

Eichbrücken in der klassischen Feldtheorie

(Gauge Bridges in Classical Field Theory)

Diplomarbeit

vorgelegt von

Sebastian Jakobs

Februar 2009

II. Institut für theoretische Physik
Department Physik
UNIVERSITÄT HAMBURG

Gutachter der Diplomarbeit:
Prof. Dr. Klaus Fredenhagen
Dr. Mattias N. R. Wohlfarth

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Poissonstruktur zweier klassischer Eichfeldtheorien (das Maxwell-Klein-Gordon-System und das Maxwell-Dirac-System) mit Hilfe der Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen nach M. RIESZ [59] konstruiert. Dieses Verfahren wird für das Maxwell-Klein-Gordon- und das Maxwell-Dirac-System auf dem Minkowskiraum durchgeführt und für das Maxwell-Klein-Gordon-System auch auf eine beliebige Raumzeit verallgemeinert. Mit den Greenschen Funktionen werden die Poissonklammern als Peierlsklammern definiert. Damit werden schließlich nicht-lokale, eichinvariante Observablen, die sogenannten „Eichbrücken“ konstruiert. Die Eichbrücken sind die Matrixelemente von Holonomieoperatoren. Es wird gezeigt, wie diese aus den Poissonklammern lokaler, eichinvarianter Observablen hervorgehen. Dazu wird eine Methode von J. LANGERHOLC und B. SCHROER [43] auf die hier betrachteten wechselwirkenden Feldtheorien verallgemeinert.

Abstract

In this thesis poisson structures of two classical gauge field theories (Maxwell-Klein-Gordon- and Maxwell-Dirac-system) are constructed using the parametrix construction of Green's functions according to M. RIESZ [59]. Parametrices for the Maxwell-Klein-Gordon- and Maxwell-Dirac-system are constructed in Minkowski space and this construction is later generalized to curved space times for the Maxwell-Klein-Gordon-system. With these Green's functions poisson brackets will be defined as Peierls brackets. Finally non-local, gauge invariant observables, the so-called "gauge bridges" will be constructed. Gauge bridges are the matrix elements of holonomy operators. It will be shown, that these emerge from poisson brackets of local, gauge invariant observables. In order to achieve this a method previously employed by J. LANGERHOLC and B. SCHROER [43] in the framework of free field theory, is generalized to the interacting theories considered here.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Klassische Feldtheorie	5
2.1	Algebraische Formulierung der klassischen Feldtheorie	5
2.2	Die Peierls-Klammer	7
2.3	Klassische Eichfeldtheorie	10
2.3.1	Das Maxwell-Klein-Gordon-System	11
2.3.2	Das Maxwell-Dirac-System	15
3	Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen	19
3.1	Rieszdistributionen im Minkowskiraum	19
3.2	Rieszdistributionen in einer Umgebung	22
3.3	Parametrix des Maxwell-Klein-Gordon-Systems	23
3.3.1	Parametrixkonstruktion für das MKG-System im Minkowskiraum	23
3.3.2	Parametrixkonstruktion für das MKG-System in einer Umge- bung in einer Raumzeit	27
3.4	Parametrix des Maxwell-Dirac-Systems im Minkowskiraum	31
4	Konstruktion von Eichbrücken in der klassischen Feldtheorie	33
4.1	Eichbrücken als Poissonklammern: Das Maxwell-Klein-Gordon-System	36
4.2	Eichbrücken als Poissonklammern: Das Maxwell-Dirac-System	38
5	Zusammenfassung und Ausblick	41
A	Distributionen und Mannigfaltigkeiten	43
A.1	Einige Begriffe der Differentialgeometrie	43
A.2	Distributionen und mikrolokale Analysis	46
B	Funktionalableitung und die Jacobi-Identität	49

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der klassischen Physik sind die Potentiale $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ nur von zweitrangiger Bedeutung, sie treten nur als Hilfsgrößen auf, und tauchen nicht mehr in den messbaren Größen auf. In der Quantenmechanik ändert sich dies. W. EHRENBERG und R. E. SIDAY [24] haben dies in einer semiklassischen Behandlung der Streuung von Elektronen an einem magnetischen Fluss festgestellt. Unabhängig von diesen haben Y. AHARONOV und D. BOHM [1, 2] diesen Prozess in der Quantenmechanik untersucht. Y. AHARONOV und D. BOHM betrachten hierbei ein Doppelspaltexperiment mit Elektronen, bei dem hinter dem Doppelspalt ein eingeschlossener magnetischen Fluss liegt (z.B. eine unendlich lange Spule, oder ein magnetisiertes Eisenjoch, das den magnetischen Fluss um das Experiment herum führt.), wie in Abb. 1.1 dargestellt. Das Magnetfeld ist von den Elektronen abgeschirmt (z.B. durch einen Supraleiter),

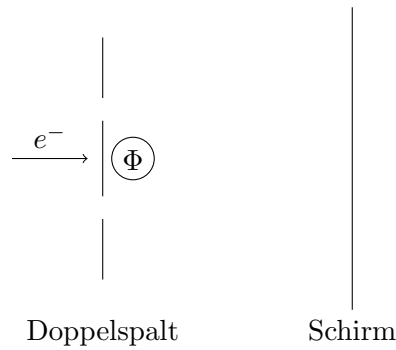


Abbildung 1.1: Das Gedankenexperiment von Y. AHARONOV und D. BOHM. Der magnetische Fluss Φ wird vom Elektronenstrahl abgeschirmt (z.B. durch einen Supraleiter), so dass die Elektronen nicht direkt mit dem Fluss wechselwirken können

so dass die Elektronen den magnetischen Fluss nicht verändern können, und es keine direkte Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Feld und den Elektronen gibt. Y. AHARONOV und D. BOHM stellen fest, dass ein Elektron beim Passieren des magnetischen Flusses Φ eine Verschiebung seines Phasenwinkels um

$$-\frac{e}{c\hbar} \int_y^x \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (\text{Gauß-Einheiten})$$

erhält. Hierbei wird entlang eines (raumartigen) Weges von y nach x integriert. Bei der Interferenz auf dem Schirm kann man lediglich die relative Phase zweier Elektronen

1 Einleitung

sehen

$$\Delta S = - \left[\frac{e}{c\hbar} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right] \pmod{2\pi},$$

dabei wird entlang des geschlossenen Weges integriert, der sich aus der Verknüpfung der beiden Wege der interferierenden Elektronen ergibt. B. S. DE WITT [15] gab zu diesem Gedankenexperiment eine nicht-lokale Interpretation. Im Rahmen der Quantenfeldtheorie drückt B. S. DE WITT die Feldgleichungen der Spinorelektrodynamik durch die Feldoperatoren

$$\Psi(x) = \exp \left[-ie \int_{-\infty}^0 A_\mu(z) \frac{\partial z^\mu}{\partial \xi} d\xi \right] \psi(x)$$

aus. Die Integration erfolgt entlang eines raumartigen Weges, der unendlich weit weg vom Ursprung beginnt und bei x endet. Die Feldgleichungen enthalten damit nur eichinvariante Größen. S. MANDELSTAM [46] gibt zu einer solchen nicht-lokalen Feldtheorie die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen an. Schließlich ist O. STEINMANN [64, 66] in der Lage diese Feldoperatoren perturbativ zu konstruieren. O. STEINMANN leitet dazu aus den Feldgleichungen der lokalen, eichinvarianten Quantenfeldtheorie neue Feldgleichungen für die nicht-lokalen Felder her, und löst diese dann perturbativ. Das Ziel, das O. STEINMANN mit der Konstruktion dieser nicht-lokalen Feldoperatoren verfolgt ist jedoch nicht auf den Aharonov-Bohm-Effekt abgezielt. Vielmehr möchte O. STEINMANN Zustände erzeugen, die eine globale Ladung besitzen.

Nicht-lokale Feldoperatoren haben in der Physik eine weitgehende Bedeutung, und wir wollen uns in dieser Arbeit damit beschäftigen, wie man nicht-lokale Felder der Form

$$\bar{\psi}(x) e^{ie \int_y^x A_\mu(z) dz^\mu} \psi(y)$$

konstruiert¹. Insbesondere werden wir die Frage beantworten, ob diese Felder bereits in der Poissonalgebra der lokalen, eichinvarianten Felder enthalten sind. Wir werden dies am Beispiel zweier Feldtheorien, des Maxwell-Klein-Gordon-Systems (ϕ, A) und des Maxwell-Dirac-Systems (ψ, A) untersuchen. Es zeigt sich, dass die endlichen Eichbrücken bereits in der niedrigsten Ordnung der Poissonklammern

$$\{ \{ \phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y) \}, \phi^*(z)\phi(z) \}, \quad x \text{ raumartig zu } z, y \in J^+(x) \cap J^+(z),$$

enthalten sind². Dabei treten jedoch die Eichbrücken in hermiteschen Kombinationen auf, neben der Eichbrücke von x nach z erhalten wir auch die Eichbrücke von z nach x . Die Situation, sowie das Problem ähnelt einer Arbeit von J. LANGERHOLC und B. SCHROER [43]. Wir erläutern an dieser Stelle kurz diese Arbeit und auf welche Weise das Problem gelöst wird.

Unter bilokalen Feldern versteht man die Produkte $\phi^*(x)\phi(y)$ ³, wobei $x, y \in \mathbb{M}$

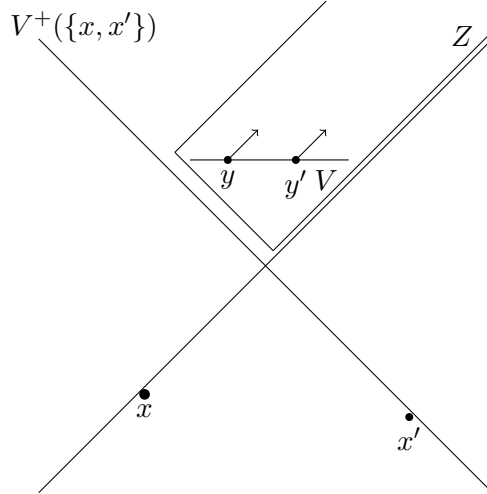


Abbildung 1.2: Vereinfachtes Raumzeitdiagramm aus [43]. Die kegelförmige Menge Z ist von jedem der beiden Punkte $x, x' \in \mathbb{M}$ mit einer zeitartigen Geodäte zu erreichen. Die Punkte y, y' können sich zunächst in V befinden, werden aber am Schluß der Rechnung in zeitartiger Richtung verschoben.

zwei beliebige Punkte sind (siehe Abb. 1.2). Wir bezeichnen mit Z eine kegelförmige Menge in $V^+(x) \cap V^+(x')$. Im Rahmen der algebraischen, freien Quantenfeldtheorie [33, 32] zeigen J. LANGERHOLC und B. SCHROER, dass die von Neumann-Algebra⁴ der bilokalen Felder $R_{x,x'}(\phi)$ in der von Neumann-Algebra der Stromdichte $R_{\{x,x'\} \cup Z}(j^0)$ enthalten ist⁵. Hierzu wird gezeigt, dass die umgekehrte Inklusion für die Kommutanten gilt, also

$$R_{\{x,x'\} \cup Z}(j^0)' \subseteq R_{x,x'}(\phi)'.$$

Wenn $P \in R_{\{x,x'\} \cup Z}(j^0)'$ ist, dann kommutiert P schwach mit dem Produkt der Kommutatoren $[j^0(x), j^0(y)] \cdot [j^0(x'), j^0(y')]$, $y, y' \in Z$. Wenn man diesen Sachverhalt ausschreibt, und die Punkte y, y' in Richtung von Z nach Unendlich verschiebt, erhält

¹Diese endlichen Eichbrücken wurden bereits von P. G. BERGMANN [8] im Rahmen einer nicht-lokalen Feldtheorie nach P. A. M. DIRAC [20] diskutiert.

²Zur Definition des Vorwärtslichtkegels $J^+(x)$ siehe Anhang A.

³Wir betrachten hier nur die Theorie eines freien komplexen Feldes ϕ .

⁴Für eine Definition und Erläuterung der verwendeten Begriffe siehe [11].

⁵Die von Neumann-Algebra der bilokalen Felder ist

$$R_{x,x'}(\phi) := S_{x,x'}(\phi)',$$

wobei wir mit $S_{x,x'}(\phi)'$ die Kommutante der Algebra

$$S_{x,x'}(\phi) := \{P \in \mathcal{B} | (\Phi, P\phi^*(x)\phi(x')\Psi) = (\phi^*(x')\phi(x)\Phi, P\Psi)\}$$

bezeichnen, und \mathcal{B} die Algebra der beschränkten Operatoren ist.

