \quad w_\psi(B) := \lim_{N \rightarrow \infty} (\psi_N, B \psi_N), \quad (4.8)$$

nicht von der Wahl der Basis in D_ψ ab und definiert ein Gewicht auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

²Dieser Zustandsbegriff ist durch eine GNS-Konstruktion eng verbunden mit (wenn auch nicht vollständig gleichwertig zu) der bisherigen Verwendungsweise des Begriffs in dieser Arbeit. Für Details zur GNS-Konstruktion sei auf Anhang B verwiesen. In diesem Kapitel ist mit *Zustand* stets ein positives, normiertes Funktional gemeint.

Beweis. Sei $(\zeta'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine zweite Orthonormalbasis von D_ψ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\overline{(\psi, \zeta'_i) \zeta'_i}, B \overline{(\psi, \zeta'_j) \zeta'_j} \right) &= \sum_{i,j,k,l=1}^{\infty} (\psi, \zeta'_i) \overline{(\psi, \zeta'_j)} (\zeta'_i, \zeta_k) (\zeta_k, B \zeta_l) (\zeta_l, \zeta'_j) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{\infty} (\psi, (\zeta'_i, \zeta_k) \zeta'_i) \overline{(\psi, (\zeta'_j, \zeta_l) \zeta'_j)} (\zeta_k, B \zeta_l) \\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\overline{(\psi, \zeta_k) \zeta_k}, B \overline{(\psi, \zeta_l) \zeta_l} \right) \\
&= w_\psi(B),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

wobei für das dritte Gleichheitszeichen die Stetigkeit von (ψ, \bullet) auf D_ψ verwendet wurde. Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition B.11 folgen direkt aus der Linearität des Skalarprodukts auf \mathfrak{H} , und somit ist w_ψ ein Gewicht auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. \square

Wie in Anhang B dargestellt, gibt es für Gewichte eine GNS-Konstruktion und nach Satz B.12 existiert zum Gewicht w_ψ ein Hilbertraum \mathfrak{H}_ψ und eine Darstellung π_ψ der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ auf \mathfrak{H}_ψ . Zusätzlich gibt es eine Abbildung $\eta_\psi : \mathcal{L}_\psi \rightarrow \mathfrak{H}_\psi$, wobei \mathcal{L}_ψ das Linksideal

$$\mathcal{L}_\psi := \{A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) ; w_\psi(A^*A) < \infty\} \tag{4.10}$$

in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist, sodass das Bild $\eta_\psi(\mathcal{L}_\psi)$ dicht in \mathfrak{H}_ψ liegt.

Man betrachte nun die Menge $L_\psi \subset \mathcal{L}_\psi$ der Operatoren, deren Gewicht endlich und von Null verschieden ist,

$$L_\psi := \{A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) ; 0 < w_\psi(A^*A) < \infty\}. \tag{4.11}$$

Jedem Operator $A \in L_\psi$ kann man einen Vektor $\eta_\psi(A) \neq 0$ im GNS-Hilbertraum \mathfrak{H}_ψ zuordnen. Damit ist es möglich, ein Erwartungswertfunktional $\omega^{A\psi}$ zu definieren, das einer Observablen $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ den Erwartungswert des Repräsentanten $\pi_\psi(B)$ bezüglich $\eta_\psi(A)$ in \mathfrak{H}_ψ zuordnet:

$$\omega^{A\psi}(B) := \frac{(\eta_\psi(A), \pi_\psi(B) \eta_\psi(A))}{(\eta_\psi(A), \eta_\psi(A))} \stackrel{\text{Satz B.12}}{=} \frac{w_\psi(A^*BA)}{w_\psi(A^*A)}. \tag{4.12}$$

Das Funktional $\omega^{A\psi}$ definiert nun einen Zustand auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Vergleicht man (4.12) etwa mit der Formel (1.30) für bedingte Wahrscheinlichkeiten bei mehrfacher Messung, wird folgende Interpretation nahegelegt: *Der Erwartungswert $\omega^{A\psi}(B)$ ist der bedingte Erwartungswert der Observablen B unter der Voraussetzung, dass das durch den Operator A^*A beschriebene Ereignis stattgefunden hat.* Der über den GNS-Hilbertraum \mathfrak{H}_ψ definierte Zustand $\omega^{A\psi}$ liefert also manifest bedingte Erwartungen, die den Zeitparameter nicht mehr enthalten. Das Gewicht $w_\psi(A^*A)$ lässt sich interpretieren als die Zeitdauer des Ereignisses A^*A , und die Bedingung

$A \in L_\psi$, also $0 < w_\psi(A^*A) < \infty$, stellt sicher, dass das Stattfinden dieses Ereignisses den Zeitparameter genügend stark einschränkt, sodass eine relationale Beschreibung der Erwartungswerte gemäß (4.12) möglich wird.³

Wie im Fall der bedingten Wahrscheinlichkeiten (1.30) bei mehrfacher Messung hängt auch die bedingte Erwartung (4.12) direkt von A ab, während das bedingende Ereignis durch A^*A schon vollständig beschrieben ist.

Da die Dynamik nach wie vor durch die Schrödingergleichung (4.1) bestimmt ist, beinhaltet die so erlangte Erweiterung der Quantenmechanik die Standardformulierung noch als einen Spezialfall. Um dies einzusehen, betrachte man zunächst die Klasse von Operatoren der Multiplikation mit einer Testfunktion in t . Seien $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine Testfunktion, $\text{supp } g \neq \emptyset$, und $A_g \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit

$$(A_g\varphi)(t) := g(t) \varphi(t) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{H}, \quad (4.13)$$

dann folgt $A_g \in L_\psi$ für alle ψ mit $H\psi = 0$. $A_g^*A_g$ beschreibt das Ereignis, dass eine Zeitmessung ein Ergebnis im kompakten Intervall $\text{supp } g \subset \mathbb{R}$ mit (noch zu normierender) Gewichtung $|g(t)|^2$, $t \in \text{supp } g$, liefert. Eine Observable $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ auf dem ursprünglichen Hilbertraum \mathfrak{H}_0 kann durch

$$(B\varphi)(t) := B(\varphi(t)) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{H} \quad (4.14)$$

auch als Operator auf \mathfrak{H} definiert werden. Der bedingte Erwartungswert von B im Zustand $\omega^{A_g\psi}$ ist dann gegeben durch

$$\omega^{A_g\psi}(B) = \frac{w_\psi(A_g^*BA_g)}{w_\psi(A_g^*A_g)} = \frac{\int dt |g(t)|^2 \langle \psi(t), B\psi(t) \rangle}{\int dt |g(t)|^2 \langle \psi(t), \psi(t) \rangle}. \quad (4.15)$$

Im Limes, in dem das Betragsquadrat der Testfunktion gegen $\delta(t - t_0)$ strebt, erhält man den gewöhnlichen Erwartungswert von B im Zustand $\omega_0^{\psi(t_0)}$ zurück:

$$\omega^{A_g\psi}(B) \xrightarrow{|g(t)|^2 \rightarrow \delta(t-t_0)} \frac{\langle \psi(t_0), B\psi(t_0) \rangle}{\langle \psi(t_0), \psi(t_0) \rangle} = \omega_0^{\psi(t_0)}(B). \quad (4.16)$$

An dieser Stelle sind einige Worte zur Interpretation des neu gewonnenen Formalismus' angebracht. In den vorangegangenen Kapiteln wurde die Idee verfolgt, die Dynamik eines Systems durch bedingte Wahrscheinlichkeiten bezüglich einer Wahl von „Uhr“-Variablen zu beschreiben. Der hier neu vorgeschlagene Ansatz ist zunächst ein ganz anderer: Der vorhandene Formalismus der Quantenmechanik wird so erweitert, dass eine Beschreibung der Zeit als zusätzlicher interner Freiheitsgrad möglich wird, ohne die Schrödingergleichung zu ändern. Im erweiterten Formalismus liefert eine Lösung der Schrödingergleichung nun jedoch keinen

³Zum besseren Verständnis, was eine „genügend starke Einschränkung“ bedeutet, denke man vergleichend an die Behandlung der Brownschen Bewegung in Kapitel 2. Dort stellt das Ereignis „Brownsches Teilchen ist in beschränktem Gebiet $A \subset \mathbb{R}^d$ “ für $d \geq 3$ eine für diese Zwecke hinreichende Einschränkung des Zeitparameters dar, für $d < 3$ hingegen nicht.

Zustand mehr, sondern nur noch ein *Gewicht* auf der Algebra der Observablen, das keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation mehr zulässt. Als Folge der GNS-Konstruktion für dieses Gewicht ist aber die Interpretation im Sinne von bedingten Wahrscheinlichkeiten möglich, wie sie durch (4.12) auf dem GNS-Hilbertraum gegeben sind.

Beide Ansätze führen also auf eine Beschreibung der Dynamik durch bedingte Wahrscheinlichkeiten und es ergeben sich im Nachhinein deutliche Parallelen zwischen den Ansätzen. Tatsächlich stellt sich heraus, dass der neue Formalismus die bedingten Wahrscheinlichkeiten bezüglich „Uhr“-Variablen enthält, wenn man Zustände im GNS-Hilbertraum betrachtet, die von einem Operator $A \in L_\psi$ induziert werden, der gleichzeitig in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ liegt. Ein solches A ist also eine physikalische Observable bereits im Sinne der Standardformulierung der Quantenmechanik, und $A \in L_\psi$ bedeutet nach der obigen Diskussion, dass das Eintreten des Ereignisses A^*A den Zeitparameter genügend stark einschränkt, sodass A als „Uhr“-Variable verwendet werden kann. Im nächsten Abschnitt wird an Beispielen gezeigt, dass sich dann im neuen Formalismus die von der Behandlung der Dynamik durch „Uhr“-Variablen bekannten Resultate reproduzieren.

Da im neuen Formalismus jedoch die Zeit als zusätzliche Observable integriert ist, enthält dieser mehr mögliche „Uhren“: Es lassen sich auch bedingte Wahrscheinlichkeiten bezüglich Operatoren $A \in L_\psi \setminus \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ bilden. Ein Beispiel ist der Operator A_g mit einer Testfunktion g . Die Einschränkung der Zeitvariablen durch das „Ereignis“ $A_g^*A_g$ geschieht nicht mit Hilfe von Eigenschaften eines weiteren physikalischen Systems, sondern über die Zeitobservable selbst. (Wollte man die Analogie aufrecht erhalten, müsste man sagen, die Zeit spiele in diesem Fall selbst die Rolle der „Uhr“-Variablen.)

4.2 „Uhr“-Variablen im neuen Formalismus

Im vorigen Kapitel wurde das POVM definiert, das der Observablen „Zeitpunkt eines Ereignisses“ entspricht, und der Operator $W_{A_1|A_2}$ konstruiert, der die bedingte Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Zweiteilchensystem beschreibt. Im ersten Fall wird ein (physikalisches) Ereignis als „Uhr“ zur Zeitmessung, im zweiten Fall die Position eines Teilchens als „Uhr“ zur Beschreibung der Bewegung eines anderen Teilchens verwendet.

Anhand dieser beiden Beispiele wird nun gezeigt, dass sich die relationale Beschreibung durch „Uhr“-Variablen aus dem neuen Formalismus auf dem erweiterten Hilbertraum $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_0)$ ergibt, wenn man auf dem GNS-Hilbertraum Zustände betrachtet, die von Operatoren $A \in L_\psi \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ induziert werden. Dazu wird zunächst gezeigt, dass man mit Hilfe eines solchen Operators A eine positive Abbildung Λ_A konstruieren kann, die Operatoren auf \mathfrak{H} abbildet auf Operatoren auf \mathfrak{H}_0 . Das in Abschnitt 3.2 konstruierte POVM zur Messung des Zeitpunktes, zu dem das Ereignis A^*A eintritt, ist dann gerade das Bild des Spektralmaßes des

selbstadjungierten Zeitoperators⁴ t auf \mathfrak{H} unter der Abbildung Λ_A . Auf analoge Weise erhält man im neuen Formalismus auch den Operator $W_{A_1|A_2}$.

Benötigt wird für das Folgende ein Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$, dessen über die Zeit integrierter Erwartungswert endlich bleibt und nicht verschwindet, also

$$0 < \int dt \langle \psi(t), A^* A \psi(t) \rangle \equiv w_\psi(A^* A) < \infty \quad (4.17)$$

für ein ψ mit $H\psi = 0$. In diesem Sinne gilt dann $A \in L_\psi \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$. Garantiert ist die Existenz solcher Operatoren A , wenn das Spektrum von H_0 absolut stetig ist. Dann lässt sich $\psi(t)$ in einer Basis aus uneigentlichen Energieeigenfunktionen $\psi(t, E)$ schreiben und es gilt

$$\langle \psi(t), A^* A \psi(t) \rangle = \int dE \int dE' \overline{\psi(t, E)} (A^* A)(t, E, E') \psi(t, E'). \quad (4.18)$$

Die Existenz eines Operators $A \in L_\psi \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ ist nun gleichbedeutend mit der Existenz eines geeigneten Integralkerns $(A^* A)(t, E, E')$, sodass das Integral über t von (4.18) endlich bleibt und nicht verschwindet.

Im Folgenden sei also angenommen, dass es einen Operator $A \in L_\psi \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ für ein fest gewähltes ψ mit $H\psi = 0$ gibt. Man definiert dann auf \mathfrak{H}_0 den im Allgemeinen unbeschränkten, positiven Operator

$$\tau_A := \int dt e^{iH_0 t} A^* A e^{-iH_0 t}, \quad (4.19)$$

der die Gesamtdauer des Ereignisses $A^* A$ beschreibt. Wie in der Konstruktion des POVMs sei angenommen, dass τ_A einen trivialen Kern besitzt. (Ist dies nicht der Fall, schränke man τ_A auf das orthogonale Komplement des Kerns in \mathfrak{H}_0 ein und fahre auf diesem Komplement fort.) Dann ist τ_A invertierbar. Der Operator A induziert auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ das Erwartungswertfunktional $\omega^{A\psi}$, und mit einem $C \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ gilt

$$\begin{aligned} \omega^{A\psi}(C) &= \frac{\int dt \langle \psi(t), A^* C A \psi(t) \rangle}{\int dt \langle \psi(t), A^* A \psi(t) \rangle} \\ &= \frac{\int dt \langle \psi(0), \tau_A^{\frac{1}{2}} \tau_A^{-\frac{1}{2}} e^{iH_0 t} A^* C A e^{-iH_0 t} \tau_A^{-\frac{1}{2}} \tau_A^{\frac{1}{2}} \psi(0) \rangle}{\langle \psi(0), \tau_A \psi(0) \rangle} \\ &= \frac{\langle \psi(0), \tau_A^{\frac{1}{2}} \left(\int dt \tau_A^{-\frac{1}{2}} e^{iH_0 t} A^* C A e^{-iH_0 t} \tau_A^{-\frac{1}{2}} \right) \tau_A^{\frac{1}{2}} \psi(0) \rangle}{\langle \psi(0), \tau_A \psi(0) \rangle} \\ &= (\omega_0^{\sqrt{\tau_A} \psi(0)} \circ \Lambda_A)(C). \end{aligned} \quad (4.20)$$

⁴Der Multiplikationsoperator t ist auf \mathfrak{H} selbstadjungiert. Paulis Argument gegen die Existenz eines selbstadjungierten Zeitoperators (vgl. Fußnote auf Seite 33) kommt hier nicht zum Tragen. In der Tat hat $H = -i \frac{d}{dt} + H_0$ zwar ein translationsinvariantes, unbeschränktes Spektrum, wegen der Zwangsbedingung $H\psi = 0$ ist jedoch nur der Spektralwert Null relevant.

Dabei ist

$$\Lambda_A(C) := \int dt \tau_A^{-\frac{1}{2}} e^{iH_0 t} A^* C A e^{-iH_0 t} \tau_A^{-\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

ein von ψ unabhängiger Operator auf \mathfrak{H}_0 . Betrachtet man ferner die Abbildung $V_A : \mathfrak{H}_0 \rightarrow \mathfrak{H}$, $V_A \psi := A e^{-iH_0 t} \tau_A^{-\frac{1}{2}} \psi$, so ist V_A wegen

$$(V_A \varphi, V_A \psi) = \int dt \langle \varphi, \tau_A^{-\frac{1}{2}} e^{iH_0 t} A^* A e^{-iH_0 t} \tau_A^{-\frac{1}{2}} \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle \quad (4.22)$$

eine Isometrie und Λ_A lässt sich darstellen als

$$\Lambda_A(C) = V_A^* C V_A . \quad (4.23)$$

Λ_A ist also eine *positive Abbildung*, d.h. die Bilder positiver Operatoren auf \mathfrak{H} sind wieder positive Operatoren auf \mathfrak{H}_0 . Mit dieser Abbildung ist es nun möglich, die Spektralprojektoren $E^t(I) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, $I \subset \mathbb{R}$ messbar, des Zeitoperators t auf positive Operatoren $E_A(I) := \Lambda_A(E^t(I))$ auf \mathfrak{H}_0 abzubilden. Man erhält

$$\begin{aligned} E_A(I) &= \int dt \tau_A^{-\frac{1}{2}} e^{iH_0 t} A^* \mathbf{1}_I(t) A e^{-iH_0 t} \tau_A^{-\frac{1}{2}} \\ &= \tau_A^{-\frac{1}{2}} \left(\int_I dt e^{iH_0 t} A^* A e^{-iH_0 t} \right) \tau_A^{-\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dies ist genau das von Brunetti und Fredenhagen in [7] eingeführte und in Abschnitt 3.2 dieser Arbeit konstruierte POVM, das den Zeitpunkt des Eintretens des Ereignisses $A^* A$ beschreibt. Bemerkte sei auch hier, dass man wie in der Konstruktion in Kapitel 3 statt $\tau_A^{-1/2}$ gleichwertig einen anderen Operator $\tilde{\tau}$ verwenden kann, der die Eigenschaft $\tilde{\tau}^* \tau_A \tilde{\tau} = \mathbf{1}$ erfüllt.