1 Einleitung

man

$$(\Phi, P\{\phi^*(x)\phi(x') + \phi^*(x')\phi(x)\}\Psi) = (\{\phi^*(x')\phi(x) + \phi^*(x)\phi(x')\}\Phi, P\Psi). \quad (1.1)$$

Um die hermitesche Kombination der Felder aufzuspalten, und damit die Behauptung zu zeigen, verwenden J. LANGERHOLC und B. SCHROER den Ladungsoperator Q_h , der die Ladung in einer endlichen Hyperfläche $V \subset Z$ misst,

$$Q_h := \int_V d\mu_V(z) j^0(z), \quad V \subset Z,$$

wobei μ_V das Lebesguemaß der Hyperfläche V ist. Bevor man den Limes $y, y' \rightarrow \infty$ bildet, kommutiert man diesen Ladungsoperator mit dem Operatorausdruck in (1.1), und erhält

$$\phi^*(x)\phi(x') - \phi^*(x')\phi(x) + \dots,$$

wobei die Punkte Kommutatoren mit $\phi^{(*)}(y), \phi^{(*)}(y')$ andeuten, die im Limes verschwinden. Nachdem man das Mittel zwischen diesem Ausdruck und (1.1) gebildet hat, folgt schließlich die Behauptung.

2 Klassische Feldtheorie

In der Physik findet der Begriff des Feldes häufig eine Anwendung. In der klassischen Elektrodynamik versteht man darunter z.B. Funktionen

$$\mathbf{E} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

In der Quantenfeldtheorie wird dieser Begriff verallgemeinert, und Felder sind dort operatorwertige Distributionen. Nachdem man die Felder mit Testfunktionen verschmiert hat, sind diese lineare Operatoren auf einem Hilbertraum. Wir möchten hier eine Beschreibung klassischer Feldtheorien geben, die sich an der algebraischen Formulierung der Quantenfeldtheorie orientiert. Wir folgen hierbei der Arbeit von M. DÜTSCH und K. FREDENHAGEN [23] und der Diplomarbeit von F. BRENNECKE [13]. Nachdem wir die Prinzipien einer klassischen Feldtheorie am Beispiel eines reellen skalaren Feldes erläutert haben, werden wir auch zwei wechselwirkende Theorien betrachten.

2.1 Algebraische Formulierung der klassischen Feldtheorie

Klassische Felder sind üblicherweise glatte Funktionen auf dem Minkowskiraum \mathbb{M} mit Werten in \mathbb{R}^k . Diese Sichtweise muss man aber bereits bei der Beschreibung der klassischen Elektrodynamik aufgeben. Wir werden für die klassischen Felder singuläre Objekte zulassen.

Definition 2.1 (Klassisches Feld). Sei $\mathcal{C} = C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ der Raum der reellwertigen glatten Funktionen auf dem d -dimensionalen Minkowskiraum \mathbb{M} mit der Metrik $\eta = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$. Das *klassische Feld* $\varphi(x)$ ist das Auswertungsfunktional

$$\begin{aligned} \varphi(x) : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f &\mapsto \varphi(x)[f] := f(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ableitungen auf klassische Felder sind durch

$$\partial^a \varphi(x)[f] := \partial^a f(x), \quad a \in \mathbb{N}_0^d \tag{2.2}$$

erklärt, wobei wir die Multiindexnotation $\partial^a = (\partial^0)^{a_0} \dots (\partial^{d-1})^{a_{d-1}}$ verwendet haben. Die Felder sind also in diesem Sinne unendlich oft differenzierbar.

Die Potenzen des Feldes und seine Ableitungen erzeugen die *polynomiale Algebra* des klassischen Feldes φ . Wir bezeichnen diese reelle Algebra des klassischen Feldes φ , welche von

$$\left\{ \partial^a \varphi(x) \mid a \in \mathbb{N}_0^d, x \in \mathbb{M} \right\}$$

2 Klassische Feldtheorie

erzeugt wird, mit \mathcal{P} . Das Produkt dieser Algebra ist hierbei punktweise erklärt

$$(A \cdot B)(x)[f] \equiv A(x)[f] \cdot B(x)[f] \quad A, B \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{C}.$$

Die Polynome des klassischen Feldes können wir zu Funktionalen zusammensetzen. Diese Funktionale haben die Form

$$F(\varphi) = \sum_{n=0}^N \int dx_1 \dots dx_n p_1(x_1) \cdots p_n(x_n) t_n(x_1, \dots, x_n), \quad p_i(x_i) \in \mathcal{P}, N < \infty,$$

mit $t_i \in \mathbb{R}$ und reellen Distributionen $t_n(x_1, \dots, x_n)$ mit kompaktem Träger, deren Wellenfrontmenge¹ $\mathbb{M}^n \times (\bar{V}^{+n} \cup \bar{V}^{-n})$ nicht schneidet². Die Menge der Funktionale bezeichnen wir mit \mathcal{F} . Diese Menge wird mit dem Produkt

$$(A \cdot B)(\varphi) \equiv A(\varphi) \cdot B(\varphi)$$

zu einer reellen kommutativen Algebra. Die *lokalen Funktionale* \mathcal{F}^{loc} sind eine Teilmenge der Funktionale \mathcal{F} und haben die Form

$$F(\varphi) = \int dx \sum_{n=1}^N A_n(x) h_n(x),$$

mit $A_n \in \mathcal{P}$, $h_n \in C_0^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R})$. Die lokalen Funktionale selbst bilden keine Algebra.

Die Funktionale auf dem Feld φ lassen sich auch als Funktionale auf dem Raum \mathcal{C} auffassen

$$F_\varphi[f] := F(\varphi)[f] \quad f \in \mathcal{C}.$$

Wir wollen im Folgenden diese Auffassung immer vertreten.

Ein bestimmtes Funktional, die sogenannte Wirkung S beschreibt die Dynamik der Feldtheorie, das sind Gleichungen für das Feld φ . Diese Feldgleichungen erhalten wir durch das Prinzip extremaler Wirkung ($\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} = 0^3$), diese heißen auch Euler-Lagrange-Gleichungen. Falls die Wirkung ein lokales Funktional ist ($S = \int dx \mathcal{L}$), und nur von φ und dessen Ableitungen erster Ordnung $\partial_\mu \varphi$ abhängt, nehmen die Euler-Lagrange-Gleichungen die folgende Form an

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(x) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)}(x) = 0.$$

Das Feld erfüllt die Feldgleichungen, wenn wir es auf \mathcal{C}_S einschränken, dann bezeichnen wir $\varphi_S(x) \equiv \varphi(x)|_{\mathcal{C}_S}$ als das „on-shell“-Feld, im Gegensatz dazu bezeichnen wir $\varphi(x)$ als das „off-shell“-Feld.

Die Feldgleichungen erzeugen ein Ideal in der Algebra \mathcal{P}

$$\mathcal{E}_S^{\mathcal{P}} := \left\{ \sum_a A_a \partial^a \frac{\delta S}{\delta \varphi} \mid A_a \in \mathcal{P}, a \in \mathbb{N}_0^d \right\}.$$

¹Zur Definition der Wellenfrontmenge siehe Anhang A.

²Diese Einschränkung erhält erst nach einer Quantisierung eine Bedeutung.

³Zur Definition der Variationsableitung siehe Anhang B

Ein solches Ideal wird in der Algebra \mathcal{F} durch die Menge

$$\left\{ \int dx f(x) P(x) \mid P \in \mathcal{E}_S^{\mathcal{P}}, f \in C_0^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R}) \right\}$$

erzeugt. Dieses Ideal bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_S^{\mathcal{F}}$. Schränkt man Funktionale $F \in \mathcal{E}_S^{\mathcal{F}}$, $G \in \mathcal{E}_S^{\mathcal{P}}$ auf die Menge der Lösungen \mathcal{C}_S ein, verschwinden diese: $F|_{\mathcal{C}_S} \equiv 0$, $G|_{\mathcal{C}_S} \equiv 0$.

Wir schränken unsere Betrachtung auf Wirkungen S ein, deren Feldgleichungen ein wohlgestelltes Cauchyproblem besitzen, d.h. zu vorgegebenen Anfangsbedingungen existieren lokal eindeutige Lösungen. Mit lokal meinen wir, dass die Lösungen auf einer kleinen Umgebung um die Cauchyfläche, auf der die Randbedingungen gegeben sind, existieren (siehe [69, S. 251]). Diese Bedingung gilt z.B. für ein reelles skalares Feld mit polynomialer Selbstkopplung:

$$S = \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \lambda P(\varphi)(x) \right],$$

hierbei ist P ein Polynom. Die Feldgleichungen dieses Feldes lauten

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} = -(\square + m^2)\varphi(x) + \lambda P'(\varphi(x)) = 0.$$

P' ist die konventionelle Ableitung des Polynoms P .

2.2 Die Peierls-Klammer

Auf der Algebra \mathcal{F} möchten wir eine weitere algebraische Struktur einführen.

Definition 2.2 (Poissonklammer). Eine Abbildung

$$\{ \cdot, \cdot \} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

heißt *Poissonklammer*, wenn diese die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Die Abbildung ist in beiden Argumenten \mathbb{R} -linear,
2. die Abbildung ist antisymmetrisch

$$\{F, G\} = -\{G, F\},$$

3. die Klammer erfüllt im ersten Argument die Derivationseigenschaft

$$\{F \cdot G, H\} = F \cdot \{G, H\} + \{F, H\} \cdot G,$$

4. die Abbildung $\{ \cdot, \cdot \}$ erfüllt die Jacobi-Identität

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

Aus der Antisymmetrie der Poissonklammer folgt, dass $\{\cdot, \cdot\}$ auch im zweiten Argument eine Derivation ist.

Bei der Konstruktion einer Poissonklammer berechnet man diese gewöhnlich auf einer Cauchyfläche und setzt diese dann mit Hilfe der Feldgleichungen auf den gesamten Raum fort. Diese Methode ist nicht manifest kovariant, was deren Anwendung in einer relativistischen Theorie erschwert, außerdem ist die Einschränkung auf eine Hyperfläche für Funktionale nicht wohldefiniert. Wir werden daher einen anderen Zugang wählen, der nicht nur manifest kovariant ist, sondern auch für alle Funktionale $F \in \mathcal{F}$ anwendbar ist. Hierzu verwenden wir die Greenschen Funktionen der linearisierten Feldgleichungen, die stets existieren, da wir die Wahl der Wirkung S geeignet eingeschränkt haben.

Die linearisierten Feldgleichungen ergeben sich, wenn wir die Feldgleichungen unter dem Einfluss einer Störung der Lösung betrachten. Wir stören die Lösung der Feldgleichungen φ mit einem Term $\lambda\varphi'$. Wir wenden die Feldgleichungen $\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} = 0$ auf $\phi = \varphi + \lambda\varphi'$ an, und betrachten diesen Ausdruck bis zur Ordnung λ . Das Feld ϕ erfüllt die Feldgleichungen, falls φ' die Gleichung

$$\int dx \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \varphi'(y) = 0$$

erfüllt. Wir bezeichnen diese Gleichung als die *linearisierte Feldgleichung*. Diese hängt zwar von der Lösung φ ab, wir können diese Gleichung aber auch für ein beliebiges Feld φ betrachten, was wir im Folgenden auch tun werden. Das Feld φ bezeichnet man dann auch als ein externes Hintergrundfeld. Wir bestimmen zu den linearisierten Feldgleichungen die retardierte Δ^R und die avancierte Greensche Funktionen Δ^A :

$$\begin{aligned} \int dz \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \Delta^{R/A}(z, y) &= \delta_y(x), \\ \text{supp}(\Delta^R) &\subset \left\{ (x, y) \in \mathbb{M}^2 \mid y \in J^-(x) \right\}, \\ \text{supp}(\Delta^A) &\subset \left\{ (x, y) \in \mathbb{M}^2 \mid y \in J^+(x) \right\}. \end{aligned}$$

Durch die Wahl des Trägers sind die Greenschen Funktionen eindeutig bestimmt. Um die Existenz der Greenschen Funktionen zu garantieren stellen wir an die Wirkung S die weitere Forderung, dass die linearisierten Feldgleichungen zu S normal hyperbolisch sind.

Mit den $\Delta^{R/A}$ definieren wir nun eine Poissonklammer.

Definition 2.3 (Peierlsklammer). Auf den Funktionalen \mathcal{F} ist die *Peierlsklammer* durch

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}, \\ (F, G) &\mapsto \{F, G\} := \int \left[\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta G}{\delta\varphi(y)} \right] dx dy, \end{aligned}$$

definiert. Hierbei ist die *Kommutatorfunktion*

$$\Delta(x, y) := \Delta^R(x, y) - \Delta^A(x, y).$$

Proposition 2.4. *Die Peierlsklammer ist eine Poissonklammer, also antisymmetrisch, \mathbb{R} -bilinear, erfüllt die Jacobi-Identität, und ist in beiden Argumenten eine Derivation.*

Beweis. Die \mathbb{R} -Bilinearität und die Derivationseigenschaft gehen sofort aus der Definition hervor. Die Antisymmetrie folgt, wenn man

$$\Delta^R(x, y) = \Delta^A(y, x)$$

berücksichtigt. Es bleibt die Jacobi-Identität zu zeigen. Seien $F, G, H \in \mathcal{F}$, dann haben wir

$$\begin{aligned} \{F, \{G, H\}\} &= \int d(x, y, z, z') \left[\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \left(\frac{\delta G}{\delta \varphi(z)} \Delta(z, z') \frac{\delta H}{\delta \varphi(z')} \right) \right] \\ \{F, \{G, H\}\} &= \int d(x, y, z, z') \left[\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \left(\frac{\delta G}{\delta \varphi(z)} \Delta(z, z') \frac{\delta H}{\delta \varphi(z')} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\delta G}{\delta \varphi(z)} \frac{\delta \Delta(z, z')}{\delta \varphi(y)} \frac{\delta H}{\delta \varphi(z')} + \frac{\delta G}{\delta \varphi(z)} \Delta(z, z') \frac{\delta^2 H}{\delta \varphi(y) \delta \varphi(z')}. \end{aligned}$$

Die übrigen beiden Ausdrücke lassen sich analog berechnen. Wir addieren diese drei Ausdrücke, dann heben sich die Terme, die zweite Variationen der Funktionale F, G und H enthalten weg. Übrig bleiben die Terme, die die Variation der Kommutatorfunktion Δ enthalten. Diese Variation berechnen wir in Anhang B. Wenn wir diese in den verbliebenen Ausdruck einsetzen erhalten wir nach einer längeren Rechnung, die wir in Anhang B angeben:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

□

Eine Poissonklammer mit Hilfe der linearisierten Feldgleichungen zu formulieren war die ursprüngliche Idee von R. E. PEIERLS [54]. In seiner Darstellung fehlt jedoch der Beweis der Jacobi-Identität, die nur für bestimmte Wirkungen dort angegeben wurde. D. MAROLF hat diese Idee schließlich verallgemeinert und vor allem die Jacobi-Identität bewiesen [49, 48] (siehe auch [18]). Unsere Darstellung, und vor allem unsere Notation orientiert sich an der Arbeit [23] von M. DÜTSCH und K. FREDENHAGEN.

Aus der Definition der Peierlsklammer kann man ersehen, dass das Ideal $\mathcal{E}_S^{\mathcal{F}}$ invariant unter Wirkung der Peierlsklammer ist, d.h.

$$F \in \mathcal{F}, E \in \mathcal{E}_S^{\mathcal{F}} \Rightarrow \{F, E\} \in \mathcal{E}_S^{\mathcal{F}}.$$

Die Menge $\mathcal{E}_S^{\mathcal{F}}$ ist also auch ein Poissonideal, und es folgt

$$\{F, G\}|_S = \{F_S, G_S\}, \quad F_S = F|_{\mathcal{C}_S}, \quad G_S = G|_{\mathcal{C}_S}.$$

2 Klassische Feldtheorie

Wir können also die Poissonstruktur „off-shell“ ausrechnen und am Schluss auf die Menge der Lösungen \mathcal{C}_S einschränken, um die Poissonstruktur der „on-shell“ Felder zu erhalten.

Als ein Beispiel betrachten wir ein klassisches Klein-Gordon-Feld mit Selbstkopplung:

$$S = \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x) \right].$$

Erste und zweite Variation der Wirkung S lauten

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} &= -\square \varphi(x) - m^2 \varphi(x) + \frac{\lambda}{3!} \varphi^3(x), \\ \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} &= \left[-\square - m^2 + \frac{\lambda}{2!} \varphi^2(x) \right] \delta_y(x). \end{aligned}$$

Die linearisierte Feldgleichung ist also

$$-\square \varphi'(x) - m^2 \varphi'(x) + \frac{\lambda}{2!} \varphi^2(x) \varphi'(x) = 0.$$

Wir können keinen expliziten Ausdruck für die Greenschen Funktionen hinschreiben, jedoch können wir eine Störungsreihe im Parameter λ für $\Delta^{R/A}$ angeben. Hierbei verwenden wir die geometrische Reihe für Integalkerne:

$$\Delta^R = \Delta_{m \text{ ret}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{2!} \right)^k [\varphi^2 \cdot \Delta_{m \text{ ret}}]^k,$$

wobei $\Delta_{m \text{ ret}}$ die retardierte Greensche Funktion des Operators $-(\square + m^2)$ ist, d.h. $-(\square + m^2)\Delta_{m \text{ ret}} = \mathbb{1}$, und $\text{supp}(\Delta_{m \text{ ret}} \subset \{(x, y) \in \mathbb{M}^2 | y \in J^-(x)\})$. Die Potenzen sind im Sinne von Integraloperatoren zu verstehen, also

$$\begin{aligned} [\varphi^2 \cdot \Delta_{m \text{ ret}}]^k(x, y) &= \varphi^2(x) \cdot \Delta_{m \text{ ret}}(x, x_1) \cdots \varphi^2(x_{k-1}) \cdot \Delta_{m \text{ ret}}(x_{k-1}, y) \quad k \geq 1, \\ [\varphi^2 \cdot \Delta_{m \text{ ret}}]^1(x, y) &= \varphi^2(x) \cdot \Delta_{m \text{ ret}}(x, y), \\ [\varphi^2 \cdot \Delta_{m \text{ ret}}]^0(x, y) &= \mathbb{1}(x, y) = \delta_y(x). \end{aligned}$$

2.3 Klassische Eichfeldtheorie

Wir haben bisher die algebraische Formulierung der klassischen Feldtheorie nur am Beispiel eines reellen skalaren Feldes beschrieben. Diese Beschreibung erweitern wir nun auch auf Eichfeldtheorien. Speziell gebe wir hier die Definition des Maxwell-Klein-Gordon-Systems (MKG-System: Ein komplexes Skalarfeld ϕ , das mit einem Vektorpotential A^μ wechselwirkt) und des Maxwell-Dirac-Systems (MD-System: Ein komplexes Spinorfeld ψ , das mit einem Vektorpotential A^μ wechselwirkt).

2.3.1 Das Maxwell-Klein-Gordon-System

Wir klären zunächst den Feldbegriff.

Definition 2.5 (Klassisches Feld). Sei $\mathcal{C}^\phi = C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C})$ der Raum der komplexwertigen, glatten Funktionen auf dem d -dimensionalen Minkowskiraum \mathbb{M} und $\mathcal{C}^A = C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R}^d)$. Das *klassische Skalarfeld* ϕ ist das Auswertungsfunktional

$$\begin{aligned}\phi(x) : \mathcal{C}^\phi &\rightarrow \mathbb{C}, \\ f &\mapsto \phi(x)[f] := f(x).\end{aligned}$$

Das *komplex konjugierte Feld* ϕ^* ist das Auswertungsfunktional

$$\begin{aligned}\phi^*(x) : \mathcal{C}^\phi &\rightarrow \mathbb{C}, \\ f &\mapsto \phi^*(x)[f] := f^*(x).\end{aligned}$$

Das *klassische Vektorpotential* $A(x)$ ist das Auswertungsfunktional

$$\begin{aligned}A(x) : \mathcal{C}^A &\rightarrow \mathbb{R}^d, \\ f &\mapsto A(x)[f] := f(x).\end{aligned}$$

Das Vektorpotential A schreiben wir häufig komponentenweise A^μ .

Die Ableitungen auf diese Felder werden wie oben erklärt:

$$\left. \begin{aligned}\partial^a \phi(x)(f) &= \partial^a f(x), \\ \partial^a \phi^*(x)(f) &= \partial^a f^*(x), \\ \partial^a A(x)(g) &= \partial^a g(x),\end{aligned} \right\} a \in \mathbb{N}_0^d, f \in \mathcal{C}^\phi, g \in \mathcal{C}^A.$$

Genau wie oben, wird die *polynomiale Algebra* des MKG-Systems von den Potenzen der Felder und deren Ableitungen

$$\{\partial^a \phi | a \in \mathbb{N}_0^d\} \cup \{\partial^a \phi^* | a \in \mathbb{N}_0^d\} \cup \{\partial^a A | a \in \mathbb{N}_0^d\}$$

erzeugt. Wir bezeichnen diese Algebra mit $\mathcal{P}^{(\phi, A)}$, und das Produkt in dieser Algebra ist wieder punktweise erklärt. Die Funktionale der Felder ϕ, ϕ^*, A haben die Form

$$F(\phi, \phi^*, A) = \sum_{n=0}^N \int d(x_1, \dots, x_n) p_1(x_1) \dots p_n(x_n) t_n(x_1, \dots, x_n), \quad p_i \in \mathcal{P}^{(\phi, A)}, \quad N < \infty,$$

mit $t_0 \in \mathbb{C}$ und komplexen Distributionen t_n mit kompaktem Träger, deren Wellenfrontmenge $\text{WF}(t_n) \mathbb{M}^n \times (\overline{V^{+n}} \cup \overline{V^{-n}})$ nicht schneidet. Die Menge der Funktionale bezeichnen wir mit $\mathcal{F}^{(\phi, A)}$. Diese wird mit dem Produkt $(A \cdot B)(x)[f] \equiv A(x)[f] \cdot B(x)[f]$ wird dieser zu einer komplexen und kommutativen Algebra. Die Teilmenge der lokalen Funktionale

$$F(\phi, \phi^*, A) = \int d^d x \sum_{n=1}^N A_n(x) h_n(x), \quad A_n \in \mathcal{P}^{(\phi, A)}, \quad h_n \in C_0^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C})$$

2 Klassische Feldtheorie

bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_{\text{loc}}^{(\phi, A)}$.

Auch hier werden wir die Funktionale $F \in \mathcal{F}^{(\phi, A)}$ als Funktionale auf $\mathcal{C}^\phi \times \mathcal{C}^\phi \times \mathcal{C}^A$ auffassen

$$F(f, g, h) = F(\phi, \phi^*, A)[f, g, h], \quad f, g \in \mathcal{C}^\phi, h \in \mathcal{C}^A.$$

Die Dynamik dieser Feldtheorie wird durch ein Wirkungsfunktional S beschrieben, das invariant unter den (lokalen) Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\phi(x), \\ A^\mu(x) &\rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\alpha(x), \end{aligned}$$

ist. Hierbei ist $\alpha \in C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R})$. Eine Eichtransformation heißt global, falls $\alpha = \text{const.}$ Die eichinvariante Wirkung des MKG-Systems ist

$$S = \int d^d x \left\{ (D_\mu \phi(x))^* D^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \right\},$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) - ie A_\mu(x) \phi(x),$$

und dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x).$$

Die Feldgleichungen zu dieser Wirkung sind jedoch nicht normal hyperbolisch. Wir addieren daher einen eichfixierenden Term $-\frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2$, verwenden also im Folgenden die Wirkung

$$S = \int d^d x \left\{ (D_\mu \phi(x))^* D^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu(x))^2 \right\}.$$

Die Wirkung ist jetzt allerdings nur noch invariant unter den Eichtransformationen, für die α die Wellengleichung $\square\alpha = 0$ erfüllt. Wir werden dies später beheben, indem wir am Schluß das Ideal, dass von $\partial^\mu A_\mu(x)$ erzeugt wird aus der Poissonalgebra herausteilen.

Wir bestimmen die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} &= -(D_\mu D^\mu \phi(x))^* - m^2 \phi^*(x) = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta \phi^*(x)} &= -D_\mu D^\mu \phi(x) - m^2 \phi(x) = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta A^\mu(x)} &= \square A_\mu(x) + ie \left(\phi^*(x) D_\mu \phi(x) - \phi(x) (D_\mu \phi(x))^* \right) = 0, \end{aligned}$$

und die zweite Variation der Wirkung

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} &= 0 = \frac{\delta^2 S}{\delta\phi^*(x)\delta\phi^*(y)}, \\
 \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi^*(y)} &= -(\square + 2ieA_\mu(x)\partial^\mu + ie\partial^\mu A_\mu(x) - e^2 A_\mu(x)A^\mu(x) + m^2)\delta_y(x), \\
 \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)A^\nu(y)} &= -ie[2(\partial_\nu + ieA_\nu(x))\phi^*(x) + \phi^*(x)\partial_\nu]\delta_y(x), \\
 \frac{\delta^2 S}{\delta\phi^*(x)\delta\phi(y)} &= -(\square - 2ieA_\mu(x)\partial^\mu - ie\partial^\mu A_\mu(x) + m^2)\delta_y(x), \\
 \frac{\delta^2 S}{\delta\phi^*(x)\delta A^\nu(y)} &= ie[2(\partial_\nu - ieA_\nu(x))\phi(x) + \phi(x)\partial_\nu]\delta_y(x), \\
 \frac{\delta^2 S}{\delta A^\mu(x)\delta\phi(y)} &= -ie[(\partial_\mu + 2ieA_\mu(x))\phi^*(x) - \phi^*(x)\partial_\mu]\delta_y(x), \\
 \frac{\delta^2 S}{\delta A^\mu(x)\delta\phi^*(y)} &= ie[(\partial_\mu - 2ieA_\mu(x))\phi(x) - \phi(x)\partial_\mu]\delta_y(x), \\
 \frac{\delta^2 S}{\delta A^\mu\delta A^\nu(y)} &= [g_{\mu\nu}\square + 2ie\phi(x)\phi^*(x)g_{\mu\nu}]\delta_y(x).
 \end{aligned}$$

Wir schreiben die zweiten Variationen als eine Matrix in der Basis (ϕ, ϕ^*, A^μ) . Man sieht dann sofort, dass diese der Integralkern eines normal hyperbolischen Differentialoperators ist. Somit existieren die Greenschen Funktionen. Diese sind ebenfalls Matrizen. Wir definieren die Kommutatorfunktion wieder über

$$\Delta(x, y) = \Delta^R(x, y) - \Delta^A(x, y).$$

Damit ist dann eine Poissonklammer des MKG-Systems definiert.