Es ist ferner möglich, den in Unterabschnitt 3.3.1 konstruierten Operator $W_{A_1|A_2}$ auf eine ähnliche Weise aus dem neuen Formalismus zu gewinnen. Sei \mathfrak{H}_0 dazu ein Zweiteilchenhilbertraum, auf dem die Projektoren

$$\mathcal{A} := \mathbf{1} \otimes P_{A_2} \quad (4.25a)$$

$$\mathcal{B} := P_{A_1} \otimes P_{A_2} \quad (4.25b)$$

gegeben sind, wobei P_{A_i} im Ortsraum auf das beschränkte Gebiet A_i , $i = 1, 2$, projiziert. Es sei angenommen, dass $\mathcal{A} \in L_\psi \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ für ein ψ mit $H\psi = 0$ und

$$\int dt \langle \varphi, e^{iH_0 t} \mathcal{A}^* \mathcal{A} e^{-iH_0 t} \varphi \rangle > 0 \quad (4.26)$$

für alle $\varphi \in \mathfrak{H}_0 \setminus \{0\}$ gilt. (Anderenfalls verkleinere man \mathfrak{H}_0 entsprechend.) Der Operator $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ lässt sich als Operator auf \mathfrak{H} auffassen und es gilt dann

$$\Lambda_A(\mathcal{B}) = V_A^* \mathcal{B} V_A = \tau_A^{-\frac{1}{2}} \int dt e^{iH_0 t} \mathcal{A}^* \mathcal{B} \mathcal{A} e^{-iH_0 t} \tau_A^{-\frac{1}{2}} = \tau_A^{-\frac{1}{2}} \tau_B \tau_A^{-\frac{1}{2}} , \quad (4.27)$$

wobei die Identitäten $\mathcal{A}^*\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathcal{B}$ verwendet wurden. Der Operator (4.27) ist gerade der in 3.3.1 definierte Operator $W_{A_1|A_2}$, der im Erwartungswert die bedingte Wahrscheinlichkeit liefert, Teilchen 1 im Gebiet A_1 zu finden, falls Teilchen 2 im Gebiet A_2 nachgewiesen wurde.

4.3 Dynamische Quantenvariable der Zeit

4.3.1 Motivation und Modell

Im Rahmen des neu entwickelten Formalismus' wird nun der Frage nachgegangen, inwiefern sich der Zeitparameter t der Quantenmechanik als „klassischer Limes“ einer *dynamischen* Quantenobservablen a verstehen lässt. Gemeint ist damit das Folgende: Gegeben sei ein System, dessen klassischer Phasenraum von den Koordinaten $(p, x) \equiv (p_i, x_i)_{i=1\dots N}$ aufgespannt wird und dessen klassische Hamiltonfunktion durch

$$\mathcal{H}(p, x; t) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x; t) \quad (4.28)$$

mit einem eventuell zeitabhängigen Potential V und Parametern $m_i > 0$ gegeben ist. Quantenmechanisch wird das System dann beschrieben durch eine Wellenfunktion Ψ auf dem Hilbertraum $\mathfrak{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^N)$, die der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x; t) \right) \Psi(t, x) = 0 \quad (4.29)$$

genügt. Betrachtet man den Zeitparameter t als intrinsische Quantenvariable, fällt auf, dass in der Schrödingergleichung ein Term mit einer zweiten Ableitung nach t fehlt, während alle anderen Koordinaten x_i einen solchen „kinetischen Term“ besitzen. In diesem Abschnitt wird daher der Zeitparameter t durch eine Quantenobservable a ersetzt, die zusätzlich mit einem Term zweiter Ableitung in der Schrödingergleichung auftritt. Die Observable a wird hier als *dynamische Zeit* bezeichnet und stellt einen Freiheitsgrad dar, der in diesem Sinne als gleichberechtigt zu den übrigen anzusehen ist.

Sei $H_0(t)$ ein möglicherweise zeitabhängiger Hamiltonoperator auf einem Hilbertraum \mathfrak{H}_0 . Das hier untersuchte Modell einer dynamischen Zeitvariablen definiert sich durch die Zwangsbedingung

$$\left(-\frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - i \frac{\partial}{\partial a} + H_0(a) \right) \Psi^M(a, x) \equiv H \Psi^M(a, x) = 0 \quad (4.30)$$

auf dem erweiterten Hilbertraum $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_0)$ mit $M > 0$. Um die Abhängigkeit der Lösung vom neu eingefügten Parameter M deutlich zu machen, wurde Ψ mit dem hochgestellten Index M versehen. Abschnitt 4.1 folgend, werden Lösungen Ψ^M dieser Zwangsbedingung als Gewichte auf der Observablenalgebra aufgefasst,

die die Berechnung bedingter Erwartungswerte erlauben.⁵ Im Limes $M \rightarrow \infty$ geht (4.30) in die Schrödingergleichung (4.29) über und im hier betrachteten Modell repräsentiert dies den „klassischen Limes“, in dem a die Rolle des gewöhnlichen Zeitparameters t übernimmt.

An Beispielen werden im Folgenden einige Effekte der dynamischen Zeit untersucht, wobei besonders die Systeme des freien und des getriebenen harmonischen Oszillators betrachtet werden, für die (4.30) gelöst werden kann. Speziell wird in den nächsten Unterabschnitten gezeigt:

1. Falls der Hamiltonoperator H_0 auf \mathfrak{H}_0 zeitunabhängig ist, ändert sich für Eigenzustände von H_0 nichts.
2. Für Überlagerungen aus zwei Eigenzuständen ändern sich beim freien harmonischen Oszillator bereits bestimmte Schwingungsfrequenzen.
3. Für den mit einer linear anwachsenden Kraft getriebenen harmonischen Oszillator verlangsamt sich die Bewegung der Null-Lage.

4.3.2 Zeitunabhängige Probleme

Der Hamiltonoperator H_0 auf \mathfrak{H}_0 sei zeitunabhängig. Dann lautet die Zwangsbedingung

$$\left(-\frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - i \frac{\partial}{\partial a} + H_0 \right) \Psi^M(a) = 0 \quad (4.31)$$

für eine zweimal differenzierbare Funktion $\Psi^M : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{H}_0$. Wie bei der Behandlung zeitunabhängiger Probleme mit der Schrödingergleichung, lässt sich (4.31) ebenfalls durch den Separationsansatz $\Psi^M(a) = \psi^M(a) \cdot \phi$ lösen, wobei $\phi \in \mathfrak{H}_0$ die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$H_0 \phi = E \phi \quad (4.32)$$

erfüllt und ψ^M eine Funktion ist, die der Differentialgleichung

$$\left(-\frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - i \frac{\partial}{\partial a} + E \right) \psi^M(a) = 0 \quad (4.33)$$

genügt. Gleichung (4.32) lässt sich nur lösen, wenn E ein Element des Spektrums von H_0 ist, und im Folgenden sei der Einfachheit halber angenommen, dass H_0 ein rein diskretes Spektrum von Eigenwerten $(E_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ besitzt. Zu einem festen Eigenwert E_n ist die allgemeine Lösung von (4.33) gegeben durch

$$\psi_n^M(a) = e^{-iMa} \left(C_1 e^{i\sqrt{M^2 - 2ME_n}a} + C_2 e^{-i\sqrt{M^2 - 2ME_n}a} \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

⁵Hängt der Potentialterm in H_0 auf geeignete Weise von a ab, ist es sogar möglich, dass vollständig normierbare Lösungen von (4.30) existieren, die direkt als Zustände realisiert sind. In dieser Arbeit werden jedoch nur Fälle auftreten, in denen die Lösungen in a nicht normierbar sind.

Im Gegensatz zur Schrödingergleichung ist die Differentialgleichung (4.33) von zweiter Ordnung in a , sodass zwei linear unabhängige Lösungen existieren, in denen „die Zeit in verschiedene Richtungen läuft“. Durch die Forderung, dass sich im Limes $M \rightarrow \infty$ das Ergebnis der gewöhnlichen Schrödingergleichung reproduzieren soll, lässt sich jedoch eine Lösung eindeutig fixieren. Für $x \ll 1$ gilt die Entwicklung

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3), \quad (4.35)$$

mit der sich zeigen lässt, dass

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt{M^2 - 2ME_n} - M = -E_n \quad (4.36)$$

gilt, während $(\sqrt{M^2 - 2ME_n} + M)$ divergiert. Setzt man in der allgemeinen Lösung (4.34) also $C_2 = 0$ und absorbiert C_1 in die Normierung von ϕ , lautet die Lösung für Ψ_n^M zum Eigenwert E_n insgesamt

$$\Psi_n^M(a) = e^{-i(M - \sqrt{M^2 - 2ME_n})a} \phi_n, \quad (4.37)$$

wenn $H\phi_n = E_n\phi_n$ mit $\phi_n \neq 0$ ist. Ferner gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Psi_n^M(a) = e^{-iE_n a} \phi_n, \quad (4.38)$$

was dem Standardresultat entspricht.

Sei nun das System beschrieben durch die Lösung Ψ_n^M aus (4.37). Um zu untersuchen, welche Auswirkungen eine dynamische Zeitvariable a für endliches M auf das System hat, wird Ψ_n^M als Gewicht auf dem erweiterten Hilbertraum $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_0)$ aufgefasst und anschließend derselbe Limes durchgeführt, der in Abschnitt 4.1 die quantenmechanische Standardbeschreibung lieferte. Sei dazu $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine nicht überall verschwindende Testfunktion und A_g der Multiplikationsoperator mit g aus (4.13). Für einen Operator B auf \mathfrak{H}_0 gilt nun

$$\omega^{A_g \Psi_n^M}(B) = \frac{\int da |g(a)|^2 \langle \Psi_n^M(a), B \Psi_n^M(a) \rangle}{\int da |g(a)|^2 \langle \Psi_n^M(a), \Psi_n^M(a) \rangle} \quad (4.39)$$

Da $e^{-i(M - \sqrt{M^2 - 2ME_n})a}$ mit B kommutiert, gilt weiter

$$\omega^{A_g \Psi_n^M}(B) = \frac{\int da |g(a)|^2 \langle \phi_n, B \phi_n \rangle}{\int da |g(a)|^2 \langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\langle \phi_n, B \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \omega_0^{\phi_n}(B) \quad (4.40)$$

für alle Testfunktionen g und unabhängig von M . Erwartungswerte in Eigenzuständen von H_0 sind also weder von M noch, wie aus der gewöhnlichen Quantenmechanik bekannt, von der Zeit abhängig.

4.3.3 Ungetriebener harmonischer Oszillator

In diesem Abschnitt wird der ungetriebene harmonische Oszillator als ein konkretes Beispielsystem untersucht. Dazu sei der Hamiltonoperator auf \mathfrak{H}_0 durch

$$H_0 = \frac{1}{2} (p^2 + x^2) \quad (4.41)$$

gegeben, sodass die Zwangsbedingung die Form der Differentialgleichung

$$\left(-\frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - i \frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 \right) \Psi^M(a, x) = 0 \quad (4.42)$$

annimmt. Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ das System der reellen Energieeigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit $H_0 \varphi_n = E_n \varphi_n$, $E_n = n + \frac{1}{2}$, dann lautet nach (4.37) die Lösung von (4.42) zum Eigenwert E_n mit korrektem Limes $M \rightarrow \infty$

$$\Psi_n^M(a, x) = e^{-i(M - \sqrt{M^2 - 2ME_n})a} \varphi_n(x). \quad (4.43)$$

Im letzten Unterabschnitt wurde gezeigt, dass sich in Eigenzuständen Ψ_n^M zu H_0 keine Änderungen ergeben. Daher wird im Folgenden für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}_0$ das Gewicht betrachtet, das durch die Lösung

$$\Psi^M(a, x) = \Psi_n^M(a, x) + \Psi_{n+1}^M(a, x) = e^{-i\mathbf{m}_n a} \varphi_n(x) + e^{-i\mathbf{m}_{n+1} a} \varphi_{n+1}(x) \quad (4.44)$$

induziert wird, wobei die Abkürzung $\mathbf{m}_n := M - \sqrt{M^2 - 2ME_n}$ verwendet wurde. Für eine Testfunktion g soll nun der bedingte Erwartungswert $\omega^{A_g \Psi^M}(x)$ des Ortsoperators x im Limes $|g(a)|^2 \rightarrow \delta(a - t)$ bestimmt werden. Es gilt

$$\omega^{A_g \Psi^M}(x) = \frac{\int da \int dx |g(a)|^2 \overline{(\Psi_n^M(a, x) + \Psi_{n+1}^M(a, x))} x (\Psi_n^M(a, x) + \Psi_{n+1}^M(a, x))}{\int da \int dx |g(a)|^2 |\Psi_n^M(a, x) + \Psi_{n+1}^M(a, x)|^2}$$

Wegen der Orthogonalität der $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist

$$\int dx |\Psi_n^M(a, x) + \Psi_{n+1}^M(a, x)|^2 = 2 \quad (4.45)$$

unabhängig von a . Der Ortsoperator lässt sich ferner schreiben als $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^* + b)$, wobei b^* und b die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators sind, für die

$$b^* \varphi_n = \sqrt{n+1} \varphi_{n+1} \quad \text{und} \quad b \varphi_n = \begin{cases} \sqrt{n} \varphi_{n-1} & , n > 0 \\ 0 & , n = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

gilt. Damit berechnet man

$$\begin{aligned} & \int dx \overline{(\Psi_n^M(a, x) + \Psi_{n+1}^M(a, x))} x (\Psi_n^M(a, x) + \Psi_{n+1}^M(a, x)) \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{2}} (e^{i(\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n)a} + e^{-i(\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n)a}) \\ &= \sqrt{2(n+1)} \cos((\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n)a), \end{aligned} \quad (4.47)$$

sodass sich insgesamt für den bedingten Ortserwartungswert

$$\omega^{A_g \Psi^M}(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{\int da |g(a)|^2 \cos((\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n)a)}{\int da |g(a)|^2} \quad (4.48)$$

ergibt. Im Limes $|g(a)|^2 \rightarrow \delta(a-t)$ geht dies gegen

$$\omega^{A_g \Psi^M}(x) \xrightarrow{|g(a)|^2 \rightarrow \delta(a-t)} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \cos((\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n)t), \quad (4.49)$$

d.h. der Ortserwartungswert oszilliert mit einer Frequenz

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{M^2 - 2M(n + \frac{1}{2})} - \sqrt{M^2 - 2M(n + \frac{3}{2})} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{n+1}{M} \right) + o(M^{-2}), \end{aligned} \quad (4.50)$$

wobei $o(M^{-2})$ für Terme steht, die mit $M \rightarrow \infty$ wie M^{-2} oder schneller gegen Null gehen. Berechnet man diesen Erwartungswert mit der gewöhnlichen Schrödinger-Gleichung, bekommt man eine Oszillation gleicher Amplitude mit einer Frequenz von exakt $\frac{1}{2\pi}$ unabhängig von n . Die Einführung der dynamischen Zeit führt also zu einer (für großes M schwachen) n -Abhängigkeit dieser Schwingungsfrequenz.

4.3.4 Getriebener harmonischer Oszillator

Besonders interessant ist die Situation, wenn die dynamische Zeit a an einen weiteren Freiheitsgrad koppelt, also H_0 zeitabhängig wird. Als Beispiel wird der durch eine mit der Zeit linear anwachsende Kraft getriebene harmonische Oszillator

$$H_0(t) = \frac{1}{2} (p^2 + x^2) + \lambda x t \quad (4.51)$$

mit einer Kopplungskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachtet. Die zu lösende Zwangsbedingung lautet dann

$$\left(-\frac{1}{2M} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - i \frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 + \lambda x a \right) \Psi^M(a, x) = 0. \quad (4.52)$$

Für dieses System soll der Erwartungswert des Ortes im Grundzustand berechnet werden. Die dazu notwendigen Rechnungen sind allerdings vergleichsweise aufwändig und werden daher getrennt vom Haupttext in Anhang C dargestellt. In diesem Unterabschnitt werden die Ergebnisse dieses Anhangs zusammengestellt und diskutiert.

Zunächst wird in Abschnitt C.1 gezeigt, dass die Standard-Schrödinger-Gleichung mit einem Hamiltonoperator gemäß (4.51) (und der Identifikation von a mit t) durch die normierten Wellenfunktionen

$$\Psi_n(t, x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-iE_n t + i\frac{1}{6} \lambda^2 t^3} e^{-i\lambda(x + \frac{\lambda}{2}t) - \frac{1}{2}(x + \lambda t)^2} H(n, x + \lambda t) \quad (4.53)$$

mit $E_n = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, gelöst wird. Dabei ist $H(n, x)$ das n -te Hermite-Polynom⁶ in x . Der Erwartungswert des Ortes im Grundzustand ($n = 0$), der im Folgenden als *Null-Lage* der Oszillation bezeichnet wird, ist dann gegeben durch

$$\langle x \rangle(t) := \omega_0^{\Psi_0(t)}(x) = -\lambda t. \quad (4.54)$$

Die Null-Lage wird also mit konstanter Geschwindigkeit $-\lambda$ entlang der reellen Achse verschoben.

Zur Berechnung der Null-Lage im System mit dynamischer Zeit müssen zunächst die Differentialgleichung (4.52) gelöst und – wie im zeitunabhängigen Fall – diejenigen Lösungen ausgewählt werden, die für $M \rightarrow \infty$ gegen die Schrödinger-Lösungen (4.53) streben. In Abschnitt C.2 werden diese Lösungen störungstheoretisch bestimmt. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ existiert eine Lösung der Form

$$\Psi_n^M(a, x) = e^{-iMa} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\rho_1}x'^2} H\left(n, \rho_1^{\frac{1}{4}}x'\right) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \rho_2^j \psi_{n,j}^M(y'). \quad (4.55)$$

Die Funktionen $\psi_{n,j}^M$ sind Elemente einer Störungsreihe in ρ_2 und als spezielle Lösungen bestimmter inhomogener Differentialgleichungen gegeben. Ferner wurden die Abkürzungen

$$x' := \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} x + \text{sign}(\lambda) \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} \sqrt{M} a \quad (4.56)$$

$$y' := -\text{sign}(\lambda) \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} x + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} \sqrt{M} a \quad (4.57)$$

sowie

$$\rho_1 := \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2} + 1 \right) \quad \text{und} \quad \rho_2 := \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2} - 1 \right) \quad (4.58)$$

mit $\bar{\lambda} := \lambda/\sqrt{M}$ verwendet. Für diese Funktionen Ψ_n^M gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Psi_n^M(a, x) = \Psi_n(t, x) \quad \text{mit} \quad t \equiv a. \quad (4.59)$$

Nun kann für $n = 0$ der Erwartungswert des Ortes bestimmt werden durch

$$\omega^{A_g \Psi_0^M}(x) = \frac{\int da \int dx |g(a)|^2 \overline{\Psi_0^M(a, x)} x \Psi_0^M(a, x)}{\int da \int dx |g(a)|^2 \overline{\Psi_0^M(a, x)} \Psi_0^M(a, x)}. \quad (4.60)$$

⁶Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$H(n, x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

eine Darstellung des n -ten Hermite-Polynoms.

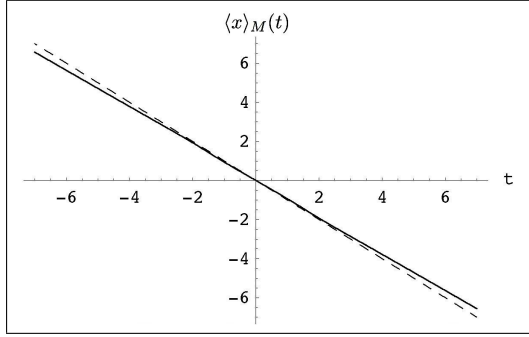


Abbildung 4.1: $\langle x \rangle_M(t)$ für $\lambda = 1$ und $M = 15$. Die gestrichelte Linie entspricht dem Verlauf der Null-Lage für die Schrödingergleichung.