Definition 2.6 (Peierlsklammer). Die Peierlsklammer zweier Funktionale $F, G \in \mathcal{F}^{(\phi, A)}$ ist durch

$$\{F, G\} := \int dx dy \left(\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}, \frac{\delta F}{\delta\phi^*(x)}, \frac{\delta F}{\delta A(x)} \right) \Delta(x, y) \left(\frac{\delta G}{\delta\phi(y)}, \frac{\delta G}{\delta\phi^*(y)}, \frac{\delta G}{\delta A(y)} \right)^t$$

definiert.

Proposition 2.7. Die Peierlsklammer des MKG-Systems ist eine Poissonklammer.

Beweis. Die \mathbb{C} -Linearität, die Derivationseigenschaft sowie die Antisymmetrie gehen wieder aus der Definition hervor. Der Nachweis der Jacobi-Identität folgt dem Nachweis der Jacobi-Identität für das reelle Skalarfeld, indem man dort die Begriffe des MKG-Systems einsetzt. \square

Wir werden im Folgenden ein vereinfachtes MKG-System betrachten. Hierbei ist $A^\mu(x)$ ein Hintergrundfeld, damit wird also nur noch nach ϕ und ϕ^* variiert. Wir

2 Klassische Feldtheorie

suchen schließlich die Greenschen Funktionen zum Differentialoperator

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \hat{d} + e\hat{w}, \\ \hat{d} &= \begin{pmatrix} 0 & -(\square + m^2) \\ -(\square + m^2) & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{w} &= \begin{pmatrix} 0 & -2iA_\mu(x)\partial^\mu - i\partial^\mu A_\mu(x) + eA_\mu(x)A^\mu(x) \\ 2iA_\mu(x)\partial^\mu + i\partial^\mu A_\mu(x) + eA_\mu(x)A^\mu(x) & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir können den Operator \hat{p} im Sinne von Integralkernen mit Hilfe der geometrischen Reihe invertieren:

$$\Delta^R = \hat{d}_{\text{ret}}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-e)^n (\hat{w} \cdot \hat{d}_{\text{ret}}^{-1})^n,$$

wobei die auftretenden Produkte und Potenzen im Sinne von matrixwertigen Integraloperatoren zu verstehen sind, und

$$\hat{d}_{\text{ret}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{m \text{ ret}} \\ \Delta_{m \text{ ret}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir führen die auftretenden Matrixprodukte aus, und erhalten

$$\begin{aligned}\Delta_{11}^R(x, y) &= 0 = \Delta_{22}^R(x, y), \\ \Delta_{12}^R(x, y) &= \Delta_{m \text{ ret}}(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} (-e)^n \int d(z_1, \dots, z_n) \\ &\quad \left\{ \Delta_{m \text{ ret}}(x, z_1) (2iA_\mu(z_1)\partial_{z_1}^\mu + i\partial^\mu A_\mu(z_1) + eA_\mu(z_1)A^\mu(z_1)) \Delta_{m \text{ ret}}(z_1, z_2) \right. \\ &\quad \left. \cdots (2iA_\mu(z_n)\partial_{z_n}^\mu + i\partial^\mu A_\mu(z_n) + eA_\mu(z_n)A^\mu(z_n)) \Delta_{m \text{ ret}}(z_n, y) \right\}, \\ \Delta_{21}^R(x, y) &= \Delta_{12}^{R*}(x, y).\end{aligned}$$

Die avancierte Greensche Funktion Δ^A erhält man, indem man im obigen Ausdruck $\Delta_{m \text{ ret}}$ durch $\Delta_{m \text{ av}}$ ersetzt. Mit Hilfe mehrfacher partieller Integration kann man sehen, dass

$$\Delta(x, y) = \Delta^R(x, y) - \Delta^A(x, y)$$

antisymmetrisch ist.

Für den Fall, dass A ein Hintergrundfeld ist, lautet die Peierlsklammer

$$\{F, G\} = \int dx dy \left(\frac{\delta F}{\delta \phi(x)}, \frac{\delta F}{\delta \phi^*(x)} \right) \Delta_S(x, y) \left(\frac{\delta G}{\delta \phi(y)}, \frac{\delta G}{\delta \phi^*(y)} \right)^t.$$

Da die Greenschen Funktionen nebendiagonale Matrizen sind, folgt

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = 0 = \{\phi^*(x), \phi^*(y)\}.$$

Außerdem erhalten wir die Poissonklammer

$$\begin{aligned} & \{\phi(x), \phi^*(y)\} = \Delta_S(x, y) \\ & = \Delta_m(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-e)^n \int d(z_1, \dots, z_n) \left\{ \Delta_{m \text{ ret}}(x, z_1) (2iA_\mu(z_1) \partial_{z_1}^\mu + i\partial^\mu A_\mu(z_1) + eA_\mu(z_1) A^\mu(z_1)) \right. \\ & \quad \cdot \Delta_{m \text{ ret}}(z_1, z_2) \cdots (2ieA_\mu(z_n) \partial_{z_n}^\mu + ie\partial^\mu A_\mu(z_n) + eA_\mu(z_n) A^\mu(z_n)) \Delta_{m \text{ ret}}(z_n, y) \\ & \quad - \Delta_{m \text{ av}}(x, z_1) (2iA_\mu(z_1) \partial_{z_1}^\mu + ie\partial^\mu A_\mu(z_1) + eA_\mu(z_1) A^\mu(z_1)) \\ & \quad \left. \cdot \Delta_{m \text{ av}}(z_1, z_2) \cdots (2ieA_\mu(z_n) \partial_{z_n}^\mu + ie\partial^\mu A_\mu(z_n) + eA_\mu(z_n) A^\mu(z_n)) \Delta_{m \text{ av}}(z_n, y) \right\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nicht, dass diese Reihe tatsächlich konvergiert. Stattdessen werden wir in Kapitel 3 eine alternative perturbative Methode angeben, der Konvergenz etabliert ist.

2.3.2 Das Maxwell-Dirac-System

Beim Maxwell-Dirac-System besteht der Phasenraum der Spinoren aus den Grassmannwertigen glatten Funktionen, also $\mathcal{C}^\psi = C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C}^4)$, mit dem Wedgeprodukt

$$f^\alpha(x) \wedge g^\beta(y) = -g^\beta(y) \wedge f^\alpha(x).$$

Für eine Definition siehe [61].

Definition 2.8 (Klassische Spinorfelder). Das *klassische Spinorfeld* $\psi(x)$ ist das Auswertungsfunktional

$$\begin{aligned} \psi(x) : \mathcal{C}^\psi &\rightarrow \mathbb{C}^4, \\ f &\mapsto \psi(x)[f] := f(x). \end{aligned}$$

Das *adjungierte Feld* $\bar{\psi}(x)$ ist das Auswertungsfunktional

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) : \mathcal{C}^\psi &\rightarrow \mathbb{C}^d, \\ f &\mapsto \bar{\psi}(x)[f] := \bar{f}(x) = f^\dagger(x) \gamma^0, \end{aligned}$$

wobei γ^0 ein Erzeuger der Matrixalgebra, mit den Antivertauschungsrelationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \eta^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3$$

ist. Wir wählen eine pseudo-hermitesche Darstellung der γ -Matrizen, d.h. es soll gelten:

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

Ableitungen auf Spinoren werden wieder an die Testfunktionen weitergeleitet

$$\left. \begin{aligned} \partial^a \psi(x)[f] &= \partial^a f(x), \\ \partial^a \bar{\psi}(x)[f] &= \partial^a \bar{f}(x), \end{aligned} \right\} a \in \mathbb{N}_0^d.$$

2 Klassische Feldtheorie

Die komplexe, polynomiale Algebra wird von

$$\{\partial^a \psi | a \in \mathbb{N}_0^d\} \cup \{\partial^a \bar{\psi} | a \in \mathbb{N}_0^d\} \cup \{\partial^a A | a \in \mathbb{N}_0^d\}$$

erzeugt, und mit $\mathcal{P}^{(\psi, A)}$ bezeichnet. Die Funktionale auf Spinorfeldern haben die gleiche Form, wie die Funktionale des MKG-Systems. Wir bezeichnen die Algebra der Funktionale mit $\mathcal{F}^{(\psi, A)}$ und die Algebra der lokalen Funktionale mit $\mathcal{F}_{\text{loc}}^{(\psi, A)}$. Im Folgenden werden wir die Funktionale auf den Feldern als Funktionale auf $\mathcal{C}^\psi \times \mathcal{C}^{\bar{\psi}} \times \mathcal{C}^A$ auffassen.

Bei der Wahl der Wirkung S stoßen wir wieder auf das gleiche Problem, wie beim MKG-System. Die Wirkung S , die invariant unter den (lokalen) Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi(x), \\ A^\mu(x) &\rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

ist, besitzt Euler-Lagrange-Gleichungen, welche keine eindeutigen (retardierten bzw. avancierten) Greenschen Funktionen haben. Wir addieren daher wieder einen eichfixierenden Term

$$S = \int dx \left\{ \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m - e\cancel{A}(x))\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu(x))^2 \right\}.$$

Die Feldgleichungen zu dieser Wirkung lauten (alle Variationen sind Links-Variationen⁴)

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \psi_\alpha(x)} &= (i\cancel{\partial} + e\cancel{A}(x) + m)_{\beta\alpha} \bar{\psi}_\beta(x), \\ \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x)} &= (i\cancel{\partial} - e\cancel{A}(x) - m)_{\dot{\alpha}\beta} \psi_\beta(x) = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta A^\mu(x)} &= \square A_\mu(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) = 0. \end{aligned}$$

Wir vereinfachen das MD-System, das Vektorpotential A soll ein äußeres Hintergrundfeld sein. Wir haben dann nur die zweiten Variationen bezüglich $\psi, \bar{\psi}$ zu betrachten

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S}{\delta \psi_\alpha(x)\delta \psi_\beta(y)} &= 0 = \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x)\delta \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(y)}, \\ \frac{\delta^2 S}{\delta \psi_\alpha(x)\delta \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(y)} &= -(i\cancel{\partial}^t + e\cancel{A}^t(x) + m)_{\alpha\dot{\beta}} \delta_y(x),^5 \\ \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x)\delta \psi_\alpha(y)} &= -(i\cancel{\partial} - e\cancel{A}(x) - m)\delta_y(x). \end{aligned}$$

Wir fassen diese in einer Matrix zur Basis $(\psi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}})$ zusammen, und suchen also die Greenschen Funktionen zum Differentialoperator

$$\begin{pmatrix} 0 & -(i\cancel{\partial}^t + e\cancel{A}^t(x) + m)_{\alpha\dot{\beta}} \\ -(i\cancel{\partial} - e\cancel{A}(x) - m)_{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

⁴zu einer kurzen Erklärung der Variation nach einer Spinor-Variablen siehe Anhang B.

⁵Der Exponent t bedeutet die Transposition einer Matrix.

Dieser ist nicht normal hyperbolisch, jedoch machen wir den Ansatz

$$G_{\pm}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & (i\cancel{\partial} + eA(x) + m)_{\beta\gamma} g_{\pm\gamma\delta}(x, y) \\ (i\cancel{\partial}^t + eA^t(x) - m)_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \bar{g}_{\pm\dot{\gamma}\dot{\delta}}(x, y) & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei haben wir die Greenschen Funktionen $g_{\pm}(x, y)$ des normal hyperbolischen Differentialoperators

$$P = \left(\square + 2ieA_{\mu}(x)\partial^{\mu} + ie\partial^{\mu}A_{\mu}(x) - e^2A_{\mu}(x)A^{\mu}(x) - m^2 \right) \cdot \mathbb{1} + e\sigma^{\mu\nu}\partial_{\mu}A_{\nu}(x)$$

und die Greenschen Funktionen \bar{g}_{\pm} des Differentialoperators

$$\bar{P} = \left(\square - ie\partial^{\mu}A_{\mu}(x) - 2ieA_{\mu}(x)\partial^{\mu} - e^2A_{\mu}(x)A^{\mu}(x) - m^2 \right) \cdot \mathbb{1} + e\sigma^{\mu\nu t}\partial_{\mu}A_{\nu}(x)$$

verwendet. Es ist $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$, und aus dem Zusammenhang $\gamma^0\sigma^{\mu\nu*}\gamma^0 = \sigma^{\mu\nu t}$ kann man die Beziehung

$$\gamma^0 P^* \gamma^0 = \bar{P}$$

zwischen den beiden Differentialoperatoren herleiten. Hieraus folgt, dass \bar{g}_{\pm} mit Hilfe von g_{\pm} vollständig bestimmt werden kann. Wir werden daher im Folgenden nur g_{\pm} berechnen.