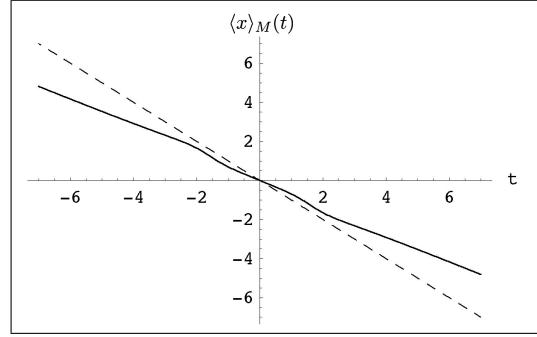


Abbildung 4.2: wie 4.1, nur mit $\lambda = 1$ und $M = 3$.

In Abschnitt C.3 wird diese Größe schließlich unter Berücksichtigung der nullten und ersten Ordnung der Störungsreihe bis zur Ordnung $1/M$ in M berechnet. Im Limes $|g(a)|^2 \rightarrow \delta(a-t)$ ergibt sich

$$\omega^{A_g \Psi_0^M}(x) \xrightarrow{|g(a)|^2 \rightarrow \delta(a-t)} -(\lambda t) \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2}{M} \left(1 - \frac{\frac{1}{12} \lambda^2 t^4}{1 + \frac{1}{36} \lambda^4 t^6} \right) \right] + o(M^{-2}). \quad (4.61)$$

Man erkennt, dass die Geschwindigkeit, mit der sich die Null-Lage bewegt, für Zeiten $t \rightarrow \pm\infty$ gegen $-\lambda \cdot (1 - \frac{\lambda^2}{M})$ strebt. Gegenüber der Lösung der gewöhnlichen Schrödingergleichung *verlangsamt* sich also die Bewegung der Null-Lage unabhängig vom Vorzeichen der Kopplung λ .

In Abbildung 4.1 ist

$$\langle x \rangle_M(t) := -(\lambda t) \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2}{M} \left(1 - \frac{\frac{1}{12} \lambda^2 t^4}{1 + \frac{1}{36} \lambda^4 t^6} \right) \right] \quad (4.62)$$

für die Parameterwerte $\lambda = 1$ und $M = 15$ dargestellt. Die gestrichelte Linie entspricht dem Verlauf der Null-Lage $\langle x \rangle(t)$ im durch die Schrödingergleichung beschriebenen Oszillator. Die Null-Lage folgt im Modell mit dynamischer Zeit – bis auf die bereits diskutierte Verlangsamung – eng diesem Verlauf und die Kurven nähern sich für größere Werte von M immer weiter aneinander an. Deutlichere Abweichungen sieht man in Abbildung 4.2, in der $\langle x \rangle_M(t)$ für $\lambda = 1$ und $M = 3$ dargestellt ist. Für dieses Verhältnis von λ und M müssen jedoch noch höhere Ordnungen als nur $1/M$ berücksichtigt werden, die den Verlauf der Kurve aus Abbildung 4.2 noch weiter korrigieren können.

4.4 Skalares Feld als emergente Zeit

Die in diesem Kapitel entwickelten Methoden werden nun auf die in [3] diskutierte Problemstellung aus der Kosmologie angewandt. Ashtekar, Pawłowski und

Singh betrachten in dieser Arbeit ein masseloses skalares Feld auf einer Robertson-Walker-Raumzeit. Motiviert durch die Tatsache, dass das Skalarfeld ϕ entlang der klassischen Lösungen dieses Modells eine monotone Funktion ist und zur Parametrisierung der Trajektorie verwendet werden kann, wird versucht, ϕ auch in der Quantentheorie als „Uhr“ einzusetzen. Lösungen der in diesem Zusammenhang betrachteten Wheeler-DeWitt-Gleichung sind jedoch nicht normierbar. Um dennoch zu einer physikalischen Interpretation der Lösungen zu kommen, zeigen die Autoren, dass man durch ein Verfahren, bei dem Lösungen über eine einparametrische Gruppe „gemittelt“ werden (*group averaging method*), zu einem Hilbertraum gelangt, auf dem die Lösungen eine endliche Norm besitzen und Erwartungswerte berechnet werden können.

In diesem Abschnitt werden alternativ zu dieser Vorgehensweise die nicht normierbaren Lösungen als Gewichte im Sinne von Abschnitt 4.1 betrachtet. Im durch das Gewicht induzierten GNS-Hilbertraum kann man nun bedingte Erwartungen bezüglich der „Uhr“-Variablen ϕ berechnen, und es wird gezeigt, dass man auf diese Weise dieselben Ergebnisse erhält, die Ashtekar et al. mit Hilfe des Gruppenmittels fanden. Darüber hinaus lassen sich durch die Behandlung der Lösungen im neuen Formalismus auch andere Observablen zur Messung der „Zeit“ ϕ verwenden. Abschnitt 4.2 folgend wird im betrachteten Modell das POVM konstruiert, das den Zeitpunkt beschreibt, zu dem der Skalenfaktor der Robertson-Walker-Raumzeit einen vorgegebenen Wert erreicht.

4.4.1 Das klassische Modell

Als kosmologisches Modell werde im Folgenden eine flache Robertson-Walker-Raumzeit betrachtet, in der die Metrik durch

$$ds^2 = dt^2 - a(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.63)$$

gegeben ist.⁷ Der (positive) Skalenfaktor a ist ein Maß für die Größe des Universums und stellt in diesem Modell den einzigen Freiheitsgrad der Gravitation dar. Auf dieser Raumzeit sei ein masseloses skalares Feld ϕ als ein weiterer Freiheitsgrad gegeben. In [3] wird gezeigt, dass dieses Modell auf einen vierdimensionalen klassischen Phasenraum mit den Koordinaten $(c, p; \phi, p_\phi)$ führt, wobei das Paar (c, p) den Gravitationsfreiheitsgrad repräsentiert. Die Koordinate p ist proportional zum Skalenfaktor und wird daher auf Werte $p \geq 0$ eingeschränkt.⁸ Zur Beschreibung des Skalarfeldes dienen als Koordinaten das Feld ϕ selbst sowie der

⁷Es werden Einheiten verwendet, in denen neben \hbar auch die Lichtgeschwindigkeit c gleich Eins ist.

⁸Diese Einschränkung ist nicht notwendig und negative Werte von p können als Skalenfaktoren in einem *linkshändigen* Koordinatensystem aufgefasst werden. Für das Folgende stellt diese Fallunterscheidung jedoch eine zusätzliche Komplikation dar, die durch die Forderung $p \geq 0$ vermieden wird.

zu ϕ konjugierte Impuls p_ϕ . Die nichtverschwindenden fundamentalen Poissonklammern sind durch

$$\{c, p\} = \frac{8\pi\gamma G}{3} \quad \text{und} \quad \{\phi, p_\phi\} = 1 \quad (4.64)$$

gegeben, wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante und γ der Barbero-Immirzi-Parameter⁹ ist. Die klassische Hamiltonfunktion des Modells lautet

$$\mathcal{H}(c, p; \phi, p_\phi) = -\frac{6}{\gamma^2} c^2 \sqrt{p} + 8\pi G \frac{p_\phi^2}{p^{3/2}} \quad (4.65)$$

und stellt (wie in jeder Theorie, die unter Reparametrisierung der Koordinaten invariant ist) gleichzeitig eine Zwangsbedingung dar, sodass entlang physikalischer Trajektorien

$$\mathcal{H}(c, p; \phi, p_\phi) = 0 \quad (4.66)$$

gilt. Da die Hamiltonfunktion nicht von ϕ abhängt, ist p_ϕ eine Konstante der Bewegung. Ferner lässt sich die Zwangsbedingung (4.66) verwenden, um c als Funktion von p und p_ϕ zu erhalten. Eine Trajektorie ist folglich durch den Verlauf der Variablen (p, ϕ) eindeutig bestimmt und entlang einer Lösung gilt

$$\frac{d}{dt}\phi = \{\phi, \mathcal{H}\} = 16\pi G \frac{p_\phi}{p^{3/2}}. \quad (4.67)$$

Abhängig vom Vorzeichen der Konstanten p_ϕ ist ϕ entlang klassischer Trajektorien folglich entweder monoton wachsend oder fallend, also invertierbar. Dies ermöglicht es, das Feld ϕ als „Zeitparameter“ zu verwenden und den Wert $p|_{\tilde{\phi}}$ von p anzugeben, wenn ϕ gerade den Wert $\tilde{\phi}$ annimmt. Im Rahmen der klassischen Theorie findet man

$$p|_{\tilde{\phi}} = p_0 e^{\pm\sqrt{\frac{16\pi G}{3}}(\tilde{\phi}-\phi_0)} \quad (4.68)$$

mit den Integrationskonstanten p_0 und ϕ_0 . Die Lösungen mit einem Pluszeichen im Exponenten beschreiben ein Universum, das zu sehr frühen „Zeiten“ ϕ beliebig klein ist und dann exponentiell anwächst. Dieses Szenario wird als *Urknall* oder *Big Bang* bezeichnet. Lösungen mit Minuszeichen im Exponenten hingegen bedeuten ein exponentiell schrumpfendes Universum, das schließlich in einem *Big Crunch* endet. Alle klassischen Trajektorien führen auf die Singularität $p \rightarrow 0$.

4.4.2 Wheeler-DeWitt-Theorie des Modells

Das Ziel der Arbeit von Ashtekar et al. ist eine Beantwortung der Frage, ob es in einer Quantentheorie Lösungen gibt, die die Singularität vermeiden. In einem ersten Schritt studieren die Autoren dazu die Wheeler-DeWitt-Theorie [12] des Modells

⁹Der Barbero-Immirzi-Parameter γ ist eine dimensionslose Konstante, die in der Loop-Quantengravitation auftritt. Der numerische Wert spielt für die hier dargestellten Überlegungen keine Rolle, da γ in den dynamischen Gleichungen des Modells nicht auftaucht.

und berechnen Erwartungswerte von p zu dem „Zeitpunkt“, in dem das Feld ϕ gerade einen vorgegebenen Wert annimmt. Das Skalarfeld wird in diesem Zusammenhang auch als „emergente Zeit“ bezeichnet. Die Autoren betrachten Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung, die zu einem festen „Zeitpunkt“ ϕ_0 um ein weit ausgedehntes klassisches Universum konzentriert sind. Diese Lösungen werden im Folgenden als *semiklassische Lösungen* bezeichnet. Nach der Konstruktion eines Hilbertraums, auf dem Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung normierbar sind, zeigen die Autoren dann, dass die Erwartungswerte von p und ϕ für semiklassische Lösungen genau den klassischen Trajektorien (4.68) folgen. Da diese stets in einer Singularität enden bzw. aus einer solchen entspringen, wird die Frage nach einer Vermeidung der Singularität durch eine Quantentheorie in diesem Fall negativ beantwortet.¹⁰

Die Wheeler-DeWitt-Theorie des Modells erhält man, indem die klassischen Phasenraumkoordinaten als Differentialoperatoren auf einem geeigneten Hilbertraum von Funktionen aufgefasst werden. Man sucht dann nach „Wellenfunktionen“ $\Psi(\phi, p)$, die der Gleichung

$$\left(-\frac{6}{\gamma^2} c^2 \sqrt{p} + 8\pi G \frac{p_\phi^2}{p^{3/2}} \right) \Psi(\phi, p) = 0 \quad (4.69)$$

genügen. In [3] wird die Darstellung betrachtet, in der p und ϕ Multiplikationsoperatoren sind. Gemäß der Poissonklammern (4.64) ergibt sich für die zu p und ϕ konjugierten Variablen

$$c \Psi(\phi, p) = i \frac{8\pi\gamma G}{3} \frac{\partial \Psi}{\partial p}(\phi, p) \quad \text{sowie} \quad p_\phi \Psi(\phi, p) = -i \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}(\phi, p). \quad (4.70)$$

Um auf eindeutige Weise zu einer Differentialgleichung zu gelangen, die (4.69) entspricht, muss eine Reihenfolge der im klassischen Fall kommutierenden Faktoren in (4.65) festgelegt werden. Ashtekar et al. wählen die Reihenfolge so, dass sich die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{16\pi G}{3} p^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Psi(\phi, p) = 0 \quad (4.71)$$

ergibt. Dies ist die Wheeler-DeWitt-Gleichung des Modells, dessen Lösungen im Folgenden diskutiert werden.

Durch den Produktansatz $\Psi(\phi, p) = \psi(\phi) \cdot e(p)$ ergeben sich aus (4.71) die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2} + E \right) \chi(\phi) = 0 \quad (4.72)$$

¹⁰Die Arbeit [3] geht jedoch über die Wheeler-DeWitt-Theorie hinaus und es wird (mit hauptsächlich numerischen Methoden) gezeigt, dass semiklassische Lösungen in der Behandlung des Modells im Rahmen der Loop-Quantenkosmologie, einer auf kosmologische Zwecke reduzierten Version der Loop-Quantengravitation, die Singularität *nicht* erreichen. Für die vorliegende Arbeit ist jedoch die Wheeler-DeWitt-Theorie von größerem Interesse, da hierauf die Methode der Gewichte angewandt werden kann.

und

$$(\Theta - E) \psi(p) = 0 \quad (4.73)$$

mit der Separationskonstanten E und der Abkürzung

$$\Theta := -\kappa^2 p^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{p} \frac{\partial}{\partial p}, \quad \kappa := \sqrt{\frac{16\pi G}{3}}. \quad (4.74)$$

Proposition 4.2. *Auf dem Hilbertraum $\mathfrak{H}_0 := L^2(\mathbb{R}_+, p^{-\frac{3}{2}} dp)$ ist der Operator Θ mit Definitionsbereich*

$$D(\Theta) = \{\psi \in \mathfrak{H}_0; \psi', \psi'' \in \mathfrak{H}_0 \wedge \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{p} \psi(p) = 0\} \quad (4.75)$$

selbstadjungiert und positiv.

Beweis. Seien $\psi \in D(\Theta)$ und $\varphi \in \mathfrak{H}_0$. Ferner sei φ zweimal differenzierbar mit $\varphi', \varphi'' \in \mathfrak{H}_0$. Dann erhält man durch zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \Theta \psi \rangle &= -\kappa^2 \left(\int_0^\infty dp p^{-\frac{3}{2}} p^{\frac{3}{2}} \overline{\varphi(p)} \frac{d}{dp} \sqrt{p} \frac{d}{dp} \psi(p) \right) \\ &= -\kappa^2 \left(\overline{\sqrt{p} \varphi(p)} \psi'(p) \Big|_0^\infty - \overline{\varphi'(p)} \sqrt{p} \psi(p) \Big|_0^\infty \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty dp p^{-\frac{3}{2}} p^{\frac{3}{2}} \overline{\left[\frac{d}{dp} \sqrt{p} \frac{d}{dp} \varphi(p) \right]} \psi(p) \right). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Mit der Randbedingung an ψ folgt insgesamt

$$\langle \varphi, \Theta \psi \rangle = \langle \Theta \varphi, \psi \rangle - \kappa^2 \cdot \overline{\sqrt{p} \varphi(p)} \psi'(p) \Big|_0^\infty. \quad (4.77)$$

Der Randterm verschwindet, wenn $\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{p} \varphi(p) = 0$, also $\varphi \in D(\Theta)$ gilt. Das zeigt die Selbstadjungiertheit von Θ . Die Positivität ist trivial. \square

Der Operator Θ besitzt die Eigenfunktionen $(e_k)_{k \in \mathbb{R}}$ mit

$$e_k(p) := \frac{p^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} e^{ik \ln p}, \quad \Theta e_k = \omega_k^2 e_k, \quad \omega_k := \kappa \sqrt{k^2 + \frac{1}{16}}. \quad (4.78)$$

Proposition 4.3. *Für die Funktionen $(e_k)_{k \in \mathbb{R}}$ gelten auf $\mathfrak{H}_0 = L^2(\mathbb{R}_+, p^{-\frac{3}{2}} dp)$ die Orthogonalitätsrelationen*

$$\int_0^\infty dp p^{-\frac{3}{2}} \overline{e_k(p)} e_{k'}(p) = \delta(k - k') \quad (4.79)$$

sowie die Vollständigkeit

$$\int_0^\infty dp p^{-\frac{3}{2}} \overline{e_k(p)} \psi(p) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \psi = 0 \quad (4.80)$$

für $\psi \in \mathfrak{H}_0$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp p^{-\frac{3}{2}} \overline{e_k(p)} e_{k'}(p) &= \int_0^\infty dp \frac{1}{2\pi p} e^{i(k-k') \ln p} \\ &= \int_{-\infty}^\infty dz \frac{1}{2\pi} e^{i(k-k')z} = \delta(k - k') \end{aligned} \quad (4.81)$$

mit der Substitution $z := \ln p$. Für die Vollständigkeitsrelation ist nur die Richtung “ \Rightarrow ” interessant. Gelte also die linke Seite von (4.80) für ein $\psi \in \mathfrak{H}_0$. Dann ist mit derselben Substitution

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty dp p^{-\frac{3}{2}} \overline{e_k(p)} \psi(p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty dz e^{-\frac{1}{4}z} \psi(e^z) e^{ikz} \end{aligned} \quad (4.82)$$

für alle $k \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet das Verschwinden der Fouriertransformierten der Funktion $\tilde{\psi}(z) := e^{-\frac{1}{4}z} \psi(e^z)$, also $\tilde{\psi}(z) = 0$ für fast alle $z \in \mathbb{R}$. Damit gilt ebenfalls

$$\tilde{\psi}(\ln p) = p^{-\frac{1}{4}} \psi(p) = 0 \quad \text{für fast alle } p \in \mathbb{R}_+, \quad (4.83)$$

also $\psi = 0$ im Sinne von $L^2(\mathbb{R}_+, p^{-\frac{3}{2}} dp)$. \square

Da die Gleichung (4.72) in ϕ Lösungen der Form $e^{\pm i\sqrt{E}\phi}$ besitzt, schreibt sich die allgemeine Lösung von (4.71) als

$$\Psi(\phi, p) = \int dk \left[\hat{\Psi}_+(k) e_k(p) e^{i\omega_k \phi} + \hat{\Psi}_-(k) e_k(p) e^{-i\omega_k \phi} \right], \quad (4.84)$$

wobei die Funktionen $\hat{\Psi}_\pm$ so beschaffen sind, dass das Integral (4.84) existiert und Differentiation nach p bzw. ϕ mit dem Integral über k vertauscht werden können. Dies ist etwa der Fall, wenn $\hat{\Psi}_\pm \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit dem Schwarzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist. In Analogie zur Lösungstheorie der Klein-Gordon-Gleichung sagt man, Ψ sei eine Lösung *positiver* (bzw. *negativer*) *Frequenz*, wenn $\hat{\Psi}_-$ (bzw. $\hat{\Psi}_+$) verschwindet. Darüber hinaus erhalten die Operatoren $(c, p; \phi, p_\phi)$ jeweils die Unterräume der Lösungen positiver bzw. negativer Frequenz. *Für das Folgende genügt es daher, sich auf einen dieser Unterräume zu beschränken.* Sei dazu der Unterraum von Lösungen *positiver Frequenz* ausgewählt.

Auf diesem Unterraum gilt

$$-i \frac{\partial}{\partial \phi} \Psi(\phi, p) = \sqrt{\Theta} \Psi(\phi, p), \quad (4.85)$$

wobei $\sqrt{\Theta}$ die Wurzel des positiven Operators Θ auf \mathfrak{H}_0 ist. Diese Gleichung ist von erster Ordnung in ϕ und wird von Ashtekar et al. als Schrödingergleichung interpretiert, in der das Feld ϕ die Rolle des Zeitparameters übernimmt. Durch die Einschränkung auf positive Frequenzen ist (4.85) äquivalent zur vollen Wheeler-DeWitt-Gleichung (4.71).

4.4.3 Semiklassische Lösungen als Gewichte

Gesucht ist nun ein Hilbertraum \mathfrak{H} , auf dem die Differentialoperatoren $(c, p; \phi, p_\phi)$ sowie Θ selbstadjungiert sind. Die vorangegangenen Ausführungen legen es nahe, $\mathfrak{H} := L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_0) = L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, p^{-\frac{3}{2}} d\phi dp)$ zu wählen. Die Wheeler-DeWitt-Gleichung ist dann die Zwangsbedingung

$$H\Psi(\phi, p) = 0 \quad \text{mit} \quad H := \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \Theta \quad (4.86)$$

auf \mathfrak{H} . Das Spektrum von H auf \mathfrak{H} ist rein kontinuierlich, sodass Lösungen der Zwangsbedingung nicht normierbar sind. Es werden im Folgenden semiklassische Lösungen der Zwangsbedingung konstruiert und als Gewichte auf der Observablenalgebra aufgefasst. Schließlich wird die bedingte Erwartung von p berechnet unter der Voraussetzung, dass ϕ einen vorgegebenen Wert $\bar{\phi}$ annimmt.

Es muss zunächst eine Lösung von (4.86) gefunden werden, die zum festen „Zeitpunkt“ ϕ_0 um die Werte $p = \tilde{p} \in \mathbb{R}_+$ und $p_\phi = \tilde{p}_\phi \in \mathbb{R}$ konzentriert ist. Um zu gewährleisten, dass $(\tilde{p}, \tilde{p}_\phi)$ ein ausgedehntes klassisches Universum darstellt, wird zusätzlich $\tilde{p}, |\tilde{p}_\phi| \gg 1$ gefordert. Im Folgenden wird \tilde{p}_ϕ positiv gewählt. Man betrachte die Funktion

$$\Psi(\phi_0, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\Psi}(k) e_k(p) e^{i\omega_k \phi_0} \quad \text{mit} \quad \hat{\Psi}(k) := e^{-\frac{(k-\tilde{k})^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega_k \tilde{\phi}}, \quad (4.87)$$

wobei $\sigma \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $\tilde{k} := -(1/\kappa) \tilde{p}_\phi$ und $\tilde{\phi} := (1/\kappa)(\ln \tilde{p} - \frac{1}{4\sigma^2}) + \phi_0$ bedeuten. $\Psi(\phi_0, p)$ sei als Anfangsbedingung für eine Lösung der Zwangsbedingung (4.86) verstanden. Die volle Lösung ist dann nach (4.85) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi(\phi, p) &= e^{i\sqrt{\Theta}(\phi-\phi_0)} \Psi(\phi_0, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\Psi}(k) e_k(p) e^{i\omega_k \phi} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\frac{(k-\tilde{k})^2}{2\sigma^2}} e_k(p) e^{i\omega_k(\phi-\tilde{\phi})}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Wegen $\tilde{p}_\phi \gg 1$ ist $\tilde{k} \ll -1$, sodass man in (4.88) $\omega_k \approx -\kappa k$ nähern kann. In dieser Näherung lässt sich das Integral über k ausführen und man erhält

$$\begin{aligned} \Psi(\phi, p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{-\frac{(k-\tilde{k})^2}{2\sigma^2}} p^{\frac{1}{4}} e^{ik(\ln \frac{p}{\tilde{p}} + \frac{1}{4\sigma^2} - \kappa(\phi-\phi_0))} \\ &= \sigma p^{\frac{1}{4}} e^{i\tilde{k}(\ln \frac{p}{\tilde{p}} + \frac{1}{4\sigma^2} - \kappa(\phi-\phi_0))} e^{-\frac{\sigma^2}{2} (\ln \frac{p}{\tilde{p}} + \frac{1}{4\sigma^2} - \kappa(\phi-\phi_0))^2}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Zum Nachweis, dass Ψ eine semiklassische Lösung der Wheeler-DeWitt-Gleichung ist, berechnet man für $\Psi_0(\bullet) := \Psi(\phi_0, \bullet)$ auf \mathfrak{H}_0

$$\langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle = \sigma \sqrt{\pi} \quad (4.90)$$

$$\langle \Psi_0, p \Psi_0 \rangle = \tilde{p} \sigma \sqrt{\pi} \quad (4.91)$$

$$\langle \Psi_0, p^2 \Psi_0 \rangle = \tilde{p}^2 e^{\frac{1}{2\sigma^2}} \sigma \sqrt{\pi}. \quad (4.92)$$

Der Erwartungswert von p im Zustand Ψ_0 auf \mathfrak{H}_0 ist also

$$\langle p \rangle_0 := \omega_0^{\Psi_0}(p) = \frac{\langle \Psi_0, p \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle} = \tilde{p} \quad (4.93)$$

mit

$$(\Delta p^2)_0 := \langle p^2 \rangle_0 - \langle p \rangle_0^2 = \tilde{p}^2 \left(e^{\frac{1}{2\sigma}} - 1 \right) . \quad (4.94)$$

Ebenso erhält man

$$\langle p_\phi \rangle_0 = \tilde{p}_\phi \quad \text{mit} \quad (\Delta p_\phi^2)_0 = \frac{\kappa \sigma^2}{2} . \quad (4.95)$$

Die Funktion $\Psi(\phi, p)$ ist also zum „Zeitpunkt“ ϕ_0 um das klassische Universum ($p = \tilde{p}, p_\phi = \tilde{p}_\phi$) konzentriert. Im durch Ψ induzierten Gewicht w_Ψ ist nun der bedingte Erwartungswert $\bar{p}|_{\bar{\phi}}$ von p unter der Bedingung, dass ϕ einen vorgegebenen Wert $\bar{\phi}$ annimmt, zu bestimmen. Sei erneut $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine nicht überall verschwindende Testfunktion und A_g der Multiplikationsoperator mit der Testfunktion g in ϕ . Dann gilt $A_g \in L_\Psi$ und

$$\omega^{A_g \Psi}(p) = \frac{w_\Psi(A_g^* p A_g)}{w_\Psi(A_g^* A_g)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \int_0^{\infty} dp p^{-\frac{3}{2}} |g(\phi)|^2 \overline{\Psi(\phi, p)} p \Psi(\phi, p)}{\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \int_0^{\infty} dp p^{-\frac{3}{2}} |g(\phi)|^2 \overline{\Psi(\phi, p)} \Psi(\phi, p)} . \quad (4.96)$$

Zur Auswertung von (4.96) berechnet man zunächst die Integrale

$$\int_0^{\infty} dp p^{-\frac{3}{2}} |\Psi(\phi, p)|^2 = \sqrt{\pi} \sigma \quad (4.97)$$

und

$$\int_0^{\infty} dp p^{-\frac{3}{2}} p |\Psi(\phi, p)|^2 = \sqrt{\pi} \sigma \tilde{p} e^{\kappa(\phi - \phi_0)} , \quad (4.98)$$

sodass sich insgesamt

$$\omega^{A_g \Psi}(p) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\phi |g(\phi)|^2 \tilde{p} e^{\kappa(\phi - \phi_0)}}{\int_{-\infty}^{\infty} d\phi |g(\phi)|^2} \quad (4.99)$$

ergibt. Die gesuchte bedingte Erwartung $\bar{p}|_{\bar{\phi}}$ ist gegeben durch (4.99) im Limes $|g(\phi)|^2 \rightarrow \delta(\phi - \bar{\phi})$. Man erhält

$$\bar{p}|_{\bar{\phi}} = \tilde{p} e^{\kappa(\bar{\phi} - \phi_0)} . \quad (4.100)$$

Dieser bedingte Erwartungswert folgt genau der klassischen Trajektorie (4.68), und (4.100) beschreibt ein Universum, das zu frühen „Zeiten“ ϕ aus einem *Big Bang* entspringt. Wählt man in der Anfangsbedingung (4.87) die Konstante \tilde{p}_ϕ negativ, so bekommt man für (4.100) die entsprechende *Big-Crunch*-Lösung mit einem Minuszeichen im Exponenten. Das Ergebnis (4.100) wird auch von Ashtekar et al. in [3] gefunden und damit geschlossen, dass die Beschreibung des Modells durch die Wheeler-DeWitt-Gleichung nicht das Auftreten von Singularitäten in semiklassischen Lösungen verhindert.

4.4.4 Zeitpunkt des Urknalls

Die Betrachtung der Wheeler-DeWitt-Gleichung im neu entwickelten Formalismus lässt jedoch nicht nur die Reproduktion der Resultate aus [3] zu. Der Konstruktion aus Abschnitt 4.2 folgend, können auch in diesem kosmologischen Modell Observablen in p zur „Zeitmessung“ verwendet werden. Dazu wird ein Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ mit endlichem, nicht verschwindendem Gewicht benötigt, d.h. $0 < w_\Psi(A^*A) < \infty$ zu einer Lösung Ψ der Wheeler-DeWitt-Gleichung. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf den Fall, dass Ψ eine semiklassische Lösung des Typs (4.88) mit positivem \tilde{p}_ϕ ist.

Es wird zunächst gezeigt, dass die Spektralprojektoren $E^p(I)$ von p zu einem kompakten Intervall $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ endliches Gewicht haben. Sei dazu

$$\tau_{E^p(I)} := \int d\phi e^{-i\sqrt{\Theta}\phi} E^p(I)^* E^p(I) e^{i\sqrt{\Theta}\phi}. \quad (4.101)$$

Der Integralkern bezüglich k von $\tau_{E^p(I)}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_{E^p(I)}(k, k') &= \int d\phi \int_0^\infty dp p^{-\frac{3}{2}} \overline{e_k(p)} e^{-i\omega_k\phi} \mathbb{1}_{[a,b]}(p) e^{i\omega_{k'}\phi} e_{k'}(p) \\ &= \int_a^b dp p^{-\frac{3}{2}} \overline{e_k(p)} e_{k'}(p) \cdot 2\pi \delta(\omega_k - \omega_{k'}) \\ &= \int_{\ln a}^{\ln b} dz e^{-i(k-k')z} \frac{\sqrt{k^2 + \frac{1}{16}}}{\kappa|k|} (\delta(k - k') + \delta(k + k')) \\ &= \frac{\sqrt{k^2 + \frac{1}{16}}}{\kappa|k|} \left(\ln \frac{b}{a} \delta(k - k') + \frac{i}{2k} (e^{-2ik \ln b} - e^{-2ik \ln a}) \delta(k + k') \right). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} w_\Psi(E^p(I)^* E^p(I)) &= \int dk \int dk' \overline{\hat{\Psi}(k)} \tau_{E^p(I)}(k, k') \hat{\Psi}(k') \\ &= \int dk \frac{\sqrt{k^2 + \frac{1}{16}}}{\kappa|k|} \left(\ln \frac{b}{a} |\hat{\Psi}(k)|^2 + \frac{i}{2k} (e^{-2ik \ln b} - e^{-2ik \ln a}) \overline{\hat{\Psi}(k)} \hat{\Psi}(-k) \right). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Für die semiklassische Lösung Ψ aus (4.88) kann man wegen $\tilde{k} \ll -1$ die Näherungen

$$k^2 + \frac{1}{16} \approx k^2 \quad \text{und} \quad \overline{\hat{\Psi}(k)} \hat{\Psi}(-k) = e^{-\frac{k^2 + \tilde{k}^2}{\sigma^2}} \approx 0 \quad (4.104)$$

verwenden und erhält somit

$$0 < w_\Psi(E^p(I)^* E^p(I)) = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{b}{a} \cdot \int dk |\hat{\Psi}(k)|^2 < \infty, \quad (4.105)$$

also $E^p(I) \in L_\Psi \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$. Das Ereignis „Messwert von p liegt im Intervall I “ stellt damit eine hinreichende Einschränkung der „Zeit“ ϕ dar, sodass dieses Ereignis selbst zur Zeitmessung verwendet werden kann.

Nach Abschnitt 4.2 existiert zu $E^p(I)$ die positive Abbildung $\Lambda_{E^p(I)}$, die einen positiven Operator $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ auf den positiven Operator

$$\Lambda_{E^p(I)}(B) = \int d\phi \tau_{E^p(I)}^{-\frac{1}{2}} e^{-i\sqrt{\Theta}\phi} E^p(I)^* B E^p(I) e^{i\sqrt{\Theta}\phi} \tau_{E^p(I)}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.106)$$

in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ abbildet. Das POVM zur Messung des „Zeitpunktes“, zu dem für p ein Wert im Intervall I gemessen wird, erhält man als das Bild des Spektralmaßes $E^\phi(\bullet)$ des Operators ϕ auf \mathfrak{H} unter $\Lambda_{E^p(I)}$. Im Folgenden wird dieses POVM explizit konstruiert und mit dessen Hilfe gezeigt, dass die Urknallsingularität $p = 0$ in der semiklassischen Lösung (4.88) zur „Zeit“ $\phi \rightarrow -\infty$ erreicht wird.

Durch die Näherungen (4.104) ergibt sich für den Integrkern von $\tau_{E^p(I)}$ eingeschränkt auf die Anwendung auf Ψ

$$\tau_{E^p(I)}(k, k') = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{b}{a} \delta(k - k') \quad (4.107)$$

und daher

$$\tau_{E^p(I)}^{-\frac{1}{2}}(k, k') = \sqrt{\kappa} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \delta(k - k') . \quad (4.108)$$

Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein messbares Intervall, dann gilt

$$\begin{aligned} & \Lambda_{E^p(I)}(E^\phi(J))(k, k') \\ &= \kappa \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{-1} \int_J d\phi \int_a^b dp p^{-\frac{3}{2}} \overline{e_k(p)} e_{k'}(p) e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})\phi} \\ &= \kappa \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{-1} \frac{i}{2\pi(k - k')} \left(e^{-i(k-k')\ln b} - e^{-i(k-k')\ln a} \right) \int_J d\phi e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})\phi} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Zu untersuchen ist der Limes $I = [a, b] \rightarrow \{0\}$. Hierzu wird zunächst in (4.109) der Limes $b \rightarrow a$ für $a > 0$ bestimmt und später der Fall $a \rightarrow 0$ betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow a} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{-1} \left(e^{-i(k-k')\ln b} - e^{-i(k-k')\ln a} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow a} \frac{e^{-i(k-k')\ln a} - e^{-i(k-k')\ln b}}{\ln a - \ln b} = \frac{d}{dx} e^{-i(k-k')x} \Big|_{x=\ln a} \\ &= -i(k - k') e^{-i(k-k')\ln a} . \end{aligned} \quad (4.110)$$

Aus (4.109) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \Lambda_{E^p(\{a\})}(E^\phi(J))(k, k') &:= \lim_{b \rightarrow a} \Lambda_{E^p([a,b])}(E^\phi(J))(k, k') \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} e^{-i(k-k')\ln a} \int_J d\phi e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})\phi} . \end{aligned} \quad (4.111)$$

Dies ist die explizite Form des POVMs, das der Observablen „Zeitpunkt, zu dem p den Wert a annimmt“ entspricht. Die Wahrscheinlichkeit $W(a|J)$, während des

„Zeitintervalls“ J für p den Wert a zu messen, ist als Erwartungswert von (4.111) in \mathfrak{H}_0 gegeben:

$$\begin{aligned}
W(a|J) &:= \frac{\langle \Psi, \Lambda_{Ep(\{a\})}(E^\phi(J)) \Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} \\
&= \frac{\kappa}{2\sigma\pi^{3/2}} \int dk \int dk' \int_J d\phi \overline{\hat{\Psi}(k)} e^{-i(k-k') \ln a} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})\phi} \hat{\Psi}(k') \\
&= \frac{\kappa}{2\sigma\pi^{3/2}} \int_J d\phi \int dk \int dk' e^{-\frac{(k-\tilde{k})^2 + (k'-\tilde{k})^2}{2\sigma^2}} e^{-i(k-k')(\ln a - \kappa(\phi - \tilde{\phi}))} \\
&= \frac{\kappa\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_J d\phi e^{-\frac{\sigma^2}{2} (\ln a - \kappa(\phi - \tilde{\phi}))^2} .
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Für das zweite Gleichheitszeichen wurde erneut die Näherung $\omega_k \approx -\kappa k$ verwendet. Mit Hilfe dieses Ergebnisses lässt sich nun die Frage nach dem Zeitpunkt des Urknalls, d.h. des Erreichens der Singularität $p = 0$, stellen. Für ein beschränktes Intervall $J = [\phi_1, \phi_2]$ berechnet man nach (4.112)

$$\begin{aligned}
W(a|[\phi_1, \phi_2]) &= \frac{1}{2} \left(\text{sign}(\ln a + \kappa(\phi_2 - \tilde{\phi})) \text{erf}(\sigma|\ln a + \kappa(\phi_2 - \tilde{\phi})|) \right. \\
&\quad \left. - \text{sign}(\ln a + \kappa(\phi_1 - \tilde{\phi})) \text{erf}(\sigma|\ln a + \kappa(\phi_1 - \tilde{\phi})|) \right)
\end{aligned} \tag{4.113}$$

mit der Gaußschen Fehlerfunktion erf. Da für die Fehlerfunktion $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{erf}(x) = 1$ gilt, verschwindet die Wahrscheinlichkeit, die Singularität innerhalb eines endlichen Zeitintervalls zu erreichen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} W(a|[\phi_1, \phi_2]) = 0 . \tag{4.114}$$

Aus (4.112) folgt darüber hinaus

$$W(a|[0, \infty)) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{sign}(\ln a - \kappa\tilde{\phi}) \text{erf}(\sigma|\ln a - \kappa\tilde{\phi}|) \right) \tag{4.115}$$

$$W(a|(-\infty, 0]) = \frac{1}{2} \left(1 - \text{sign}(\ln a - \kappa\tilde{\phi}) \text{erf}(\sigma|\ln a - \kappa\tilde{\phi}|) \right) \tag{4.116}$$

und daher

$$\lim_{a \rightarrow 0} W(a|[0, \infty)) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{a \rightarrow 0} W(a|(-\infty, 0]) = 1 . \tag{4.117}$$

In Übereinstimmung mit Gleichung (4.100) wird die Singularität also für $\phi \rightarrow -\infty$ erreicht.