Die Greenschen Funktionen sollen die folgenden Träger haben

$$\text{supp}(G_{\pm}) \subset \{(x, y) \in \mathbb{M} \times \mathbb{M} | x \in J^{\pm}(y)\}.$$

Wir bezeichnen G_+ als die retardierte Greensche Funktion und G_- als die avancierte Greensche Funktion.

Mit den Greenschen Funktionen definieren wir die Peierlsklammer für das MD-System

$$\{F, G\} = \int dx dy \left(\frac{\delta F}{\delta\psi(x)}, \frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}(x)} \right) \Delta(x, y) \left(\frac{\delta G}{\delta\psi(y)}, \frac{\delta G}{\delta\bar{\psi}(y)} \right)^t, \quad (2.3)$$

$$\Delta(x, y) = G_+(x, y) - G_-(x, y).$$

Proposition 2.9. *Die Peierlsklammer für das Maxwell-Dirac-System bei dem A^{μ} ein äußeres Hintergrundfeld ist, ist eine gradierte Poissonklammer. D.h. es gelten die folgenden Eigenschaften*

1. *Derivationseigenschaft:*

$$\{F \cdot G, H\} = F \cdot \{G, H\} + \{F, H\} \cdot G,$$

2. *Gradierte Symmetrie:*

$$\{F, G\} = -(-1)^{N(F)N(G)} \{G, F\},$$

wobei $N(F)$ die Anzahl der Spinor-Felder $\psi, \bar{\psi}$, die im Funktional F auftauchen, ist.

2 Klassische Feldtheorie

3. Gradierte Jacobi-Identität

$$\begin{aligned} (-1)^{N(H)N(F)} \{\{F, G\}, H\} + (-1)^{N(F)N(G)} \{\{G, H\}, F\} \\ + (-1)^{N(G)N(H)} \{\{H, F\}, G\} = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Die \mathbb{C} -Bilinearität, gradierte Symmetrie und die Derivationseigenschaft folgen aus der Definition. Die Jacobi-Identität kann man wie oben explizit nachrechnen, jedoch vereinfacht sich diese Rechnung, da die Variation von $\Delta(x, y)$ nach $\psi, \bar{\psi}$ verschwinden⁶. \square

⁶Zum Beweis siehe auch [71].

3 Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen

Wir haben bisher Greensche Funktionen nur mit Hilfe der geometrischen Reihe konstruiert, und sind den Beweis der Konvergenz dieser Entwicklung schuldig geblieben. Wir wollen daher in diesem Abschnitt eine Methode (die Parametrixkonstruktion) angeben, die zu einer exakten Lösung führt. Diese Methode besteht im Wesentlichen aus der Entwicklung der Greenschen Funktionen nach dem quadratischen geodätischen Abstand, und wurde in der Form wie wir sie verwenden von M. RIESZ [59] eingeführt. Wir orientieren uns an der Monografie [6], und sind mit diesen Methoden in der Lage die Ergebnisse aus [28] und [47] zu reproduzieren.

3.1 Rieszdistributionen im Minkowskiraum

Wir fassen die Potenzen des quadratischen geodätischen Abstandes als Distributionen auf, und verwenden die analytische Fortsetzung, um diese Distributionen für beliebige komplexe Potenzen zu erklären.

Wir bezeichnen mit γ den quadratischen, geodätischen Abstand vom Ursprung, also $\gamma(x) = x^2$, wobei $x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^{d-1})^2$ das Minkowski-Quadrat des Vektors x ist.

Definition 3.1 (Rieszdistribution). Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(\alpha) > d$ gegeben. Die Rieszdistribution $R_{\pm}(\alpha, x, y)$ ist lokal durch die folgende Abbildung gegeben

$$R_{\pm}(\alpha, x, y) := \begin{cases} -C(\alpha)\gamma(x-y)^{\frac{\alpha-d}{2}} & \text{für } x \in J^{\pm}(y), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1)$$

wobei

$$C(\alpha) := \frac{2^{1-\alpha}\pi^{\frac{2-d}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)\Gamma(\frac{\alpha+2-d}{2})}.$$

Die Definition ist so zu verstehen, dass

$$R_{\pm}(\alpha, y)[f] = \int_{J^{\pm}(y)} d^d x C(\alpha)((x-y)^2)^{\frac{\alpha-d}{2}} f(x),$$

wobei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M}, \mathbb{C})$. Wir wollen im Folgenden die Rieszdistributionen für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ konstruieren, dabei hilft uns das folgende Lemma.

3 Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen

Lemma 3.2 (Lemma 1.2.2 in [6]). *Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, mit $\operatorname{Re}(\alpha) > d$ gilt:*

1. $\gamma(x - y) \cdot R_{\pm}(\alpha, x, y) = \alpha(\alpha - 2)R_{\pm}(\alpha + 2, x, y)$,
2. $(\partial_{\mu}\gamma(x - y)) \cdot R_{\pm}(\alpha, x, y) = 2\alpha\partial_{\mu}R_{\pm}(\alpha + 2, x, y)$,
3. $\square R_{\pm}(\alpha + 2, x, y) = R_{\pm}(\alpha, x, y)$.
4. *Die Abbildung $\alpha \mapsto R_{\pm}(\alpha)$ lässt sich eindeutig zu einer holomorphen Familie von Distributionen fortsetzen. D.h. zu jedem $\alpha \in \mathbb{C}$ existiert genau eine Distribution $R_{\pm}(\alpha)$, so dass für jede Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{M})$ die Abbildung $\alpha \mapsto R_{\pm}(\alpha, y)[f]$ holomorph ist.*

Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung können wir nun die obigen Eigenschaften auch für $\operatorname{Re}(\alpha) > d - 2k$ zeigen. Da die Rieszdistributionen außer für $\alpha = d - 2k$ eine holomorphe Familie von Distributionen¹ sind, können wir diese analytisch nach $\operatorname{Re}(\alpha) \leq d - 2k$ fortsetzen.

Satz 3.3 (Proposition 1.2.4 in [6]). *Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:*

1. $\gamma(x - y) \cdot R_{\pm}(\alpha, x, y) = \alpha(\alpha - 2)R_{\pm}(\alpha + 2, x, y)$,
2. $(\operatorname{grad} \gamma)R_{\pm}(\alpha) = 2\alpha \operatorname{grad}(R_{\pm}(\alpha + 2))$,
3. $\square R_{\pm}(\alpha, x, y) = R_{\pm}(\alpha - 2, x, y)$,
4. $R_{\pm}(0, x, y) = \delta_y(x)$.

$R_{\pm}(2)$ ist also die Greensche Funktion des d'Alembert-Operators \square . Wir suchen nach den Greenschen Funktionen linearer hyperbolischer Differentialgleichungen, das sind für uns Differentialgleichungen der Form

$$Pf = -\square f + V'(\phi)f = 0,$$

wobei $V(\phi)$ ein Potential in einer Formulierung mittels Lagrangedichten ist, und ϕ ist ein beliebiges (glattes) „Hintergrundfeld“. Z.B. könnte man die φ^4 -Theorie betrachten, mit der linearisierten Feldgleichung

$$P\varphi' = \left(-\square + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\right)\varphi' = 0.$$

Wir benutzen zur Konstruktion der Greenschen Funktionen G_{\pm} die Rieszdistributionen, und setzen an:

$$G_{\pm}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_y^k(x)R_{\pm}(2 + 2k, x, y),$$

¹Zum Begriff der holomorphen Familie von Distributionen siehe [36, S. 149ff]

3.1 Rieszdistributionen im Minkowskiraum

wobei $V^k(x)$ glatte Funktionen in beiden Argumenten sind. Wir wenden den Differentialoperator P termweise an. Hierbei verwenden wir die Produktregel für den Differentialoperator ∂^μ :

$$PG_\pm(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ PV_y^k(x) \cdot R_\pm(2+2k, x, y) + 2\partial^\mu V_y^k(x) \partial_\mu R_\pm(2+2k, x, y) + V_y^k(x) \square R_\pm(2+2k, x, y) \right\}.$$

Mit den Eigenschaften für die Rieszdistributionen

$$\begin{aligned} \partial_\mu R_\pm(2+2k, x, y) &= \frac{1}{4k} \partial_\mu \gamma(x-y) \cdot R_\pm(2k, x, y), \quad k \geq 1, \\ \square R_\pm(2+2k, x, y) &= R_\pm(2k, x, y), \quad k \geq 1, \\ \square R_\pm(2, x, y) &= \delta_y^{(d)}(x), \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \delta_y^{(d)}(x) \stackrel{!}{=} PG_\pm(x, y) &= 2\partial^\mu V_y^0(x) \partial_\mu R_\pm(2, x, y) + V_y^0(x) \delta_y^{(d)}(x), \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_\pm(2k, x, y)}{2k} \left\{ 2kPV_y^{k-1}(x) + \partial^\mu V_y^k(x) \partial_\mu \gamma(x-y) + 2kV_y^k(x) \right\}. \end{aligned}$$

Damit $G_\pm(x, y)$ eine Greensche Funktion ist, muss also

$$V_y^0(x) \equiv 1,$$

und

$$\partial^\mu \gamma(x-y) \cdot \partial_\mu V_y^k(x) + 2kV_y^k(x) = -2kPV_y^{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

sein. Wir schreiben diese Differentialgleichung als eine gewöhnliche Differentialgleichung entlang der eindeutigen Geodäte von y nach x :

$$x(t) = y + \frac{t}{s}(x-y).$$

Hierbei ist s die Länge der Geodäte. Damit erhalten wir

$$2t \frac{d}{dt} V^k(x(t)) + 2kV^k(x(t)) = -2kPV^{k-1}(x(t)).$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit t^{k-1} und verwenden die Produktregel

$$\frac{d}{dt} (t^k V^k(x(t))) = -2kt^{k-1} PV^{k-1}(x(t)).$$

Die Lösung hiervon lautet

$$V^k(t) = -\frac{1}{t^k} \int_0^t dt' k t'^{k-1} PV^{k-1}(t') \quad k \geq 1.$$

3 Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen

Die Rieszdistributionen sind für $k > \frac{n-2}{2}$ stetige oder differenzierbare Funktionen, so dass es nicht unbedingt erforderlich ist alle Glieder der Reihenentwicklung zu bestimmen. Wir berechnen also $V^1, \dots, V^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ und erhalten damit eine Lösung der Gleichung

$$P(R_{\pm}(2) + V^1 R_{\pm}(4) + \dots + V^{\frac{n-1}{2}} R_{\pm}(2 + \frac{n-1}{2})) = \delta + C,$$

wobei C eine stetige Funktion ist. Wir erhalten dann durch

$$\begin{aligned} & (R_{\pm}(2) + V^1 R_{\pm}(4) + \dots + V^{\lceil \frac{d-1}{2} \rceil} R_{\pm}(2 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil)) * (\delta + C)^{-1} \\ &= (R_{\pm}(2) + V^1 R_{\pm}(4) + \dots + V^{\lceil \frac{d-1}{2} \rceil} R_{\pm}(2 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil)) * \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C^l, \end{aligned}$$

die Greensche Funktion, wobei C^l als Potenz von Integraloperatoren zu verstehen ist. Man kann zeigen (siehe [6, Chapter 2]), dass diese Reihenentwicklung in einer kleinen Umgebung tatsächlich konvergent ist, und wir damit die Greensche Funktion exakt bestimmt haben. Diese lokalen Lösungen kann man schließlich auf die gesamte Raumzeit erweitern (siehe [6, Chapter 3]).

3.2 Rieszdistributionen in einer Umgebung

Nachdem wir oben erfolgreich die Rieszdistributionen für die Konstruktion Greenscher Funktionen auf dem Minkowskiraum verwendet haben, wollen wir in diesem Abschnitt Rieszdistributionen für eine kleine Umgebung Ω in einer beliebigen d -dimensionale Raumzeit (M, g) angeben. Wir machen an Ω die weitere Einschränkung, dass zwischen Punkten $x, y \in \Omega$ stets eine eindeutige Geodäte existiert. Die Exponentialabbildung $\exp : TM \rightarrow M$ ist in dieser Umgebung dann invertierbar.

Sei $\Omega \subset M$ eine Offene Menge, die geodätisch sternförmig bezüglich des Punktes $y \in \Omega$ ist². Sei

$$\mu_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

die Abbildung $\mu_y := \det(d \exp_y) \circ \exp_y^{-1}$, dann ist die *Rieszdistribution auf der Umgebung Ω*

$$R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y) := \mu_y \cdot \exp_y^* R_{\pm}(\alpha, y),$$

mit der Rieszdistribution auf dem Minkowskiraum $R_{\pm}(\alpha, y)$. Die R_{\pm}^{Ω} sind wieder bestimmte Potenzen des quadratischen geodätischen Abstandes

$$\Gamma_y = \gamma \circ \exp_y^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei γ der quadratische geodätische Abstand auf dem Minkowskiraum $T_y M$ ist. Die Rieszdistributionen $R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y)$ erfüllen ähnliche Eigenschaften, wie die Rieszdistribution auf dem Minkowskiraum.