Bemerkung. Wählt man in der semiklassischen Lösung (4.88) die Konstante \tilde{p}_ϕ negativ, ergibt sich das Erreichen der Singularität für $\phi \rightarrow +\infty$.

Zusammenfassung und Ausblick

Eines der größten konzeptionellen Probleme in der Konstruktion einer Quantentheorie der Gravitation ist die Tatsache, dass die Raumzeit in einer solchen Theorie eine dynamische Observable darstellt, während sie gleichzeitig (in Quantenfeldtheorien mit fixierter Raumzeit) zur Parametrisierung der Quantenfelder dient. Eine mögliche Lösung dieses Problems besteht darin, die Raumzeit aus der Beschreibung zu eliminieren, indem man Felder als Funktionen anderer Felder ausdrückt. Die beobachtbaren Größen sind dann *relationale Observablen* des Typs „Wert des Feldes φ , wenn die weiteren Felder $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die Werte $(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n)$ annehmen“.

In dieser Arbeit wurde die Anwendung des Programms der relationalen Observablen auf die nichtrelativistische Quantenmechanik studiert. Das Ziel bestand darin, eine relationale Beschreibung des externen klassischen Zeitparameters zu geben, der in der Quantenmechanik beobachtbare Größen wie Erwartungswerte bzw. Wahrscheinlichkeiten parametrisiert.

In einem ersten Schritt wurde dazu die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens in einem vorgegebenen Gebiet betrachtet. Deren explizite Zeitabhängigkeit konnte durch die Tatsache eliminiert werden, dass ein geeignetes physikalisches Ereignis (beispielsweise das Eintreffen eines freien Teilchens in einem endlichen Gebiet) zur Messung der Zeit verwendet werden kann [7]. Ein solches Ereignis kann dann als „Uhr“ für die Beschreibung der Dynamik des übrigen Systems herangezogen werden. Im klassischen Modell der Brownschen Bewegung wurde zunächst gezeigt, dass der Zeitparameter in $d \geq 3$ Raumdimensionen durch die Position eines Referenzteilchens ersetzt werden kann. Anschließend wurden in der Quantenmechanik die *bedingten Wahrscheinlichkeiten* konstruiert, ein Teilchen in einem gegebenen Gebiet anzutreffen, falls sich ein zweites Teilchen gerade in einem anderen, ebenfalls vorgegebenen Gebiet befindet. Für die Fälle von zwei freien Teilchen sowie von zwei ungekoppelten harmonischen Oszillatoren wurden diese bedingten Wahrscheinlichkeiten explizit berechnet.

Daran anschließend wurde untersucht, inwieweit diese Konstruktion einer relationalen Zeit aufrecht erhalten werden kann, wenn die Zeit nicht mehr als klassischer Parameter, sondern als intrinsische Quantenvariable angesehen wird. Zu diesem Zweck wurde eine Erweiterung der Quantenmechanik entwickelt, die den Zeitparameter als quantenmechanischen Freiheitsgrad enthält. Lösungen der Schrödingergleichung können dann als *Gewichte* auf der erweiterten Observablenalgebra

aufgefasst werden, und die Zustände auf den zu den Gewichten assoziierten GNS-Hilberträumen besitzen eine Interpretation als bedingte Erwartungswerte. Es wurde ferner gezeigt, dass sich Ereignisse genau dann im obigen Sinn als „Uhren“ einsetzen lassen, wenn der das Ereignis beschreibende Operator im Definitionsbereich des betrachteten Gewichtes liegt. Man erhält in diesem Fall genau die zuvor betrachteten bedingten Wahrscheinlichkeiten bezüglich dieses Ereignisses als „Uhr“.

Der neu entwickelte Formalismus wurde weiter dazu verwendet, am Beispiel des harmonischen Oszillators Effekte eines zusätzlichen kinetischen Terms für die Zeitvariable in der Schrödingergleichung zu studieren. Als deutlichste Änderung gegenüber der Standardtheorie ergab sich eine Verlangsamung der Bewegung der Null-Lage im durch eine zeitlich linear anwachsende Kraft getriebenen Oszillator.

Schließlich wurde mit Hilfe des erweiterten Formalismus' ein Problem aus der Quantenkosmologie betrachtet. Im Modell eines masselosen Skalarfeldes auf einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit wurde mit den entwickelten Methoden gezeigt, dass Lösungen der Wheeler-DeWitt-Gleichung des Modells, die ein Semiklassizitätskriterium erfüllen, immer auf eine Singularität treffen, in der das Universum auf die Größe Null schrumpft („Urknall“). Dieses Resultat wurde in [3] auf andere Weise gefunden. Darüber hinaus konnte im neuen Formalismus gezeigt werden, dass das Ereignis „Skalenfaktor a nimmt vorgegebenen Wert \tilde{a} an“ zur Messung der Zeit innerhalb des Modells geeignet ist. Dies erlaubte eine Berechnung des Zeitpunktes des Urknalls.

Mit den Resultaten dieser Arbeit stellt sich natürlich die Frage nach einer möglichen Ausweitung des Programms der relationalen Observablen über die nichtrelativistische Quantenmechanik hinaus. Das Konzept der Beschreibung eines Zeitpunktes durch ein Ereignis kann auf die Beschreibung eines *Raumzeitpunktes* im Minkowskiraum verallgemeinert werden [8] – eine weitergehende Verallgemeinerung etwa auf den Fall einer gekrümmten Raumzeit ist jedoch ein noch offenes, interessantes Problem.

Der Ansatz, nicht normierbare Lösungen der Schrödingergleichung als Gewichte zu behandeln und auf diese Weise Zustände auf der durch das Gewicht induzierten GNS-Darstellung zu erhalten, eröffnet ebenfalls weitere Fragestellungen. Auf der einen Seite kann der Formalismus verwendet werden, um weitere Modelle einer Quantengravitationstheorie (im Rahmen der Wheeler-DeWitt-Gleichung) zu untersuchen. Beispielsweise könnte ein massebehaftetes Feld auf einer (gekrümmten) Robertson-Walker-Raumzeit analysiert werden.

Auf der anderen Seite könnte der Ansatz darüber hinaus bei der Behandlung von Problemen innerhalb der Quantenmechanik von Nutzen sein. Interessant wäre es beispielsweise zu untersuchen, ob man *Resonanzen* – dies sind mathematisch bisher nicht gut verstandene, zeitlich exponentiell zerfallende Anregungszustände in der Quantenmechanik – als Gewichte auffassen und so zu einer verbesserten Beschreibung dieses Phänomens gelangen kann.

Anhang A

Positive Operatoren

An einigen Stellen dieser Arbeit benötigt man grundlegende Definitionen und Aussagen über positive Operatoren, die hier kurz zusammengestellt werden. Hauptreferenz für diesen Teil ist Kapitel VI.4 in [33].

Definition A.1. Sei \mathfrak{H} ein Hilbertraum und $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ die Menge der beschränkten Operatoren auf \mathfrak{H} . Ein Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ heißt *positiv*, falls $(x, Ax) \geq 0$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ gilt. In diesem Fall schreibt man auch $A \geq 0$. Gilt $A - B \geq 0$ für einen weiteren Operator $B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, schreibt man $A \geq B$.

Um zu zeigen, dass aus der Positivität eines Operators die Selbstadjungiertheit folgt, wird zunächst das folgende vorbereitende Lemma bewiesen:

Lemma A.2. Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und \mathfrak{H} komplex. Dann ist A durch die Erwartungswerte (x, Ax) für alle $x \in \mathfrak{H}$ bereits eindeutig bestimmt.

Beweis. Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite zeigt man die Formel

$$\begin{aligned} (x, Ay) &= \frac{1}{2} [((x+y), A(x+y)) - (x, Ax) - (y, Ay)] \\ &\quad - \frac{i}{2} [((x+iy), A(x+iy)) - (x, Ax) - (y, Ay)] \end{aligned} \tag{A.1}$$

für alle $x, y \in \mathfrak{H}$. Sei nun $(y_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von \mathfrak{H} mit einer endlichen oder abzählbaren Indexmenge I . Dann gilt

$$Ax = \sum_{i \in I} (y_i, Ax) y_i \tag{A.2}$$

mit den durch (A.1) gegebenen Matrixelementen. Also ist A eindeutig bestimmt. \square

Lemma A.3. Sei \mathfrak{H} ein komplexer Hilbertraum. Dann ist jeder positive Operator selbstadjungiert.

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ positiv. Insbesondere gilt dann $(x, Ax) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathfrak{H}$, und daher

$$(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x) . \quad (\text{A.3})$$

Wendet man nun (A.3) auf alle Skalarprodukte auf der rechten Seite von (A.1) an, erhält man

$$(x, Ay) = (Ax, y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{H} . \quad (\text{A.4})$$

□

Wie aus positiven Zahlen lässt sich aus einem positiven Operator „die Wurzel ziehen“. Es gilt der

Satz A.4. *Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ positiv. Dann existiert ein eindeutig bestimmter positiver Operator $A^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit $(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$.*

Zum Beweis dieses Satzes sei auf die Literatur [33] verwiesen.

Anhang B

GNS-Konstruktion für Zustände und Gewichte

Der Begriff *Zustand* wird in dieser Arbeit auf zwei unterschiedliche Weisen verwendet. Zum einen bezeichnet ein normierter Vektor Ω aus einem Hilbertraum \mathfrak{H} einen (quantenmechanischen) Zustand, in dem Erwartungswerte der Form

$$\langle A \rangle = (\Omega, A\Omega) \tag{B.1}$$

berechnet werden können, wobei A ein selbstadjungierter Operator auf \mathfrak{H} ist. Zum anderen wird jedoch auch ein lineares, positives, normiertes Funktional auf einer Algebra \mathfrak{A} als Zustand bezeichnet. Tatsächlich sind beide Verwendungsweisen des Begriffes durch eine Konstruktion, die auf I. Gelfand, M. Naimark [20] und I. Segal [39] zurückgeht, eng miteinander verbunden. Eine solche *GNS-Konstruktion* existiert darüber hinaus sogar für *Gewichte* auf einer Algebra \mathfrak{A} , wobei ein Gewicht ein verallgemeinertes Funktional darstellt, das zunächst nur auf den positiven Elementen von \mathfrak{A} definiert ist und auch den Wert ∞ annehmen kann. Die GNS-Konstruktion für Gewichte wird in Kapitel 4 verwendet.

In diesem Anhang wird daher die GNS-Konstruktion für Zustände (im Sinne von normierten, positiven Funktionalen) vorgestellt und anschließend die GNS-Konstruktion für Gewichte explizit durchgeführt. Zunächst werden dafür in Abschnitt B.1 die notwendigen Begriffe sowie die wichtigsten Zusammenhänge ohne Beweise und nur knapp kommentiert zusammengestellt. Die Abschnitte B.2 und B.3 behandeln dann die GNS-Konstruktion für lineare Funktionale bzw. Gewichte. Hauptreferenz für diesen Anhang ist das Buch [6], in dem man insbesondere die im Abschnitt B.1 weggelassenen Beweise findet.

B.1 Grundlegende Begriffe

Ein Vektorraum \mathfrak{A} über \mathbb{C} heißt eine *Algebra*, falls es auf \mathfrak{A} eine zusätzliche Verknüpfung gibt, die jedem Paar $A, B \in \mathfrak{A}$ das Produkt $AB \in \mathfrak{A}$ zuweist. Die Verknüpfung ist assoziativ und distributiv, es gilt also

- $A(BC) = (AB)C$,
- $A(B + C) = AB + AC$,
- $(\alpha A)(\beta B) = \alpha\beta(AB)$

für alle $A, B, C \in \mathfrak{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Gibt es in \mathfrak{A} ein Element $\mathbb{1}$, für das $A = \mathbb{1}A = A\mathbb{1}$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt, so sagt man, \mathfrak{A} ist eine *Algebra mit Eins*. Die in dieser Arbeit betrachteten Algebren besitzen alle ein Einselement, sodass im Folgenden die Existenz einer Eins stets implizit vorausgesetzt wird.¹

Definition B.1. Sei \mathfrak{A} eine Algebra. Die Abbildung $\mathfrak{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathfrak{A}$ heißt eine *Involution*, falls für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

- (i) $A^{**} = A$,
- (ii) $(AB)^* = B^*A^*$,
- (iii) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$.

Eine Algebra \mathfrak{A} , die eine Involution besitzt, heißt eine **-Algebra* und ein Element $A \in \mathfrak{A}$ heißt *selbstadjungiert*, falls $A = A^*$ gilt.

Gibt es auf \mathfrak{A} eine Normabbildung $\| \cdot \| : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Eigenschaften

- $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0$ genau dann, wenn $A = 0$,
- $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$,
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ besitzt, und ist \mathfrak{A} vollständig bezüglich dieser Norm, so heißt \mathfrak{A} eine *Banach-Algebra*. Mit diesen Begriffen lässt sich nun der Begriff der *C*-Algebra* definieren.

Definition B.2. Eine *C*-Algebra* ist eine Banach *-Algebra \mathfrak{A} , in der

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \quad \forall A \in \mathfrak{A} \quad (\text{B.2})$$

gilt.

¹Dies dient nur der Vereinfachung und ist nicht notwendig. Besitzt eine Algebra kein Einselement, so kann man die Algebra immer in eine Algebra mit Eins einbetten (*Adjunktion einer Eins*). Für die erweiterte Algebra behalten alle Aussagen in diesem Anhang ihre Gültigkeit.

Das Standardbeispiel für eine C^* -Algebra ist die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum \mathfrak{H} . $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist eine Banachalgebra und die Involution ist durch Bildung der Hilbertraum-Adjungierten gegeben. Daraus folgt direkt die Eigenschaft (B.2).²

Definition B.3. Eine *Darstellung* einer C^* -Algebra \mathfrak{A} ist ein Paar (\mathfrak{H}, π) , wobei \mathfrak{H} ein Hilbertraum und $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ein $*$ -Morphismus ist, d.h. π erfüllt die Eigenschaften

$$(i) \quad \pi(\alpha A + \beta B) = \alpha\pi(A) + \beta\pi(B),$$

$$(ii) \quad \pi(AB) = \pi(A)\pi(B),$$

$$(iii) \quad \pi(A^*) = \pi(A)^*$$

für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Zwei Darstellungen (\mathfrak{H}_1, π_1) und (\mathfrak{H}_2, π_2) heißen *äquivalent*, falls es eine unitäre Abbildung $U : \mathfrak{H}_1 \rightarrow \mathfrak{H}_2$ gibt, sodass

$$\pi_2(A) = U\pi_1(A)U^* \quad \forall A \in \mathfrak{A} \quad (B.3)$$

gilt.

In Anlehnung an den Hilbertraumfall sind auch die folgenden Definitionen naheliegend:

Definition B.4. Sei \mathfrak{A} eine Algebra und $A \in \mathfrak{A}$. Die *Resolventenmenge* $r(A)$ von A ist die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $(A - \lambda\mathbf{1})$ ein Inverses besitzt. Das *Spektrum* $\sigma(A)$ ist das Komplement von $r(A)$ in \mathbb{C} .

Definition B.5. Ein selbstadjungiertes Element A einer $*$ -Algebra \mathfrak{A} heißt *positiv*, falls das Spektrum von A nur aus positiven reellen Zahlen besteht, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$. Die Menge der positiven Elemente von \mathfrak{A} wird mit \mathfrak{A}_+ bezeichnet.

Wie im Fall positiver Operatoren auf einem Hilbertraum kann man auf den selbstadjungierten Elementen einer $*$ -Algebra eine Ordnungsrelation \geq definieren, wobei $A \geq B$ bedeutet, dass $A - B \in \mathfrak{A}_+$ ist. Neben den offensichtlichen Eigenschaften

- $A \geq 0$ und $A \leq 0 \implies A = 0$,
- $A \geq B$ und $B \geq C \implies A \geq C$,

gilt ebenfalls

²Tatsächlich stellt sich heraus, dass dieses Standardbeispiel sogar in dem Sinne eine vollständige Charakterisierung darstellt, dass jede C^* -Algebra isomorph zu einer selbstadjungierten, normabgeschlossenen Algebra von beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum ist. Für einen Beweis dieses Zusammenhangs siehe [6].

Lemma B.6. Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra und $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

$$A \geq 0 \implies A\|A\| \geq A^2. \quad (\text{B.4})$$

In Analogie zu Satz A.4 aus Anhang A gilt im C^* -Algebrafall ebenfalls

Satz B.7. Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra. Dann ist $A \in \mathfrak{A}$ genau dann positiv, wenn es ein Element $B \in \mathfrak{A}$ gibt mit

$$A = B^*B. \quad (\text{B.5})$$

B.2 GNS-Konstruktion für Zustände

Als nächstes werden Funktionale auf einer Algebra \mathfrak{A} betrachtet. Ein Funktional auf \mathfrak{A} ist eine lineare Abbildung von \mathfrak{A} in den Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf den folgenden Funktionalen:

Definition B.8. Sei \mathfrak{A} eine $*$ -Algebra und $\omega : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ein lineares Funktional auf \mathfrak{A} . ω heißt *positiv*, falls

$$\omega(A^*A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A} \quad (\text{B.6})$$

gilt. Gilt zusätzlich $\omega(\mathbf{1}) = 1$, heißt ω ein *Zustand* auf \mathfrak{A} .

Mit Satz B.7 sieht man, dass ω genau dann positiv ist, wenn ω positiv auf den positiven Elementen ist. Für positive Funktionale gilt eine Version der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.

Satz B.9 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Sei \mathfrak{A} eine $*$ -Algebra und ω ein positives lineares Funktional auf \mathfrak{A} . Dann gilt für alle $A, B \in \mathfrak{A}$

$$(i) \quad \omega(A^*B) = \overline{\omega(B^*A)},$$

$$(ii) \quad |\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B),$$

$$(iii) \quad |\omega(A^*BA)| \leq \omega(A^*A)\|B\|.$$

Auf der C^* -Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum \mathfrak{H} ist es leicht, ein Beispiel für einen Zustand anzugeben. Sei dazu $\Omega \in \mathfrak{H}$ ein Vektor mit $\|\Omega\| = 1$. Dann definiert

$$\omega : \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega(A) := (\Omega, A\Omega), \quad (\text{B.7})$$

ein positives lineares Funktional auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Wegen $\omega(\mathbf{1}) = \|\Omega\|^2 = 1$ ist ω ein Zustand auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Mit einer GNS-Konstruktion kann man überraschenderweise die Umkehrung dieses Sachverhalts zeigen:

Satz B.10 (GNS-Konstruktion für Zustände). *Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra und ω ein Zustand auf \mathfrak{A} . Dann gibt es eine zyklische Darstellung³ $(\mathfrak{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ von \mathfrak{A} , sodass $\|\Omega_\omega\| = 1$ und*

$$\omega(A) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A) \Omega_\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{A} \quad (\text{B.8})$$

gilt. Die zyklische Darstellung ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich (bis auf wenige Details) aus dem Beweis der GNS-Konstruktion für Gewichte, der im nächsten Abschnitt gegeben wird.

B.3 GNS-Konstruktion für Gewichte

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich eine GNS-Konstruktion auch noch bezüglich einer Abbildung w durchführen lässt, wenn w kein lineares Funktional mehr ist, aber noch gewisse Positivitätseigenschaften besitzt.

Definition B.11. Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra und $w : \mathfrak{A}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ eine Abbildung. w heißt ein *Gewicht* auf \mathfrak{A} , falls w den Eigenschaften

- (i) $w(A + B) = w(A) + w(B)$,
- (ii) $w(\alpha A) = \alpha w(A)$

für alle $A, B \in \mathfrak{A}_+$ und $\alpha \in \mathbb{R}_+$ genügt, wobei die Konvention $0 \cdot \infty = 0$ verabredet ist.

Wie für einen Zustand lässt sich auch aus einem Gewicht w noch eine Darstellung von \mathfrak{A} auf einem Hilbertraum gewinnen. Dazu erweitert man das Gewicht zunächst zu einem linearen Funktional auf der Unteralgebra \mathcal{M}_w von \mathfrak{A} , die von den Elementen $A \in \mathfrak{A}$ erzeugt wird, auf denen w endlich ist, und führt dann die gewöhnliche GNS-Konstruktion auf dieser Unteralgebra durch. Zusammenfassend gilt

Satz B.12 (GNS-Konstruktion für Gewichte). *Sei \mathfrak{A} eine C^* -Algebra, w ein Gewicht auf \mathfrak{A} und*

$$\mathcal{L}_w := \{A \in \mathfrak{A}; w(A^*A) < \infty\}. \quad (\text{B.9})$$

Dann gibt es einen Hilbertraum \mathfrak{H} und zwei Abbildungen $\eta : \mathcal{L}_w \rightarrow \mathfrak{H}$ und $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, sodass η linear mit $\eta(\mathcal{L}_w)$ dicht in \mathfrak{H} und (\mathfrak{H}, π) eine Darstellung von \mathfrak{A} ist. Es gilt

$$(\eta(A), \pi(C) \eta(B)) = w(A^*CB) \quad (\text{B.10})$$

für alle $A, B \in \mathcal{L}_w$ und $C \in \mathfrak{A}$.

³Das Tripel $(\mathfrak{H}, \pi, \Omega)$ ist eine *zyklische Darstellung* von \mathfrak{A} , wenn (\mathfrak{H}, π) eine Darstellung von \mathfrak{A} und Ω ein Vektor in \mathfrak{H} ist, sodass die Menge $\{\pi(A)\Omega; A \in \mathfrak{A}\}$ dicht in \mathfrak{H} liegt.

Die weiteren Ausführungen dieses Anhangs dienen dem Beweis von Satz B.12. Dazu wird zunächst das folgende vorbereitende Lemma bewiesen:

Lemma B.13. *Sei w ein Gewicht auf \mathfrak{A} und*

$$\mathcal{M}_{w+} := \{A \in \mathfrak{A}_+; w(A) < \infty\}. \quad (\text{B.11})$$

\mathcal{M}_{w+} ist ein Kegel in \mathfrak{A}_+ mit der Eigenschaft

$$B \geq A \geq 0 \text{ und } B \in \mathcal{M}_{w+} \implies A \in \mathcal{M}_{w+}. \quad (\text{B.12})$$

Der von \mathcal{M}_{w+} erzeugte lineare Unterraum \mathcal{M}_w ist eine *-Unteralgebra von \mathfrak{A} . Die in Satz B.12 definierte Menge \mathcal{L}_w ist ein Linksideal in \mathfrak{A} und es gilt

$$\mathcal{M}_w = \mathcal{L}_w^* \mathcal{L}_w. \quad (\text{B.13})$$

Beweis. Die Kegeleigenschaft von \mathcal{M}_{w+} folgt direkt aus B.11(ii). Sei $B \geq A \geq 0$ und $B \in \mathcal{M}_{w+}$. Wegen $B - A \in \mathfrak{A}_+$ folgt mit B.11(i)

$$w(B) = w(A + (B - A)) = w(A) + w(B - A). \quad (\text{B.14})$$

Da die linke Seite endlich ist, gilt auch $w(A) < \infty$ und daher $A \in \mathcal{M}_{w+}$. Dies beweist (B.12).

Nun wird gezeigt, dass \mathcal{M}_w eine *-Unteralgebra ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass sich das Produkt zweier Elemente von \mathcal{M}_{w+} als komplexe Linearkombination von Elementen aus \mathcal{M}_{w+} schreiben lässt. Sei dazu zunächst $A \in \mathcal{M}_{w+}$. Mit Lemma B.6 folgt, dass $0 \leq A^2 \leq A\|A\|$ gilt, und wegen $w(A\|A\|) = \|A\|w(A) < \infty$ ist $A\|A\| \in \mathcal{M}_{w+}$. Unter Verwendung von Eigenschaft (B.12) ergibt sich schließlich die Implikation

$$A \in \mathcal{M}_{w+} \implies A^2 = A^*A \in \mathcal{M}_{w+}. \quad (\text{B.15})$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man für $A, B \in \mathcal{M}_{w+}$ die Polarisationsidentität

$$\begin{aligned} A^*B = \frac{1}{4} & \left[(A+B)^*(A+B) - (A-B)^*(A-B) \right. \\ & \left. + i(A-iB)^*(A-iB) - i(A+iB)^*(A+iB) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Es gilt ferner

$$w\left((A+B)^*(A+B) + (A-B)^*(A-B)\right) = 2w(A^*A) + 2w(B^*B) < \infty, \quad (\text{B.17})$$

also auch

$$(A+B)^*(A+B) + (A-B)^*(A-B) \in \mathcal{M}_{w+}. \quad (\text{B.18})$$

Erneut mit Eigenschaft (B.12) folgt dann

$$(A+B)^*(A+B) \in \mathcal{M}_{w+} \quad \text{sowie} \quad (A-B)^*(A-B) \in \mathcal{M}_{w+}. \quad (\text{B.19})$$

Analog bekommt man ebenfalls

$$(A - iB)^*(A - iB) \in \mathcal{M}_{w+} \quad \text{und} \quad (A + iB)^*(A + iB) \in \mathcal{M}_{w+}, \quad (\text{B.20})$$

sodass durch (B.16) das Produkt $A^*B = AB$ als Linearkombination von Elementen aus \mathcal{M}_{w+} gegeben ist. \mathcal{M}_w ist also eine *-Unteralgebra, für die $\mathcal{M}_w = \mathcal{L}_w^* \mathcal{L}_w$ gilt.

Durch $\tilde{w} : \mathcal{M}_w \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{w}(A) := \sum_{n=1}^N c_n w(A_n)$, wenn $A = \sum_{n=1}^N c_n A_n$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ und $A_n \in \mathcal{M}_{w+}$, $n = 1, \dots, N$, ist, lässt sich das Gewicht w zu einem linearen Funktional \tilde{w} auf \mathcal{M}_w erweitern. Für \tilde{w} gilt dann auf \mathcal{M}_w die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Es wird nun gezeigt, dass $\mathcal{L}_w = \mathcal{L}_{\tilde{w}}$ ein Linksideal in \mathfrak{A} ist. Sei dazu $L \in \mathcal{L}_{\tilde{w}}$ und $A \in \mathfrak{A}$, dann gilt

$$\tilde{w}((AL)^*(AL)) = \tilde{w}(L^*A^*AL) \stackrel{\text{B.9(iii)}}{\leq} \tilde{w}(L^*L)\|A\|^2 < \infty \quad (\text{B.21})$$

und damit $AL \in \mathcal{L}_{\tilde{w}}$. Dies schließt den Beweis. \square

Im Folgenden wird w mit dem im vorangegangenen Beweis konstruierten linearen Funktional \tilde{w} auf \mathcal{M}_w identifiziert und die Tilde fortgelassen. Es folgt nun der

Beweis von Satz B.12. Zunächst wird der Hilbertraum \mathfrak{H} konstruiert. Auf \mathcal{L}_w ist durch

$$\langle A, B \rangle := w(A^*B) \quad \forall A, B \in \mathcal{L}_w \quad (\text{B.22})$$

eine positiv semidefinite hermitesche Form gegeben. Sei

$$\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{L}_w; w(A^*A) = 0\} \quad (\text{B.23})$$

der Nullraum dieser hermiteschen Form. \mathcal{N} ist ein Linksideal in \mathfrak{A} , denn es gilt für $N \in \mathcal{N}$ und $A \in \mathfrak{A}$

$$|w((AN)^*(AN))| = |w(N^*A^*AN)| \stackrel{\text{B.9(iii)}}{\leq} w(N^*N)\|A\|^2 = 0, \quad (\text{B.24})$$

also auch $AN \in \mathcal{N}$. Für $A \in \mathcal{L}_w$ definiere man die Äquivalenzklassen

$$\chi_A := \{A + N; N \in \mathcal{N}\}, \quad (\text{B.25})$$

und mit den Operationen $\chi_A + \chi_B := \chi_{A+B}$ und $\alpha\chi_A := \chi_{\alpha A}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ wird der Raum h_w dieser Äquivalenzklassen ein komplexer Vektorraum. Auf h_w ist durch

$$(\chi_A, \chi_B) := \langle A, B \rangle \quad (\text{B.26})$$

eine positiv definite hermitesche Form definiert. Zu überprüfen ist noch die Wohldefiniertheit. Seien dazu $\tilde{A} := A + N_1$ und $\tilde{B} := B + N_2$ mit $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, so gilt

$$\begin{aligned} (\chi_{\tilde{A}}, \chi_{\tilde{B}}) &= \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle = w((A + N_1)^*(B + N_2)) \\ &= w(A^*B) + w(N_1^*B) + w(A^*N_2) + w(N_1^*N_2) \\ &= w(A^*B) = (\chi_A, \chi_B). \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Das Verschwinden von $w(N_1^*B)$ und $w(A^*N_2)$ ergibt sich aus der Tatsache, dass \mathcal{N} ein Linksideal in \mathfrak{A} ist und dass nach B.9(i) $w(N_1^*B) = \overline{w(B^*N_1)}$ gilt. h_w ist mit (\bullet, \bullet) also ein Prähilbertraum, und man definiert \mathfrak{H} als die Vervollständigung von h_w bezüglich der durch das Skalarprodukt auf h_w induzierten Norm. Die Einbettung η von \mathcal{L}_w in \mathfrak{H} ist gegeben durch die Restklassenbildung

$$\eta(A) := \chi_A \quad \forall A \in \mathcal{L}_w \quad (\text{B.28})$$

und das Bild von η liegt per Konstruktion dicht in \mathfrak{H} .

Nun zur Definition von π . Auf dem Unterraum $h_w \subset \mathfrak{H}$ definiere man für $\chi_B \in h_w$

$$\pi(A)\chi_B := \chi_{AB} \quad \forall A \in \mathfrak{A}. \quad (\text{B.29})$$

Dies ist ebenfalls wohldefiniert, denn mit $\tilde{B} := B + N$, $N \in \mathcal{N}$, ergibt sich

$$\pi(A)\chi_{\tilde{B}} = \chi_{A(B+N)} = \chi_{AB} = \pi(A)\chi_B, \quad (\text{B.30})$$

wieder weil \mathcal{N} Linksideal in \mathfrak{A} ist. π ist trivialerweise linear auf h_w und beschränkt durch

$$\begin{aligned} \|\pi(A)\chi_B\|^2 &= (\pi(A)\chi_B, \pi(A)\chi_B) = (\chi_{AB}, \chi_{AB}) \\ &= w(B^*A^*AB) \stackrel{\text{B.9(iii)}}{\leq} w(B^*B)\|A\|^2 \\ &= \|A\|^2\|\chi_B\|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Damit lässt sich π zu einem beschränkten Operator auf ganz \mathfrak{H} fortsetzen. Seien $A, B \in \mathcal{L}_w$ und $C, D \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

$$\pi(C)\pi(D)\chi_A = \chi_{CDA} = \pi(CD)\chi_A \quad (\text{B.32})$$

und

$$(\chi_A, \pi(C)\chi_B) = w(A^*CB) = w((C^*A)^*B) = (\pi(C^*)\chi_A, \chi_B), \quad (\text{B.33})$$

also $\pi(C)^* = \pi(C^*)$. Damit ist π eine Darstellung von \mathfrak{A} auf \mathfrak{H} und es gilt

$$(\eta(A), \pi(C)\eta(B)) = w(A^*CB) \quad \forall A, B \in \mathcal{L}_w, C \in \mathfrak{A}. \quad (\text{B.34})$$

□

Anhang C

Getriebener harmonischer Oszillator

In Unterabschnitt 4.3.4 von Kapitel 4 wird der durch eine zeitlich linear anwachsende Kraft getriebene harmonische Oszillator im Rahmen einer Quantenmechanik mit dynamischer Zeitvariable diskutiert. Die dort weggelassenen Rechnungen werden in diesem Anhang ausgeführt.

C.1 Behandlung im Rahmen der Schrödinger-gleichung

Zunächst wird das Problem in der Standardformulierung betrachtet und der Erwartungswert des Ortes im Grundzustand, die *Null-Lage* der Oszillation, berechnet. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \lambda x t \quad (\text{C.1})$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Der erste Schritt besteht darin, die normierbaren Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 + \lambda x t \right) \Psi(t, x) = 0 \quad (\text{C.2})$$

zu finden. Durch die Variablentransformation

$$\tilde{x} := x + \lambda t \quad (\text{C.3a})$$

$$\tilde{t} := t \quad (\text{C.3b})$$

schreibt sich die Differentialgleichung (C.2) als

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - i \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} \tilde{x}^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 \right) \Psi(t, \tilde{x}) = 0. \quad (\text{C.4})$$

In dieser Form führt die partielle Differentialgleichung durch einen Separationsansatz $\Psi(t, \tilde{x}) = \psi(t) \cdot \phi(\tilde{x})$ auf die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} - i\lambda \frac{d}{d\tilde{x}} + \frac{1}{2} \tilde{x}^2 - E \right) \phi(\tilde{x}) = 0 \quad (\text{C.5})$$

und

$$\left(i \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 - E \right) \psi(t) = 0 \quad (\text{C.6})$$

mit der Separationskonstanten E .

Zunächst wird die Gleichung (C.5) für ϕ betrachtet. Der Ableitungsterm erster Ordnung kann durch den Ansatz $\phi(\tilde{x}) = e^{-i\lambda\tilde{x}} \chi(\tilde{x})$ beseitigt werden und man erhält als Differentialgleichung für χ

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{2} \tilde{x}^2 - \left(E + \frac{\lambda^2}{2} \right) \right) \chi(\tilde{x}) = 0. \quad (\text{C.7})$$

Dies ist die zeitunabhängige Schrödingergleichung für den ungetriebenen harmonischen Oszillator. Normierbare Lösungen existieren nur für $E + \frac{\lambda^2}{2} = n + \frac{1}{2}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und lauten dann

$$\chi_n(\tilde{x}) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{x}^2} H(n, \tilde{x}), \quad E_n = n + \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{2}, \quad (\text{C.8})$$

wobei $H(n, \tilde{x})$ das n -te Hermite-Polynom in \tilde{x} ist.

Die Gleichung (C.6) besitzt für $E = E_n$ die Lösung

$$\psi_n(t) = e^{-iE_n t + \frac{1}{6} i \lambda^2 t^3} = e^{-i(n + \frac{1}{2})t + i \frac{\lambda^2}{2} t + \frac{1}{6} i \lambda^2 t^3}, \quad (\text{C.9})$$

wobei die multiplikative Integrationskonstante gleich Eins gesetzt wurde.

Insgesamt lauten also die normierten Lösungen der Differentialgleichung (C.2) in den ursprünglichen Koordinaten

$$\Psi_n(t, x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-i(n + \frac{1}{2})t + i \frac{\lambda^2}{6} t^3} e^{-i\lambda(x + \frac{\lambda}{2}t)} e^{-\frac{1}{2}(x + \lambda t)^2} H(n, x + \lambda t). \quad (\text{C.10})$$

Im Grundzustand ($n = 0$) soll nun der Erwartungswert des Ortes berechnet werden. Da $H(0, x) = 1$ ist, erhält man

$$\begin{aligned} \langle x \rangle(t) &= \int dx \overline{\Psi_0(t, x)} x \Psi_0(t, x) \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} \int dx x e^{-(x + \lambda t)^2} \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} \int dy (y - \lambda t) e^{-y^2} \\ &= -\lambda t. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Die Null-Lage wird also durch die äußere Kraft mit konstanter Geschwindigkeit $-\lambda$ entlang der reellen Achse verschoben.

C.2 Lösung der Zwangsbedingung

In diesem Abschnitt werden die partielle Differentialgleichung

$$\left(-\frac{1}{2M}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - i\frac{\partial}{\partial a} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2 + \lambda xa\right)\Psi^M(a, x) = 0 \quad (\text{C.12})$$

untersucht und diejenigen Lösungen konstruiert, die im Grenzfall $M \rightarrow \infty$ gegen die Lösungen (C.10) der Standard-Schrödingergleichung des getriebenen harmonischen Oszillators streben.