²Die Teilmenge $\Omega \subset M$ ist *geodätisch sternförmig* bezüglich des Punktes $y \in \Omega$, falls für jeden Punkt $x \in \Omega$ eine eindeutige Geodäte existiert, die x und y verbindet.

Satz 3.4 (Proposition 1.4.2 in [6]). *Für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $y \in \Omega$ gilt*

1. $\Gamma_y \cdot R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y) = \alpha(\alpha - d + 2)R_{\pm}^{\Omega}(\alpha + 2, y)$,
2. $\text{grad}(\Gamma_y) \cdot R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y) = 2\alpha \text{grad} R_{\pm}^{\Omega}(\alpha + 2, y)$,
3. für $\alpha \neq 0$ ist

$$\square R_{\pm}^{\Omega}(\alpha + 2, y) = \left(\frac{\Gamma_y - 2d}{2\alpha} + 1 \right) R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y),$$

4. $R_{\pm}^{\Omega}(0, y) = \delta_y$.

3.3 Parametrizes des Maxwell-Klein-Gordon-Systems

Wir wollen in diesem Abschnitt auch die Greenschen Funktionen zur zweiten Variation der Wirkung im Maxwell-Klein-Gordon-System finden. Hierzu werden wir die Rieszdistributionen aus dem vorigen Abschnitt verwenden.

3.3.1 Parametrixkonstruktion für das MKG-System im Minkowskiraum

Bei der Konstruktion der Greenschen Funktion verwenden wir das gleiche Schema wie oben, müssen jedoch beachten, dass der Operator \hat{p} aus 2.3.1 auch Ableitungen erster Ordnung enthält. Der Differentialoperator \hat{p} ist

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & -P^* \\ -P & 0 \end{pmatrix},$$

mit

$$P = \square + m^2 - 2ieA_{\mu}(x)\partial^{\mu} - ie\partial^{\mu}A_{\mu}(x) - e^2A_{\mu}(x)A^{\mu}(x).$$

Die Greenschen Funktionen zu $-\hat{p}$ haben die Form

$$G_{\pm}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & g_{\pm}(x, y) \\ g_{\pm}^*(x, y) & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $g_{\pm}(x, y)$ die Greenschen Funktionen zu P sind. Für $g_{\pm}(x, y)$ machen wir den Ansatz

$$g_{\pm}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} R_{\pm}(2 + 2k, x, y)V_y^k(x),$$

mit $V_y^k(x) \in C^{\infty}(\mathbb{M}, \mathbb{C})$. Wenn wir die Schritte die zu den Transportgleichungen des reellen, skalaren Feldes geführt haben wiederholen, erhalten wir die folgenden Transportgleichungen

$$\begin{aligned} 2\partial^{\mu}R_{\pm}(2, x, y)\partial_{\mu}V_y^0(x) - 2ieA_{\mu}(x)\partial^{\mu}R_{\pm}(2, x, y) \cdot V_y^0(x) &= 0, \\ (2k - ieA_{\mu}(x)\partial^{\mu}\gamma(x - y))V_y^k(x) + \partial^{\mu}\gamma(x - y)\partial_{\mu}V_y^k(x) &= -2kPV_y^{k-1}(x), \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

3 Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} V_y^0(y) &= 1, \\ V_y^k(y) &= 0, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Die Rieszdistributionen für $\alpha < d$ wurden nicht explizit, sondern mittels analytischer Fortsetzung konstruiert. Daher ist die Transportgleichung für V_y^0 folgendermaßen zu verstehen

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} \left[2\partial^\mu R_\pm(\alpha, x, y) \partial_\mu V_y^0(x) - 2ieA_\mu(x) \partial^\mu R_\pm(\alpha, x, y) \cdot V_y^0(x) \right] = 0.$$

Diese Gleichung formen wir mit der Eigenschaft

$$\partial_\mu R_\pm(\alpha, x, y) = \frac{1}{2(\alpha - 2)} R_\pm(\alpha - 2, x, y)$$

um:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2} \frac{R_\pm(\alpha - 2, x, y)}{\alpha - 2} \left[\partial^\mu \gamma(x - y) \partial_\mu V_y^0(x) - ieA_\mu(x) \partial^\mu \gamma(x - y) \cdot V_y^0(x) \right] = 0.$$

Damit diese Beziehung erfüllt ist, muss

$$\partial^\mu \gamma(x - y) \partial_\mu V_y^0(x) - ieA_\mu(x) \partial^\mu \gamma(x - y) \cdot V_y^0(x) = 0$$

sein. Wir schreiben diese Differentialgleichung als eine gewöhnliche Differentialgleichung entlang der eindeutigen, kausalen Geodäte $x(t) = y + \frac{t}{s}(x - y)$, wobei s die Länge dieser Geodäte ist. Dabei benutzen wir

$$2t \frac{d}{dt} = \partial^\mu \gamma(x - y) \partial_\mu,$$

und erhalten

$$2t \frac{d}{dt} V_y^0(x(t)) - 2ieA_\mu(x(t))(x(t) - y)^\mu = 0.$$

Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} V_y^0(x) &= \exp\left(ie \int_0^s dt \frac{1}{t} A_\mu(x(t))(x(t) - y)^\mu\right) \\ &= e^{ie \int_y^x A}. \end{aligned}$$

Diese Lösung ist nicht nur entlang der Geodäte differenzierbar, sondern auch in einer kleinen Umgebung um diese. V^0 existiert also auch in einer Umgebung um die Geodäte. Die gleichen Methoden wenden wir an, um die Transportgleichungen für $k \geq 1$ umzuformen. Entlang der eindeutigen, kausalen Geodäte von y nach x haben wir

$$(2k - 2ieA_\mu(x(t))(x(t) - y)^\mu) V_y^k(x(t)) + 2t \frac{d}{dt} V_y^k(x(t)) = -2kPV_y^{k-1}(x(t)).$$

3.3 Parametrizes des Maxwell-Klein-Gordon-Systems

Diese Gleichung multiplizieren wir mit t^{k-1} , verwenden die Produktregel, und erhalten

$$\frac{d}{dt}(t^k V_y^k(x(t))) - ie A_\mu(x(t))(x(t) - y)^\mu t^{k-1} V_y^k(x(t)) = -kt^{k-1} P V_y^{k-1}(x(t)).$$

Das ist eine inhomogenen, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, und kann mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden. Die Lösung lautet

$$V_y^k(x) = -\frac{V_y^0(x)}{s^k} \int_0^s dt \frac{kt^{k-1}}{V_y^0(x(t))} P V_y^{k-1}(x(t)),$$

mit $s = \sqrt{(x-y)^2}$.

Wir können damit wieder eine exakte Lösung konstruieren. Dazu rechnen wir die Koeffizienten $V^0, \dots, V^{\lceil \frac{d-2}{2} \rceil}$ aus, und erhalten schließlich eine konvergente Reihenentwicklung für die Greenschen Funktionen

$$\sum_{k=0}^{\lceil \frac{d-2}{2} \rceil} (R_\pm(2+2k)V^k) * (1+C)^{-1}. \quad (3.2)$$

C ist hierbei, jene stetige Funktion, für die

$$\hat{p} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{d-2}{2} \rceil} R_\pm(2+2k)V^k = 1 + C.$$

Wenn wir den Beweisen aus [6, Chapter 2] folgen, können wir zeigen, dass (3.2) eine konvergente Reihenentwicklung darstellt.

Wie wir sehen ist die Greensche Funktion eine hermitesche Matrixfunktion, $G_\pm^\dagger = G_\pm$. Wir schreiben für die Kommutatorfunktion auch

$$\Delta_S = G_+ - G_- = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix},$$

mit

$$\Delta(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} R_+(2+2k, x, y)V^k(x, y) - \sum_{k=0}^{\infty} R_-(2+2k, x, y)V^k(x, y). \quad (3.3)$$

Der erste Term dieser Entwicklung ist die freie Kommutatorfunktion

$$\Delta_0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d^{d-1}\mathbf{k}}{2i\omega(\mathbf{k})} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) \Big|_{k^0=\omega(\mathbf{k})}, \quad (3.4)$$

mit $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 - m^2}$. Ähnlich wie diese ist Δ eine distributionelle Lösung einer Feldgleichungen.

3 Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen

Proposition 3.5. *Die oben definierte Distribution $\Delta(x, y)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung*

$$[\square - 2ieA_\mu(x)\partial^\mu - ie\partial^\mu A_\mu(x) - e^2 A_\mu(x)A^\mu(x) + m^2]\Delta(x, y) = 0,$$

im Sinne von Distributionen, mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned}\Delta(t, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) &= 0, \\ \dot{\Delta}(t, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) &= \delta_{\mathbf{y}}^{(d-1)}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Beweis. Da $\Delta_S(x, y)$ die Differenz zweier Greenscher Funktionen zum Differentialoperator \hat{p} ist, löst diese die Feldgleichungen.

Für Δ haben wir

$$\Delta(x, y) = \Delta_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(R_+(2+2k, x, y) - R_-(2+2k, x, y) \right) V_y^k(x). \quad (3.5)$$

Die Kommutatorfunktion $\Delta_0(x, y)$ hat die Anfangswerte

$$\begin{aligned}\Delta_0(t, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) &= 0, \\ \dot{\Delta}_0(t, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) &= \delta_{\mathbf{y}}^{(d-1)}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Für $\alpha > d$ sind die Rieszdistributionen $R_\pm(\alpha, x, y)$ Funktionen mit kausalem Träger, die für $x = y$ verschwinden. Für $4 \leq \alpha \leq d$ haben die Rieszdistributionen ebenfalls kausalen Träger und für zusammenfallende Punkte sind $R_+(\alpha)$ und $R_-(\alpha)$ gleich

$$\lim_{x \rightarrow y} \left(R_+(\alpha, x, y) - R_-(\alpha, x, y) \right) = 0, \quad 4 \leq \alpha \leq d.$$

Da $\Delta_0(x, y)$ ebenfalls kausalen Träger hat, ist

$$\Delta(t, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 0.$$

Die Ableitung von $\Delta(x, y)$ nach x^0 ist

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}(x, y) &= \dot{\Delta}_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} [\dot{R}_+(2+2k, x, y) - \dot{R}_-(2+2k, x, y)] V_y^k(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} [R_+(2+2k, x, y) - R_-(2+2k, x, y)] \dot{V}_y^k(x).\end{aligned}$$

Wegen der oben genannten Eigenschaften des Trägers und des Verhaltens für $x = y$, verschwindet der letzte Summand für $x^0 = y^0$. Aus den oben angegebenen Eigenschaften der Rieszdistributionen haben wir

$$\partial_0 R_\pm(\alpha, x, y) = \frac{1}{\alpha} (x - y)_0 R_\pm(\alpha - 2, x, y).$$

3.3 Parametrisierung des Maxwell-Klein-Gordon-Systems

Daher verschwindet ebenfalls der zweite Summand für raumartig getrennte x, y und für $x = y$. Es bleibt schließlich

$$\dot{\Delta}(x, y) = \dot{\Delta}_0(x, y) = \delta_{\mathbf{y}}^{(d-1)}(\mathbf{x}).$$

□

Wir können diese Eigenschaft von Δ auch auf beliebige Cauchyflächen W_y , mit $y \in W$ ausdehnen.

Proposition 3.6. *Die Distribution $\Delta(x, y)$ ist Lösung der Feldgleichungen mit den Cauchydaten*

$$\left. \begin{aligned} \Delta(x, y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(x, y) &= \delta_y^{W_y}(x), \end{aligned} \right\} x \in W_y,$$

wobei $\delta_y^{W_y}(x)$ die Delta-Distribution der Hyperfläche W_y ist.