Um die Gleichung auf eine Form zu bringen, in der sie separiert, wird zunächst die erste Ableitung nach a durch Adjunktion mit e^{-iMa} beseitigt, d.h. man schreibt $\Psi^M(a, x) = e^{-iMa}\Phi^M(a, x)$ und erhält anstelle von (C.12)

$$\left(-\frac{1}{2M}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2 + \lambda xa - \frac{M}{2}\right)\Phi^M(a, x) = 0. \quad (\text{C.13})$$

Reskaliert man noch $y := \sqrt{M}a$, ergibt sich

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}x^2 + \bar{\lambda}xy - \frac{M}{2}\right)\Phi^M(x, y) = 0 \quad (\text{C.14})$$

mit der Abkürzung $\bar{\lambda} := \lambda/\sqrt{M}$. Der Differentialoperator in dieser Gleichung ist der Laplace-Operator in zwei Dimensionen, der unter Drehungen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ invariant ist. Die quadratische Form $\frac{1}{2}x^2 + \bar{\lambda}xy$ lässt sich durch eine solche Drehung mit

$$\alpha = -\text{sign}(\lambda) \arccos \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} \quad (\text{C.16})$$

diagonalisieren. Dies führt schließlich auf die Differentialgleichung

$$\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right) + \frac{1}{2}\rho_1 x'^2 - \frac{1}{2}\rho_2 y'^2 - \frac{M}{2}\right)\Phi^M(x', y') = 0 \quad (\text{C.17})$$

mit den Abkürzungen

$$\rho_1 := \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2} + 1 \right) \geq 1 \quad (\text{C.18a})$$

$$\rho_2 := \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2} - 1 \right) \geq 0. \quad (\text{C.18b})$$

Die neuen Koordinaten (x', y') als Funktionen der ursprünglichen Variablen (a, x) schreiben sich als

$$x' = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} x + \text{sign}(\lambda) \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} \sqrt{M} a \quad (\text{C.19a})$$

$$y' = -\text{sign}(\lambda) \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} x + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\bar{\lambda}^2}}} \sqrt{M} a . \quad (\text{C.19b})$$

In der Form (C.17) lässt sich die partielle Differentialgleichung nun durch einen Produktansatz auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen. Mit dem Produktansatz $\Phi^M(x', y') = \phi^M(x') \cdot \psi^M(y')$ erhält man die Gleichungen

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx'^2} + \frac{1}{2} \rho_1 x'^2 - E \right) \phi^M(x') = 0 \quad (\text{C.20})$$

und

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dy'^2} + \frac{1}{2} \rho_2 y'^2 + \frac{M}{2} - E \right) \psi^M(y') = 0 . \quad (\text{C.21})$$

Zunächst wird die Gleichung (C.20) für ϕ^M näher betrachtet. Ihre allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi^M(x') &= D_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\rho_1}x'^2} H\left(\frac{2E-\sqrt{\rho_1}}{2\sqrt{\rho_1}}, \rho_1^{\frac{1}{4}} x'\right) \\ &\quad + D_2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\rho_1}x'^2} {}_1F_1\left(\frac{\sqrt{\rho_1}-2E}{4\sqrt{\rho_1}}, \frac{1}{4}, \sqrt{\rho_1} x'^2\right) , \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

wobei ${}_1F_1(a, b, x)$ die konfluente hypergeometrische Funktion¹ ist. D_1 und D_2 sind Integrationskonstanten.

Für jedes feste a muss die Gesamtlösung $\Psi^M = \phi^M \cdot \psi^M \cdot e^{-iMa}$ in x normierbar sein. Schreibt man die Lösung für ϕ^M mittels (C.19a) in den ursprünglichen Koordinaten (a, x) , so folgt aus der Normierbarkeitsforderung, dass der zweite Summand in (C.22) nicht auftreten darf, da die hypergeometrische Funktion für große Argumente exponentiell anwächst und die Dämpfung durch den Vorfaktor überkompensiert. Bei der Konstruktion der Lösung ψ^M wird im Folgenden ersichtlich, dass auch die Multiplikation mit ψ^M diese Divergenz nicht aufhebt. Für beliebiges λ ist Ψ^M also nur normierbar, wenn $D_2 = 0$ ist. Auch die möglichen Werte von E müssen eingeschränkt werden, denn der verbleibende Summand ist nur dann normierbar, wenn

$$\frac{2E - \sqrt{\rho_1}}{2\sqrt{\rho_1}} \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{C.23})$$

¹Die konfluente hypergeometrische Funktion besitzt die hypergeometrische Reihendarstellung

$${}_1F_1(a, b, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k x^k}{(b)_k k!} ,$$

wobei $(a)_k$ und $(b)_k$ Pochhammersymbole mit $(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+k-1)$ sind.

gilt.

Zusammenfassend sind die in x normierbaren Lösungen von (C.20) gegeben durch

$$\phi_n^M(x') = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\rho_1}x'^2} H\left(n, \rho_1^{\frac{1}{4}} x'\right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{C.24})$$

zur Separationskonstanten $E_n = \sqrt{\rho_1}(n + \frac{1}{2})$.

Der Grenzfall $M \rightarrow \infty$ ist für ϕ_n^M leicht zu analysieren. Es gilt trivialerweise $\lim_{M \rightarrow \infty} \rho_1 = 1$ und aus der Rücktransformationsformel (C.19a) folgt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x' = x + \text{sign}(\lambda)|\lambda|a = x + \lambda a. \quad (\text{C.25})$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\phi_n^\infty(a, x) := \lim_{M \rightarrow \infty} \phi_n^M(x') = e^{-\frac{1}{2}(x+\lambda a)^2} H(n, x + \lambda a). \quad (\text{C.26})$$

Nun wird die zweite gewöhnliche Differentialgleichung (C.21) studiert. Es handelt sich hier um die Gleichung für einen antiharmonischen Oszillator² in a . Da die Lösungen nicht geschlossen angebar sind, wird die Gleichung mit störungstheoretischen Mitteln untersucht.

Man betrachte als Lösungsansatz zu (C.21) mit $E = E_n$ eine formale Potenzreihe in ρ_2

$$\psi_n^M(y') = \sum_{j=0}^{\infty} (\rho_2)^j \psi_{n,j}^M(y'), \quad (\text{C.27})$$

setze diese in (C.21) ein und verlange das Verschwinden jeder einzelnen Ordnung in ρ_2 . Die nullte Ordnung liefert die homogene Gleichung

$$\frac{1}{2}(\psi_{n,0}^M)'' - (E_n - \frac{M}{2})\psi_{n,0}^M = 0, \quad (\text{C.28})$$

während sich für die j -te Ordnung, $j \geq 1$, die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}(\psi_{n,j}^M)'' - (E_n - \frac{M}{2})\psi_{n,j}^M = -\frac{1}{2}y^2 \psi_{n,j-1}^M \quad (\text{C.29})$$

ergibt.³ Aus einer Lösung der homogenen Gleichung können alle weiteren Ordnungen rekursiv konstruiert werden. Die allgemeine Lösung von (C.28) lautet

$$\psi_{n,0}^M(y) = C_1 e^{i\sqrt{M-2E_n}y} + C_2 e^{-i\sqrt{M-2E_n}y} \quad (\text{C.30})$$

mit Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Erneut ergeben sich zwei linear unabhängige Lösungen, von denen nur eine einen wohldefinierten Limes $M \rightarrow \infty$ zulässt. Es wird im Folgenden gezeigt, dass die Forderung nach einem wohldefinierten Limes in jeder Ordnung der Störungsreihe eine Lösung eindeutig fixiert.

²Damit ist ein harmonischer Oszillator mit „falschem Vorzeichen“ im Potential gemeint.

³Im verbleibenden Teil dieses Anhangs wird der Strich an y weggelassen und mit y ist von nun an stets y' gemeint.

Für die nullte Ordnung ist dabei das Verhalten der Größe

$$e^{-iMa} \phi_n^M(x') \psi_{n,0}^M(y) = e^{-iMa} \phi_n^M(x') \cdot \left(C_1 e^{i\sqrt{M-2E_n}y} + C_2 e^{-i\sqrt{M-2E_n}y} \right) \quad (\text{C.31})$$

für $M \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Aus der Rücktransformationsformel (C.19b) ergibt sich

$$y = -\frac{\lambda}{\sqrt{M}} x + \left(\sqrt{M} - \frac{\lambda^2}{2\sqrt{M}} \right) a + o(M^{-1}), \quad (\text{C.32})$$

wobei $o(M^{-1})$ für Terme steht, die wie M^{-1} oder schneller mit $M \rightarrow \infty$ gegen Null gehen. Da der Summand $e^{-i\sqrt{M-2E_n}y}$ keinen Limes $M \rightarrow \infty$ erlaubt, bekommt man in der nullten Ordnung nur dann einen wohldefinierten Grenzwert, wenn man $C_2 = 0$ fordert und lediglich den Term $e^{i\sqrt{M-2E_n}y}$ berücksichtigt. Dann gilt mit $C_1 \equiv 1$

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-iMa} \psi_{n,0}^M(y) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left(-iMa + i\sqrt{M-2E_n} \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{M}} x + \left(\sqrt{M} - \frac{\lambda^2}{2\sqrt{M}} \right) a + o(M^{-1}) \right) \right) \\ &= e^{-iE_n a} e^{-i\lambda(x + \frac{\lambda}{2}a)}. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Mit der so fixierten Lösung $\psi_{n,0}^M(y) = e^{i\sqrt{M-2E_n}y}$ kann nun die erste Ordnung als spezielle Lösung von (C.29) mit der Inhomogenität $-\frac{1}{2}y^2\psi_{n,0}^M$ konstruiert werden, wobei $\psi_{n,1}^M$ diejenige spezielle Lösung ist, sodass

$$e^{-iMa} \phi_n^M(x') \cdot \rho_2 \psi_{n,1}^M \quad (\text{C.34})$$

einen wohldefinierten Limes $M \rightarrow \infty$ besitzt. Dass dieses Verfahren in jeder Ordnung möglich ist und dass dann der Limes der gesamten Störungsreihe, aufgefasst als die Summe der Limiten aller Ordnungen, existiert, ist Inhalt des folgenden Satzes:

Satz C.1. Sei $\psi_{n,0}^M(y) = e^{i\sqrt{M-2E_n}y}$ die Lösung nullter Ordnung der Differentialgleichung (C.21) im Potenzreihenansatz (C.27). Dann gibt es in jeder Ordnung j genau eine spezielle Lösung $\psi_{n,j}^M$, sodass

$$\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-iMa} \rho_2^j \psi_{n,j}^M(y) \quad (\text{C.35})$$

existiert. Mit diesen speziellen Lösungen gilt ferner

$$\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-iMa} \psi_n^M(y) := \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-iMa} \rho_2^j \psi_{n,j}^M(y) \right) = e^{-iE_n a} e^{-i\lambda(x + \frac{\lambda}{2}a)} e^{i\frac{1}{6}\lambda^2 a^3} \quad (\text{C.36})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dieser Satz sagt insbesondere aus, dass die gesuchten Lösungen der Zwangsbedingung (C.12) für endliches M durch

$$\Psi_n^M(a, x) = e^{-iMa} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\rho_1}x^2} H\left(n, \rho_1^{\frac{1}{4}}x'\right) \sum_{j=0}^{\infty} \rho_2^j \psi_{n,j}^M(y) \quad (\text{C.37})$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben sind. Nach Satz C.1 gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Psi_n^M(a, x) = e^{-i(n+\frac{1}{2})a + i\frac{1}{6}\lambda^2 a^3} e^{-i\lambda(x+\frac{\lambda}{2}a) - \frac{1}{2}(x+\lambda a)^2} H(n, x + \lambda a) \quad (\text{C.38})$$

und mit der Identifikation von a mit t ist dies bis auf die Normierung gerade die Lösung Ψ_n aus (C.10), die man mit der Standard-Schrödingergleichung erhält.

Die weiteren Ausführungen dieses Abschnittes dienen nun dem Beweis von Satz C.1. Dafür ist es günstig, zunächst die folgende Hilfsbehauptung zu beweisen:

Proposition C.2. *Sei $\alpha > 0$ und p ein Polynom vom Grad $k \geq 0$, dessen Koeffizienten im Limes $\alpha \rightarrow \infty$ verschwinden oder endlich bleiben. Dann ist $\int_0^y ds p(s) e^{2i\alpha s}$ von der Form*

$$\int_0^y ds p(s) e^{2i\alpha s} = \frac{1}{\alpha} (c + q(y) e^{2i\alpha y}) \quad (\text{C.39})$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ und einem Polynom q vom Grad k . Die Koeffizienten von q bleiben für $\alpha \rightarrow \infty$ ebenfalls endlich oder verschwinden.

Beweis. Es reicht aus, die Aussage für Monome $p(y) = y^k$ zu zeigen. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach k . Für $k = 0$ gilt

$$\int_0^y ds e^{2i\alpha s} = \frac{1}{2i\alpha} (e^{2i\alpha y} - 1) \quad (\text{C.40})$$

und mit $c = -\frac{1}{2i}$ und $q(x) = \frac{1}{2i}$ unabhängig von α ist dies von der Form (C.39).

Sei nun die Aussage für $(k-1)$ richtig, d.h. es gelte

$$\int_0^y ds s^{k-1} e^{2i\alpha s} = \frac{1}{\alpha} (\tilde{c} + \tilde{q}(y) e^{2i\alpha y}) \quad (\text{C.41})$$

mit einem $\tilde{c} \in \mathbb{C}$ und einem Polynom \tilde{q} mit wohldefiniertem Limes $\alpha \rightarrow \infty$, $\deg \tilde{q} = k-1$. Für $p(y) = y^k$ gilt dann mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^y ds s^k e^{2i\alpha s} &= \frac{y^k}{2i\alpha} e^{2i\alpha y} - \frac{k}{2i\alpha} \int_0^y ds s^{k-1} e^{2i\alpha s} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{k\tilde{c}}{2i} + \left(\frac{y^k}{2i} - \frac{k}{2i\alpha} \tilde{q}(y) \right) e^{2i\alpha y} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Mit $c = -\frac{k\tilde{c}}{2i\alpha}$ und $q(y) = \frac{y^k}{2i} - \frac{k}{2i\alpha}\tilde{q}(y)$ ist auch dies von der Form (C.39), und es gilt $\deg q = k$. Wegen

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{k}{2i\alpha} \tilde{q}(y) = 0 \quad (\text{C.43})$$

besitzt auch $q(y)$ einen wohldefinierten Limes $\alpha \rightarrow \infty$. Das beweist die Behauptung. \square

Mit dieser Vorbereitung folgt nun der

Beweis von Satz C.1. Zunächst wird allgemein eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\psi'' - (E - \frac{M}{2})\psi = b \quad (\text{C.44})$$

mit der Inhomogenität b gesucht. Ein Lösungsfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$\psi^{(1)}(y) := e^{i\sqrt{m}y} \quad \text{und} \quad \psi^{(2)}(y) := e^{-i\sqrt{m}y} \quad (\text{C.45})$$

mit der Abkürzung $m := M - 2E$. Die inhomogene Gleichung lässt sich dann mittels Variation der Konstanten lösen. Dazu berechnet man

$$\det \Theta(y) := \det \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(y) & \psi^{(2)}(y) \\ \psi^{(1)'}(y) & \psi^{(2)'}(y) \end{pmatrix} = -2i\sqrt{m} \quad (\text{C.46})$$

$$\det \Theta_1(y) := \det \begin{pmatrix} 0 & \psi^{(2)}(y) \\ 2b(y) & \psi^{(2)'}(y) \end{pmatrix} = -2b(y) e^{-i\sqrt{m}y} \quad (\text{C.47})$$

$$\det \Theta_2(y) := \det \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(y) & 0 \\ \psi^{(1)'}(y) & 2b(y) \end{pmatrix} = 2b(y) e^{i\sqrt{m}y} \quad (\text{C.48})$$

sowie

$$c_i(y) := \int_0^y ds \frac{\det \Theta_i(s)}{\det \Theta(s)}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{C.49})$$

Eine spezielle Lösung ist dann gegeben durch

$$\psi_{\text{spez}}(y) = c_1(y)\psi^{(1)}(y) + c_2(y)\psi^{(2)}(y) \quad (\text{C.50})$$

und man erhält die allgemeine spezielle Lösung durch Addition beliebiger Vielfacher der homogenen Lösungen $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ zu ψ_{spez} .

Sei jetzt ein $n \in \mathbb{N}_0$ fixiert und $m = M - 2E_n$. Zu zeigen ist, dass es für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige spezielle Lösung $\psi_{n,j}^M$ gibt, die einen wohldefinierten Limes

$$\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-iMa} \rho_2^j \psi_{n,j}^M(y) \quad (\text{C.51})$$

zulässt. Dazu betrachte man den Fall, dass die Inhomogenität durch $b(y) = p(y) e^{i\sqrt{m}y}$ mit einem Polynom p vom Grad k gegeben ist, dessen Koeffizienten für $M \rightarrow \infty$ verschwinden oder endlich bleiben. Dann ist

$$\det \Theta_1(y) = -2p(y) \quad (\text{C.52})$$

$$\det \Theta_2(y) = 2p(y) e^{2i\sqrt{m}y} \quad (\text{C.53})$$

und daher

$$c_1(y) = -\frac{i}{\sqrt{m}} \int_0^y ds p(s) \quad (\text{C.54})$$

$$c_2(y) = \frac{i}{\sqrt{m}} \int_0^y ds p(s) e^{2i\sqrt{m}s} . \quad (\text{C.55})$$

Aus (C.50) und Proposition C.2 mit $\alpha = \sqrt{m}$ folgt dann

$$\begin{aligned} \psi_{\text{spez}}(y) &= -\frac{i}{\sqrt{m}} \left(\int_0^y ds p(s) \right) e^{i\sqrt{m}y} + \frac{i}{m} \left(c + q(y) e^{2i\sqrt{m}y} \right) e^{-i\sqrt{m}y} \\ &= \left(-\frac{i}{\sqrt{m}} \left(\int_0^y ds p(s) \right) + \frac{i}{m} q(y) \right) e^{i\sqrt{m}y} + \frac{ic}{m} e^{-i\sqrt{m}y} \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ und einem Polynom q mit $\deg q = k$, sodass die Koeffizienten von q im Limes $m \rightarrow \infty$ endlich bleiben oder verschwinden.

Die Inhomogenität zur Bestimmung von $\psi_{n,1}^M$ ist gegeben durch

$$b(y) = -\frac{1}{2}y^2 e^{i\sqrt{m}y} , \quad (\text{C.57})$$

entspricht also dem obigen Fall mit $p(y) = -\frac{1}{2}y^2$ und $k = 2$. Nach (C.56) enthält die spezielle Lösung ψ_{spez} als einen Summanden den Term $\exp(-i\sqrt{m}y)$ multipliziert mit einem konstanten Koeffizienten. Dieser Term besitzt keinen wohldefinierten Limes, allerdings handelt es sich dabei um eine homogene Lösung (ein Vielfaches von $\psi^{(2)}$). ψ_{spez} bleibt folglich auch ohne diesen Summanden eine spezielle Lösung zur Inhomogenität b . Weiterhin kann ψ_{spez} einen Summanden der Form $(\text{const} \cdot \exp(+i\sqrt{m}y))$ enthalten, der ebenfalls eine homogene Lösung darstellt. Diese homogene Lösung wird jedoch bereits in $\psi_{n,0}^M$ berücksichtigt.

Sei daher $\psi_{n,1}^M$ die durch Streichung der Terme $(\text{const} \cdot \exp(\pm i\sqrt{m}y))$ aus (C.56) entstehende spezielle Lösung. Dann hat $\psi_{n,1}^M$ die Form $e^{i\sqrt{m}y}$ multipliziert mit einem Polynom, das einen wohldefinierten Limes $M \rightarrow \infty$ besitzt. Für die Konstruktion von $\psi_{n,2}^M$ sind die vorangegangenen Überlegungen also erneut anwendbar. Allgemein erhält man $\psi_{n,j}^M$ aus $\psi_{n,j-1}^M$ für $j \geq 1$ durch Variation der Konstanten mit der Inhomogenität $b(y) = -\frac{1}{2}y^2 \psi_{n,j-1}^M$. In jeder Ordnung definiere man $\psi_{n,j}^M$ nach (C.56), streiche jedoch vorher die auftretenden Terme $(\text{const} \cdot \exp(\pm i\sqrt{m}y))$.

Es folgt dann induktiv, dass die auf diese Weise eindeutig bestimmte Störungsreihe $\psi_n^M = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_2^j \psi_{n,j}^M$, den Term $\exp(-i\sqrt{m}y)$ nicht mehr enthält.

Sei p_j das Polynom, sodass $\psi_{n,j}^M(y) = p_j(y) e^{i\sqrt{m}y}$ gilt. Dann folgt ebenfalls induktiv

$$\deg p_j = 3j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{C.58})$$

Sei weiter r_j der Koeffizient des führenden Terms (Leitkoeffizient) im Polynom p_j . Dann gilt nach (C.56)

$$r_j y^{3j} = -\frac{i}{\sqrt{m}} \int_0^y ds \left(-\frac{1}{2}s^2\right) r_{j-1} s^{3(j-1)} \quad (\text{C.59})$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und $j \geq 1$. Durch Ausintegrieren erhält man die Rekursionsformel

$$r_j = \frac{i}{6\sqrt{m}j} r_{j-1}. \quad (\text{C.60})$$

Mit $r_0 = 1$ bekommt man induktiv schließlich die Formel

$$r_j = \left(\frac{i}{6\sqrt{m}}\right)^j \cdot \frac{1}{j!}. \quad (\text{C.61})$$

Bedenkt man, dass

$$y = \sqrt{M}a + o(M^{-\frac{1}{2}}) \quad (\text{C.62})$$

gilt, so ist der für $M \rightarrow \infty$ am stärksten divergente Term von p_j gerade $r_j y^{3j}$. Mit $\rho_2 = \frac{\lambda^2}{M} + o(M^{-2})$ gilt aber insgesamt

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \left(e^{-iMa} \rho_2^j (r_j y^{3j}) e^{i\sqrt{m}y} \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{j!} \left(\frac{i\lambda^2 a^3}{6} \right)^j \frac{\sqrt{M}^{3j}}{M^j \sqrt{M - 2E_n}^j} e^{-iMa + i\sqrt{M - 2E_n} \left(-\frac{\lambda}{\sqrt{M}}x + \left(\sqrt{M} - \frac{\lambda^2}{2\sqrt{M}} \right) a \right)} \right) \\ &= \frac{1}{j!} \left(\frac{i\lambda^2 a^3}{6} \right)^j e^{-iE_n a - i\lambda \left(x + \frac{\lambda}{2} a \right)}. \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

Für alle anderen Terme aus p_j verschwindet der Limes (C.63), da sie gegenüber $r_j y^{3j}$ mindestens mit einem Faktor $1/\sqrt{m}$ unterdrückt sind. Man bekommt daher auch insgesamt für $\psi_{n,j}^M$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(e^{-iMa} \rho_2^j \psi_j^M(y) \right) = \frac{1}{j!} \left(\frac{i\lambda^2 a^3}{6} \right)^j e^{-iE_n a - i\lambda \left(x + \frac{\lambda}{2} a \right)}. \quad (\text{C.64})$$

Die formale Störungsreihe

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-iMa} \psi_n^M(y) &\equiv \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-iMa} \rho_2^j \psi_{n,j}^M(y) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{i\lambda^2 a^3}{6} \right)^j e^{-iE_n a - i\lambda \left(x + \frac{\lambda}{2} a \right)} \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

ist damit konvergent für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-iMa} \psi_n^M(y) = e^{-iE_n a + i\frac{1}{6}\lambda^2 a^3} e^{-i\lambda(x + \frac{\lambda}{2}a)}. \quad (\text{C.66})$$

Das beweist die Behauptung. \square

C.3 Null-Lage der Oszillation

Mit der im vorigen Abschnitt erhaltenen Lösung (C.37) soll nun der Erwartungswert des Ortes im Zustand mit $n = 0$, d.h. die Größe

$$\omega^{A_g \Psi_0^M}(x) = \frac{\int da \int dx |g(a)|^2 x |\Psi_0^M(a, x)|^2}{\int da \int dx |g(a)|^2 |\Psi_0^M(a, x)|^2} \quad (\text{C.67})$$

im Limes $|g(a)|^2 \rightarrow \delta(t - a)$, berechnet werden. Die Rechnung wird nur bis zur ersten Ordnung der Störungsreihe und bis zur Ordnung $1/M$ in M durchgeführt.

Der Separationsparameter hat den Wert $E_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\rho_1}$, sodass die nullte Ordnung der Störungsreihe durch $\psi_{0,0}^M(y) = \exp(i\sqrt{m}y)$ gegeben ist mit

$$m = M - 2E_0 = M - \sqrt{\rho_1}. \quad (\text{C.68})$$

Die erste Ordnung bekommt man als spezielle Lösung der Differentialgleichung (C.29) mit der Inhomogenität $-\frac{1}{2}y^2 \exp(i\sqrt{m}y)$. Nach (C.50) ist eine spezielle Lösung gegeben durch

$$\psi_{\text{spez}}(y) = \left(\frac{i}{6\sqrt{m}} y^3 - \frac{1}{4m} y^2 - \frac{i}{4m^{\frac{3}{2}}} y + \frac{1}{8m^2} \right) e^{i\sqrt{m}y} - \frac{1}{8m^2} e^{-i\sqrt{m}y}. \quad (\text{C.69})$$

Durch Streichen der Terme ($\text{const} \cdot \exp(\pm i\sqrt{m}y)$) erhält man

$$\psi_{0,1}^M(y) = \left(\frac{i}{6\sqrt{m}} y^3 - \frac{1}{4m} y^2 - \frac{i}{4m^{\frac{3}{2}}} y \right) e^{i\sqrt{m}y}. \quad (\text{C.70})$$

Damit berechnet man

$$|\psi_{0,0}^M + \rho_2 \psi_{0,1}^M|^2 = \frac{\rho_2^2 y^6}{36m} - \frac{\rho_2^2 y^4}{48m^2} + \frac{\rho_2^2 y^2}{16m^3} - \frac{\rho_2 y^2}{2m} + 1. \quad (\text{C.71})$$

Da der Erwartungswert nur bis zur Ordnung $1/M$ berechnet werden soll, können Terme, die für $M \rightarrow \infty$ schneller gegen Null gehen als $1/M$ in (C.71) vernachlässigt werden. Mit den Entwicklungen

$$y = -\frac{\lambda}{\sqrt{M}} x + \left(\sqrt{M} - \frac{\lambda^2}{2\sqrt{M}} \right) a + o(M^{-1}) \quad (\text{C.72a})$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda^2}{M} - \frac{\lambda^4}{M^2} + o(M^{-3}) \quad (\text{C.72b})$$

$$m = M - 1 + o(M^{-1}) \quad (\text{C.72c})$$

folgt sofort

$$|\psi_{0,0}^M + \rho_2 \psi_{0,1}^M|^2 = 1 + \frac{\rho_2^2 y^6}{36m} - \frac{\rho_2 y^2}{2m} + o(M^{-2}) \quad (\text{C.73})$$

und weiter

$$\frac{\rho_2^2 y^6}{36m} = \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 + \frac{1}{M} \left(\frac{1}{36} \lambda^4 a^6 - \frac{5}{36} \lambda^6 a^6 - \frac{1}{6} \lambda^5 a^5 x \right) + o(M^{-2}) \quad (\text{C.74a})$$

$$\frac{\rho_2 y^2}{2m} = \frac{1}{2M} \lambda^2 a^2 + o(M^{-2}), \quad (\text{C.74b})$$

also insgesamt

$$|\psi_0^M + \rho_2 \psi_1^M|^2 = 1 + \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 + \frac{1}{M} \left(\frac{1}{36} \lambda^4 a^6 - \frac{5}{36} \lambda^6 a^6 - \frac{1}{6} \lambda^5 a^5 x - \lambda^2 a^2 \right). \quad (\text{C.75})$$

In der letzten Gleichung, wie auch in den folgenden, wurde das Symbol $o(M^{-2})$ weggelassen. Gleichheitszeichen verstehen sich ab hier immer als „gleich bis auf Terme der Ordnung $o(M^{-2})$ “.

Für die weiteren Rechnungen ist es vorteilhaft, (C.75) in einen nur von a abhängigen Teil und in einen Teil, der sowohl von a als auch von x abhängt, aufzuteilen. Man erhält

$$|\psi_0^M + \rho_2 \psi_1^M|^2 = F(a) - \frac{1}{6M} \lambda^5 a^5 x \quad (\text{C.76})$$

mit

$$F(a) := 1 + \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 + \frac{1}{M} \left(\frac{1}{36} \lambda^4 a^6 - \frac{5}{36} \lambda^6 a^6 - \lambda^2 a^2 \right). \quad (\text{C.77})$$

Für ein festes $a \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int dx |\Psi_0^M(a, x)|^2 &\equiv \int dx |\phi_0^M(x')|^2 |\psi_{0,0}^M(y) + \rho_2 \psi_{0,1}^M(y)|^2 \\ &= \int dx e^{-\sqrt{\rho_1} x'^2} \left(F(a) - \frac{1}{6M} \lambda^5 a^5 x \right). \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

Im Integral wird nun die Variablensubstitution $x' = \cos \alpha x - \sin \alpha \sqrt{M} a$ mit dem Drehwinkel α aus (C.16) durchgeführt. Mit der Entwicklung

$$x = \frac{x' + \sin \alpha \sqrt{M} a}{\cos \alpha} = x' - \lambda a + \frac{1}{M} \left(\frac{1}{2} \lambda^2 x' + \lambda^3 a \right), \quad (\text{C.79})$$

ergibt sich mit $c := \cos \alpha$

$$\begin{aligned} \int dx |\Psi_0^M(a, x)|^2 &= \frac{1}{c} \int dx' e^{-\sqrt{\rho_1} x'^2} \left(F(a) - \frac{1}{6M} \lambda^5 a^5 (x' + \lambda a) \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{c \sqrt[4]{\rho_1}} \left(F(a) + \frac{1}{6M} \lambda^6 a^6 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

und schließlich für das volle Normierungsintegral

$$\begin{aligned} & \int da \int dx |g(a)|^2 |\Psi_0^M(a, x)|^2 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{c \sqrt[4]{\rho_1}} \int da |g(a)|^2 \left[1 + \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 + \frac{1}{M} \left(\frac{1}{36} \lambda^6 a^6 + \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 - \frac{1}{2} \lambda^2 a^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\begin{aligned} & \int dx x |\phi_0^M(x')|^2 |\psi_{0,0}^M(y) + \rho_2 \psi_{0,1}^M(y)|^2 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{c \sqrt[4]{\rho_1}} (-\lambda a) \left[1 + \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 - \frac{\lambda^2}{M} \left(1 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{12} \lambda^2 a^4 - \frac{1}{36} \lambda^2 a^6 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

sodass sich (C.67) insgesamt wie folgt darstellen lässt:

$$\omega^{A_g \Psi_0^M}(x) = \frac{\int da |g(a)|^2 \left[1 + \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 - \frac{\lambda^2}{M} \left(1 + \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{12} \lambda^2 a^4 - \frac{1}{36} \lambda^2 a^6 \right) \right]}{\int da |g(a)|^2 \left[1 + \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 - \frac{\lambda^2}{M} \left(\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{36} \lambda^2 a^6 - \frac{1}{36} \lambda^4 a^6 \right) \right]}. \quad (\text{C.83})$$

Im Limes $|g(a)|^2 \rightarrow \delta(t-a)$ ergibt sich schließlich

$$\omega^{A_g \Psi_0^M}(x) \xrightarrow{|g(a)|^2 \rightarrow \delta(t-a)} -(\lambda t) \left[1 - \frac{\lambda^2}{M} \left(1 - \frac{\frac{1}{12} \lambda^2 t^4}{1 + \frac{1}{36} \lambda^4 t^6} \right) \right]. \quad (\text{C.84})$$

Literaturverzeichnis

- [1] AHARONOV, Y. und D. BOHM: *Time in the quantum theory and the uncertainty relation for time and energy*. Phys. Rev., 122:1649–1658, 1961.
- [2] ASHTEKAR, A. und J. LEWANDOWSKI: *Background independent quantum gravity: A status report*. Class. Quant. Grav., 21:R53–R152, 2004.
- [3] ASHTEKAR, A., T. PAWLOWSKI und P. SINGH: *Quantum nature of the big bang: An analytical and numerical investigation*. Phys. Rev. D, 73:124038, 2006.
- [4] BAUER, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, Band 1. de Gruyter, 1964.
- [5] BERGMANN, P.: *Observables in general relativity*. Rev. Mod. Phys., 33(4):510–514, 1961.
- [6] BRATELLI, O. und D.W. ROBINSON: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Band 1. Springer, 1987.
- [7] BRUNETTI, R. und K. FREDENHAGEN: *Time of occurrence observable in quantum mechanics*. Phys. Rev. A, 66(4):044101, 2002.
- [8] BRUNETTI, R., K. FREDENHAGEN und M. HOGE: *Time in quantum physics: From an external parameter to an intrinsic observable*. In Vorbereitung.
- [9] BUCHHOLZ, D., M. PORRMANN und U. STEIN: *Dirac versus Wigner. Towards a universal particle concept in local quantum field theory*. Phys. Lett. B, 267:377–381, 1991.
- [10] BUSCH, P., M. GRABOWSKI und P. LAHTI: *Time observables in quantum theory*. Phys. Lett., 191:357–361, 1994.
- [11] BUSCH, P., M. GRABOWSKI und P. LAHTI: *Operational Quantum Physics*. Springer, 1998.
- [12] DEWITT, B.S.: *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*. Phys. Rev., 160(5):1113–1148, 1967.

-
- [13] DITTRICH, B.: *Partial and complete observables for hamiltonian constraint systems*. [arXiv:gr-qc/0411013].
- [14] DITTRICH, B.: *Partial and complete observables for canonical general relativity*. *Class. Quant. Grav.*, 23(22):6155–6184, 2006.
- [15] EINSTEIN, A.: *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. *Annalen der Physik*, 17:549–560, 1905.
- [16] GAMBINI, R. und R. PORTO: *Relational time in generally covariant quantum systems: Four models*. *Phys. Rev. D*, 63:105014, 2001.
- [17] GAMBINI, R., R. PORTO und J. PULLIN: *A relational solution to the problem of time in quantum mechanics and quantum gravity induces a fundamental mechanism for quantum decoherence*. *New J. Phys.*, 6:45, 2004.
- [18] GAMBINI, R., R. PORTO und J. PULLIN: *Fundamental decoherence from quantum gravity: A pedagogical review*. *Gen. Rel. Grav.*, 39:1143, 2007.
- [19] GAMBINI, R. und J. PULLIN: *Relational physics with real rods and clocks and the measurement problem in quantum mechanics*. *Found. Phys.*, 37(7):1074–1092, 2007.
- [20] GELFAND, I. und M. NAIMARK: *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*. *Mat. Sbornik*, 12:197–217, 1943.
- [21] GRIFFITHS, R.B.: *Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics*. *J. Stat. Phys.*, 36:219, 1984.
- [22] GRIFFITHS, R.B.: *Consistent Quantum Theory*. Cambridge University Press, 2003.
- [23] HAAG, R. und D. KASTLER: *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*. *J. Math. Phys.*, 5:848–861, 1964.
- [24] HELLWIG, K.-E. und K. KRAUS: *Pure Operations and Measurements*. *Commun. Math. Phys.*, 11:214–220, 1969.
- [25] HELLWIG, K.-E. und K. KRAUS: *Operations and Measurements. II*. *Commun. Math. Phys.*, 16:142–147, 1970.
- [26] KARATZAS, I. und S. SHREVE: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1998.
- [27] LEIBNIZ, G.W.: *Philosophical Writings*. Dent, 1973. Seite 133.
- [28] MACH, E.: *Bemerkungen über die Entwicklung der Raumvorstellungen*. *Fichtes Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 49:227–232, 1866.

-
- [29] MERMIN, N.D.: *What is quantum mechanics trying to tell us?* Am. J. Phys., 66:753–767, 1998.
- [30] NEUMANN, J. VON: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, 1932.
- [31] PAGE, D. und W. WOOTERS: *Evolution without evolution: Dynamics described by stationary observables*. Phys. Rev. D, 27(12):2885–2892, 1983.
- [32] PAULI, W.: *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*. Springer, 1933.
- [33] REED, M. und B. SIMON: *Methods of Modern Mathematical Physics - Functional Analysis*, Band 1. Academic Press, 1972.
- [34] RIESZ, F. und B. NAGY: *Vorlesungen über Funktionalanalysis*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956.
- [35] ROEPSTORFF, G.: *Path Integral Approach to Quantum Physics*. Springer, 1994.
- [36] ROVELLI, C.: *What is observable in classical and quantum gravity?* Class. Quant. Grav., 8:297–316, 1991.
- [37] ROVELLI, C.: *Partial observables*. Phys. Rev. D, 65:124013, 2002.
- [38] SCHÜLLER, V. (Herausgeber): *Der Leibniz–Clarke Briefwechsel*. Akademie-Verlag, 1991.
- [39] SEGAL, I.E.: *Irreducible representations of operator algebras*. Bull. Amer. Math. Soc., 53:73–88, 1947.
- [40] STACHEL, J.: *How Einstein discovered general relativity: A historical tale with some contemporary morals*. In: MACCALLUM, M.A.H. (Herausgeber): *General Relativity and Gravitation*, Proc. 11th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation, Stockholm, 1986.
- [41] STRAUMANN, N.: *Quantenmechanik: Ein Grundkurs über nichtrelativistische Quantentheorie*. Springer, 2002.
- [42] THIEMANN, T.: *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, 2007.
- [43] WHEELER, J. und W. ZUREK (Herausgeber): *Quantum Theory and Measurement*. Princeton University Press, 1983.

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und die ausgezeichnete Betreuung.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe „Algebraische Quantenfeldtheorie“, besonders Nicola Pinamonti, Claudio Dappiaggi, Pedro Lauridsen Ribeiro, Thomas-Paul Hack und Kai Keller, danke ich für das spannende Jahr und unzählige Diskussionen, die ich vermissen werde. Ein besonderer Dank geht an die „Mit-66er“ Ole Niekerken, Sebastian Jakobs, Thomas Kecker, Kenan Mujkic und Bruno Chilian.

Für seine Begeisterung, Motivation und Förderung, ohne die ich vielleicht nie das Studium der Physik begonnen hätte, danke ich meinem früheren Mathematik- und Physiklehrer Karl Beyer.

Marion danke ich für ihre unermüdliche Hilfe beim Korrigieren dieser Arbeit. Für ihre liebevolle Unterstützung und besonders für ihre Geduld mit einem Physikstudenten bei der Fertigstellung seiner Diplomarbeit danke ich meiner Birte.

Meine tiefe Dankbarkeit gilt meinen Eltern, die mir durch ihre uneingeschränkte Unterstützung ein sorgenfreies Studium ermöglicht haben.

Erklärung gemäß der Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, den 8. Dezember 2008,

Marc Oliver Hoge