Beweis. Das Verschwinden der Kommutatorfunktion für W_y folgt wieder aus der Kausalität von Δ . Sei $x \in W_y$, dann gibt es eine Lorentz-Transformation Λ , so dass $(\Lambda x)^0 = y^0$, außerdem ist die Kommutatorfunktion invariant unter Lorentz-Transformationen (die Rieszdistributionen hängen nur von $(x-y)^2$ ab, und die Transportkoeffizienten sind Lösungen einer Lorentz-invarianten Differentialgleichung), und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(\Lambda x, y) = \frac{\partial(\Lambda x)^\mu}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial(\Lambda x)^\mu} \Delta(\Lambda x, y) \\ &= \Lambda^\mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta \right) (\Lambda x, y) = \Lambda^\mu_0 \delta_{\mathbf{y}}^{(d-1)}(\Lambda \mathbf{x}), \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\partial_{x_i} \Delta(x, y) = 0$ für raumartig getrennte x, y , und dass $\Lambda^0_0 = 1$. □

3.3.2 Parametrixkonstruktion für das MKG-System in einer Umgebung in einer Raumzeit

Den bisher beschriebenen Zugang können wir auch für die Konstruktion Greenscher Funktionen in einer Umgebung $\Omega \subset M$ auf einer Raumzeit M verwenden. Hierzu setzen wir für die Greenschen Funktionen

$$G_\pm(y) = \sum_{k=0}^{\infty} R_\pm^\Omega(y) V_y^k$$

an. Die Koeffizienten sind glatte Schnitte $V_y^k \in C^\infty(M, \mathbb{C})$. Aus der Bedingung

$$PG_\pm(y) = \delta_y$$

3 Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen

leiten wir wieder Differentialgleichungen für die Transportkoeffizienten V_y^k her. Dabei verwenden wir die Produktregel

$$\square(f \cdot g) = (\square f) \cdot g + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle + f \cdot \square g$$

für den d'Alembert-Operator \square auf M und die Eigenschaften der Rieszdistributionen

$$\begin{aligned} \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(2+2k, y) &= \frac{1}{4k} \text{grad } \Gamma_y \cdot R_{\pm}^{\Omega}(2k, y), \\ \square R_{\pm}^{\Omega}(2+2k, y) &= \left(\frac{\square \Gamma_y - 2k}{4k} + 1 \right) R_{\pm}^{\Omega}(2k, y), \\ \square R_{\pm}^{\Omega}(2, y) &= \delta_y. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich³

$$\begin{aligned} \delta_y &= R_{\pm}^{\Omega}(0, y) \\ &= V_y^0 \delta_y + 2\langle \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(2, y), \text{grad } V_y^0 \rangle - 2ie\langle A, \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(2, y) \rangle V_y^0 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ V_y^k \left(\frac{\square \Gamma_y - 2d}{4k} + 1 \right) R_{\pm}^{\Omega}(2k, y) + \frac{2}{4k} \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } V_y^k \rangle R_{\pm}^{\Omega}(2k, y) \right. \\ &\quad \left. - 2ie\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle R_{\pm}^{\Omega}(2k, y) V_y^k + R_{\pm}^{\Omega}(2k, y) P V_y^{k-1} \right\}, \end{aligned}$$

woraus die Transportgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= V_y^0 \square R_{\pm}^{\Omega}(2, y) - R_{\pm}^{\Omega}(2, y) + 2\langle \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(2, y), \text{grad } V_y^0 \rangle - 2ie\langle A, \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(2, y) \rangle V_y^0, \\ 0 &= \frac{\square \Gamma_y - 2d + 4k}{2} V_y^k + \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } V_y^k \rangle - ie\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle V_y^k + 2k P V_y^{k-1} \end{aligned}$$

folgen. Wir betrachten, was die zweite Transportgleichung für $k=0$ bedeuten würde. Dafür multiplizieren wir diese mit $R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y)$

$$\begin{aligned} &\frac{\square \Gamma_y - 2d}{2} V_y^0 R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y) + \langle R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y), \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } v_y^0 \rangle - ie\langle A, R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y), \text{grad } \Gamma_y \rangle V_y^0 = 0, \\ \Rightarrow &\alpha(\square R_{\pm}^{\Omega}(\alpha+2, y) - R_{\pm}^{\Omega}(\alpha, y)) V_y^0 + 2\alpha \langle \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(\alpha+2, y), \text{grad } V_y^0 \rangle \\ &\quad - 2ie\alpha \langle A, \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(\alpha+2, y) \rangle V_y^0 = 0. \end{aligned}$$

Im Limes $\alpha \rightarrow 0$ erhalten wir daraus

$$(\square R_{\pm}^{\Omega}(2, y) - R_{\pm}^{\Omega}(0, y)) V_y^0 + 2\langle \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(2, y), \text{grad } V_y^0 \rangle - 2ie\langle A, \text{grad } R_{\pm}^{\Omega}(2, y) \rangle V_y^0 = 0.$$

Diese ist also die erste Transportgleichung, falls

$$V_y^0(y) = 1.$$

³Wir schreiben die Kontraktion zweier Vektorfelder mittels der Metrik auch als $\langle \cdot, \cdot \rangle$; siehe auch A.

3.3 Parametrizes des Maxwell-Klein-Gordon-Systems

Wir wollen an V_y^0 diese Anfangsbedingung stellen. Die übrigen Transportkoeffizienten erfüllen die Anfangsbedingung $V_y^k(y) = 0$.

Zusammenfassend suchen wir also die Lösungen des rekursiven Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{\square\Gamma_y - 2d + 4k}{2}V_y^k + \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } v_y^k \rangle - ie\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle V_y^k + 2kPV_y^{k-1} = 0, \quad k \geq 0,$$

mit den Anfangsbedingungen $V_y^0(y) = 1$, $V_y^l(y) = 0$ für $l \geq 1$.

Die generelle Idee zur Lösung besteht wieder darin mit der Produktregel die ersten beiden Terme zusammenzufassen, und schließlich diese Gleichung entlang einer Geodäte zu lösen. Dazu formen wir die obige Gleichung mit Hilfe der Identität

$$\square\Gamma_y - 2d = \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } \log \sqrt{|\det g|} \rangle$$

um:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\square\Gamma_y - 2d}{2}V_y^0 + \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } V_y^0 \rangle - ieV_y^0\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{|\det g|}} \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } \sqrt[4]{|\det g|} \rangle V_y^0 + \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } V_y^0 \rangle - ieV_y^0\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Produktregel für grad folgt dann

$$0 = \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } (\sqrt[4]{|\det g|}V_y^0) \rangle - ie\sqrt[4]{|\det g|}V_y^0\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle.$$

grad Γ_y ist der Tangentialvektor an die eindeutige Geodäte, die von y nach x geht. Es gilt die Beziehung

$$\langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } f \rangle = 2s \frac{d}{ds} f$$

entlang der Geodäte. Die Differentialgleichung entlang dieser Geodäte ist dann

$$2s \frac{d}{ds} (\sqrt[4]{|\det g|}V_y^0) - ie\sqrt[4]{|\det g|}V_y^0\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle = 0.$$

Die Lösung der ersten Transportgleichung lautet

$$V_y^0 = \sqrt[4]{\frac{|\det g(y)|}{|\det g(x)|}} \exp\left(\frac{ie}{2} \int_0^s ds' \frac{1}{s'} \langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle\right).$$

Wir formen die Gleichung für $k \geq 1$ nach den selben Rechenregeln wie oben um:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\square\Gamma_y - 2d + 4k}{2}V_y^k + \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } V_y^k \rangle - ie\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle V_y^k + 2kPV_y^{k-1} \\ &= (\langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } \log \sqrt[4]{|\det g|} \rangle + 2k)V_y^k + \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } V_y^k \rangle - ie\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle V_y^k \\ &\quad + 2kPV_y^{k-1} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{|\det g|}} \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } \sqrt[4]{|\det g|} \rangle + 2k \right) V_y^k + \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } V_y^k \rangle \\ &\quad - ie\langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle V_y^k + 2kPV_y^{k-1}. \end{aligned}$$

3 Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen

Wir multiplizieren mit $\sqrt[4]{\det g}$, verwenden die Produktregel, und betrachten dann diese Differentialgleichung entlang der eindeutigen Geodäte, die y und x verbindet

$$\begin{aligned}
0 &= (\langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } \sqrt[4]{|\det g|} \rangle + 2k \sqrt[4]{|\det g|}) V_y^k + \sqrt[4]{|\det g|} \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } V_y^k \rangle \\
&\quad - ie \sqrt[4]{|\det g|} \langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle V_y^k + 2k \sqrt[4]{|\det g|} P V_y^{k-1} \\
&= \langle \text{grad } \Gamma_y, \text{grad } (\sqrt[4]{|\det g|} V_y^k) \rangle + 2k \sqrt[4]{|\det g|} - ie \sqrt[4]{|\det g|} V_y^k \langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle \\
&\quad + 2k \sqrt[4]{|\det g|} P V_y^{k-1} \\
&= 2s \frac{d}{ds} (\sqrt[4]{|\det g|} V_y^k) - ie \sqrt[4]{|\det g|} \langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle + 2k \sqrt[4]{|\det g|} P V_y^{k-1}.
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit s^{k-1} , und verwenden die Produktregel, dann folgt

$$\frac{d}{ds} (s^k \sqrt[4]{|\det g|} V_y^k) - \frac{ie}{2} s^{k-1} \sqrt[4]{|\det g|} V_y^k \langle A, \text{grad } \Gamma_y \rangle + k s^{k-1} \sqrt[4]{|\det g|} P V_y^{k-1} = 0.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung lösen wir mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten. Wir erhalten

$$V_y^k = -\frac{k}{s^k} V_y^0(x) \int_0^s ds' \frac{s'^{k-1}}{V_y^0(x(s'))} P V_y^{k-1}(x(s')). \quad (3.6)$$

Wie wir sehen besteht die maßgebliche Veränderung zum Minkowskiraum darin, dass der Koeffizient V^0 sich ändert.

Mit der perturbativen Lösung können wir wieder eine exakte Lösung konstruieren:

$$\sum_{k=0}^{\lceil \frac{d-2}{2} \rceil} (R_{\pm}(2+2k)V^k) * (1+C)^{-1},$$

wobei die Faltung in der Variablen y erfolgt, und C jener stetiger Schnitt ist, für den

$$\hat{p} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{d-2}{2} \rceil} V^k = 1 + C.$$

Wir definieren die Kommutatorfunktion lokal als

$$\Delta^{\Omega}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (R_+^{\Omega}(2+2k, y) - R_-^{\Omega}(2+2k, y)) V_y^k$$

Diese können wir verwenden, um die Lösungen der Feldgleichungen mit Anfangsbedingungen auf der Cauchyfläche W_y , mit $y \in W_y$, anzugeben.

Proposition 3.7. *Die oben definierte Kommutatorfunktion Δ^{Ω} erfüllt im Sinne von Distributionen die Differentialgleichung*

$$[\square_M - 2ieA_{\mu}(x)\partial^{\mu} - ie\partial^{\mu}A_{\mu}(x) - e^2A_{\mu}(x)A^{\mu}(x) + m^2]\Delta(x, y) = 0,$$

3.4 Parametrizes des Maxwell-Dirac-Systems im Minkowskiraum

mit den Anfangsbedingungen

$$\Delta^\Omega(y)|_{W_y} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta^\Omega(y)|_{W_y} = \delta_y^{W_y}. \quad (3.8)$$

Dabei ist \square_M der d'Alembert-Operator auf der Mannigfaltigkeit M .

Beweis. $\Delta^\Omega(y)$ ist eine Lösung der Feldgleichung, da diese die Differenz zweier Greenscher Funktionen ist.

Aus der Kausalität der Rieszdistributionen folgt schließlich (3.7). \square

3.4 Parametrizes des Maxwell-Dirac-Systems im Minkowskiraum

Nachdem wir erfolgreich die Poissonklammern des Maxwell-Klein-Gordon-Systems bestimmt haben, wenden wir uns dem Maxwell-Dirac-System zu. Wir hatten oben bereits eine bestimmte Form für die Greenschen Funktionen G_\pm angegeben, und hatten G_\pm durch g_\pm ausgedrückt. Für die Greenschen Funktionen $g_\pm(x, y)$ machen wir den Ansatz

$$g_\pm(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} R_\pm(2 + 2k, x, y) V^k(x, y),$$

wobei $V^k(x, y) \in C^\infty(\mathbb{M} \times \mathbb{M}, \text{Mat}(4, \mathbb{C}))$. Die Matrixindizes der V^k wirken dabei auf Spinoren, und wir schreiben daher für die Komponente von V^k auch $V_{\alpha\beta}^k$. Aus der Forderung, dass $g_\pm(x, y)$ eine Greensche Funktion ist, folgen wieder Differentialgleichungen für die Transportkoeffizienten V^k :

$$\begin{aligned} 2\partial_\mu R_\pm(2, x, y) \partial^\mu V^0(x, y) - 2ieA_\mu(x) \partial^\mu R_\pm(2, x, y) &= 0, \\ (2k - ieA_\mu(x) \partial^\mu \gamma(x - y)) V^k(x, y) + 2\partial_\mu \gamma(x - y) \partial^\mu V^k(x, y) + PV^{k-1}(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} V^0(y, y) &= \mathbb{1}, \\ V^k(y, y) &= 0 \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Wir formen die Gleichung für V^0 in der selben Weise um, wie die Gleichung für V^0 im Maxwell-Klein-Gordon-System. Dann haben wir für V^0 die folgende Differentialgleichung

$$\partial_\mu \gamma(x - y) \partial^\mu V^0(x, y) - ieA_\mu(x) \partial^\mu \gamma(x - y) V^0(x, y) = 0.$$

Diese formen wir wieder mit den oben genannten Rechenregeln in eine Differentialgleichung entlang der Geodäte um, wir erhalten eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung

$$V^0(x, y) = \exp\left(ie \int_0^t dt' A_\mu(x(t')) \frac{1}{t} (x - y)^\mu\right) \cdot \mathbb{1}$$

3 Parametrixkonstruktion Greenscher Funktionen

ist. Die $\mathbb{1}$ wirkt auf Spinorindizes. Für die höheren Ordnungen erhalten wir

$$V^k(x, y) = \exp\left(ie \int_0^t dt' t'^{k-1} A_\mu(x(t'))(x(t') - y)\right) \\ \times \int_0^t dt' \frac{1}{t'^k} \frac{1}{2} P V^{k-1}(x(t'), y) \exp\left(-ie \int_0^{t'} dt'' t''^{k-1} A_\mu(x(t''))(x(t'') - y)\right).$$

Diese Transportkoeffizienten sehen aus, wie die aus dem vorigen Abschnitt, aber durch den Term $\sigma^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$ in P werden verschiedene Spinorindizes gemischt.

Wir Schreiben für die Kommutatorfunktion

$$G_+(x, y) - G_-(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & S(x, y) \\ S(x, y) & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$S(x, y) = S_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} (R_+(2 + 2k, x, y) - R_-(2 + 2k, x, y)) V_y^k(x).$$

Dabei ist die unterste Ordnung durch die Distribution

$$S_0(x, y) = (-i\partial + eA(x) - m)\Delta_0(x, y)$$

gegeben ist. Die Kommutatorfunktion S hat folgende Eigenschaft

Proposition 3.8. $S(x, y)$ ist eine distributionelle Lösung der Feldgleichungen mit der Anfangsbedingung

$$S(t, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = -i\gamma^0 \delta_{\mathbf{y}}^{(d-1)}(\mathbf{x}).$$

Beweis. Aus der Integraldarstellung der Kommutatorfunktion der freien Theorie (3.4) kann man

$$\partial_{x^i} \Delta_0(x, y) = 0$$

schließen. Dann folgt

$$(-i\partial + eA(x) - m)\Delta_0(t, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = -i\gamma^0 \partial_{x^0} \Delta_0(t, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = -i\gamma^0 \delta_{\mathbf{y}}^{(d-1)}(\mathbf{x}).$$

Die Beiträge höherer Ordnung verschwinden, da die Rieszdistributionen kausalen Träger haben, und im Koinzidenzlimites $x \rightarrow y$ $R_- = R_+$ ist. \square

Diese Eigenschaft gilt nicht nur für die spezielle Cauchyfläche $\{x \in \mathbb{M} | x^0 = 0\}$.

Proposition 3.9. Sei W_y eine Cauchyfläche, mit $y \in W_y$. Dann ist $S(x, y)$ eine distributionelle Lösung der Feldgleichungen, mit der Anfangsbedingung

$$S(x, y) = \delta_y^{W_y}(x) \quad x \in W_y.$$

4 Konstruktion von Eichbrücken in der klassischen Feldtheorie

Oben haben wir die Poissonalgebra der klassischen Felder $\phi, \phi^*, \psi, \bar{\psi}, A$ angegeben. Wir wollen nun das Problem des Ladungsoperators in der Quantenfeldtheorie erläutern, welches die Einführung nicht lokaler Feldoperatoren motiviert. Die Felder der Quantenfeldtheorie sind operatorwertige Distributionen

$$\phi : C_0^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C}) \rightarrow L(\mathcal{H}),$$

wobei \mathcal{H} ein Hilbertraum ist. Außerdem ist für jedes $f \in C_0^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C})$ $\phi(f)$ ein in \mathcal{H} dicht definierter Operator.

Die Felder erfüllen die Feldgleichungen

$$e j_\mu = \partial^\nu F_{\nu\mu}$$

als Operatorgleichungen. Wir definieren den Ladungsoperator Q als Integral über die Ladungsdichte j^0 . Da diese jedoch eine Distribution ist, müssen wir j^0 mit einer speziellen Testfunktion verschmieren: $f_R \in C_0^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C})$, $g_R \in C_0^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C})$,

$$f_R(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathbf{x}| < R, \\ 0 & \text{für } |\mathbf{x}| \geq R + \varepsilon, \end{cases}$$

$$g_R(x^0) = 0 \text{ für } |x^0| \geq R, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 g_R(x^0) = 1.$$

Damit ist der Ladungsoperator in der Kugel mit Radius R definiert, $Q_R := j(g_R \cdot f_R)$.

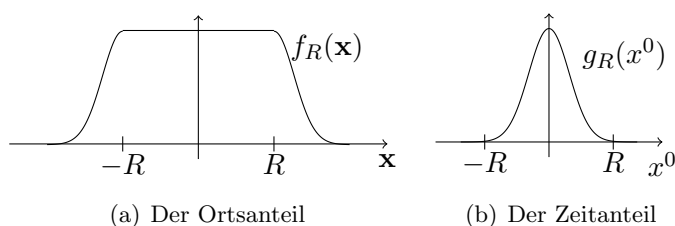


Abbildung 4.1: Verlauf der Testfunktion $f_R \cdot g_R$ in raumartiger und zeitartiger Richtung.

4 Konstruktion von Eichbrücken in der klassischen Feldtheorie

Wenn wir annehmen, dass die Maxwellgleichung

$$j^0 = \partial^i E_i$$

erfüllt ist, dann ist die Ladung

$$\begin{aligned} Q &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int d^4x \partial^i E_i(x) g_R(x^0) f_R(\mathbf{x}) \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int d^4x g_R(x^0) E_i(x) \partial^i f_R(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Wir nehmen an, die geladenen Zustände werden von den lokalen Feldoperatoren erzeugt, die Ein-Elektronenzustände seien also

$$\psi\Omega.$$

Die Ladung dieses Zustands ist dann

$$\begin{aligned} Q\psi(x)\Omega &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int d^4y g_R(y^0) \partial^i f_R(\mathbf{y}) E_i(\mathbf{y}) \psi(x)\Omega \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int d^4y g_R(y^0) \partial^i f_R(\mathbf{y}) \psi(x) E_i(y)\Omega \\ &= \psi(x)Q\Omega. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\partial^i f_R(\mathbf{x})$ die Form wie in Abb. 4.2 hat, und dass die Felder für raumartig getrennte Punkte kommutieren. Die Zustände, die von den lokalen Feldoperatoren erzeugt werden, sind also Eigenvektoren der Ladung Q mit dem gleichen Eigenwert wie der Vakuumvektor Ω . Wie können so also keineswegs geladene Zustände beschreiben.

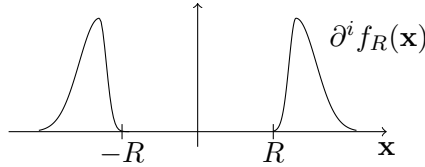


Abbildung 4.2: Die Ableitung des Ortsanteils der Testfunktion.

Wir unternehmen hier einen anderen Zugang, und betrachten Ausdrücke der Form

$$\bar{\psi}(x) e^{ie \int_{\gamma} A} \psi(y),$$

wobei γ ein raumartiger Weg von y nach x ist. Solche Objekte wurden bereits von S. MANDELSTAM [46] untersucht. Diese Eichbrücken sind in dem Sinne nicht-lokal, als dass sie auch von einem Weg γ abhängen. Außerdem sind die Eichbrücken eichinvariant. Es stellt sich die Frage, wie man mit quadratischen Ausdrücken geladene Zustände beschreiben kann. Aber eine Messung findet nur in einem kleinen Volumen

statt, so dass wir den Punkt y sehr weit weg verschieben und dessen Einfluss beim Experiment vernachlässigen können.

Wir formen den obigen Ausdruck etwas um

$$B(x, y) = \bar{\psi}(x) e^{ie \int dz f^\mu(z; x, y) A_\mu(z)} \psi(y), \quad (4.1)$$

wobei $f^\mu(z; x, y)$ Distributionen mit $\text{singsupp}(f^\mu) = \{x, y\}$ und

$$\partial_\mu^z f^\mu(z; x, y) = \delta_y^{(4)}(z) - \delta_x^{(4)}(z)$$

sind. Diese Form der Eichbrücken wurde schon von P. A. M. DIRAC [20] vorgeschlagen. Beispiele für die Distributionen f^μ sind die Greensche Funktion

$$\begin{aligned} f^0(z; x, y) &= 0, \\ f^i(z; x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{z} - \mathbf{y}}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^3} \delta_{y^0}(z^0) - \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{z} - \mathbf{x}}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|^3} \delta_{x^0}(z^0), \end{aligned}$$

welche die Felder in der Coulomb-Eichung $\nabla \mathbf{A} = 0$ hervorbringt, oder

$$\begin{aligned} f^{0,1,2}(z; x, y) &= 0, \\ f^3(z; x, y) &= \delta_{y^0}(z^0) \delta_{y^1}(z^1) \delta_{y^2}(z^2) \theta(z^3 - y^3) - \delta_{x^0}(z^0) \delta_{x^1}(z^1) \delta_{x^2}(z^2) \theta(z^3 - x^3) \end{aligned}$$

welche den „string-like localized fields“ von S. MANDELSTAM [46] entspricht. Eine weitere Möglichkeit ist der direkte Verbindungsweg

$$f^\mu(z; x, y) = \int_0^1 d\lambda (x - y)^\mu \delta_{\lambda y + (1-\lambda)x}^{(4)}(z).$$

Wir folgen nun O. STEINMANN (siehe [64, 66]) und konstruieren Eichbrücken, indem wir aus den Feldgleichungen für die lokalen klassischen Felder

$$\begin{aligned} (i\cancel{\partial} - e\cancel{A}(x))\psi(x) &= 0, \\ \bar{\psi}(x)(i\overleftarrow{\cancel{\partial}} + e\cancel{A}) &= 0, \\ \square A_\mu(x) &= e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \end{aligned}$$

Feldgleichungen für die klassischen Eichbrücken herleiten. Sodann wollen wir diese Gleichungen (perturbativ) lösen. Die Feldgleichung lautet

$$i\cancel{\partial}_{\beta\sigma}^x B_{\alpha\sigma}(x, y) = e\bar{\psi}_\alpha(x)\gamma_{\beta\sigma} \left[- \int d^4z \partial_\mu^x f^\nu(z; x, y) A_\nu(z) + A_\mu(x) \right] B_{\alpha\sigma}(x, y).$$

Da die Greensche Funktion $(i\cancel{\partial})^{-1}$ nicht-kompakten Träger hat, ist es unwahrscheinlich, dass die perturbative Lösung wieder in die Form (4.1) gebracht werden kann. Wir werden im Folgenden einen anderen Zugang untersuchen.

4.1 Eichbrücken als Poissonklammern: Das Maxwell-Klein-Gordon-System

In diesem Abschnitt wollen wir die Eichbrücken als Poissonklammern quadratischer Terme konstruieren. Wir haben nach den Rechenregeln für die Poissonklammern im Maxwell-Klein-Gordon-System

$$\{\phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y)\} = \phi^*(x)\Delta(x, y)\phi(y) + \phi(x)\Delta^*(x, y)\phi^*(y).$$

In der niedrigsten Ordnung ist

$$\{\phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y)\} = \left(R_+(2, x, y) - R_-(2, x, y)\right) \left[\phi^*(x)e^{ie\int_\tau A}\phi(y) + \phi(x)e^{-ie\int_\tau A}\phi^*(y)\right] \\ + \text{Terme der Ordnung } k \geq 1.$$

Wir erhalten also reelle Kombinationen von Termen, die die Form von Eichbrücken haben. Allerdings ist τ ein kausaler Weg. Wir bestimmen im Folgenden die Eichbrücken für raumartig getrennte $x, z \in \mathbb{M}$. Sei dazu $y \in J^+(x) \cap J^+(z)$, dann ist

$$\begin{aligned} \{\{\phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y)\}, \phi^*(z)\phi(z)\} &= \{\phi^*(x)\Delta(x, y)\phi(y), \phi^*(z)\phi(z)\} \\ &\quad + \{\phi(x)\Delta^*(x, y)\phi^*(y), \phi^*(z)\phi(z)\} \\ &= \phi^*(x)\Delta(x, y)\Delta(y, z)\phi(z) \\ &\quad + \phi(x)\Delta^*(x, y)\Delta^*(y, z)\phi^*(z). \end{aligned}$$

Die unterste Ordnung in der Entwicklung nach dem quadratischen geodätischen Abstand ergibt

$$\begin{aligned} \{\{\phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y)\}, \phi^*(z)\phi(z)\} &= \left(R_+(2, x, y) - R_-(2, x, y)\right) \\ &\quad \times \left(R_+(2, y, z) - R_-(2, y, z)\right) \\ &\quad \times \left[\phi^*(x)e^{ie\int_{\tau_1 * \tau_2} A}\phi(z) + \phi(x)e^{-ie\int_{\tau_1 * \tau_2} A}\phi^*(z)\right] \\ &\quad + \text{Terme der Ordnung } k \geq 1. \end{aligned}$$

Hierbei ist τ_1 der eindeutige kausale Weg, der von z nach y führt, und τ_2 der eindeutige kausale Weg, der von y nach x führt. Die Hintereinanderausführung der beiden Wege τ_1, τ_2 ist

$$(\tau_1 * \tau_2)(t) = \begin{cases} \tau_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tau_2(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dieser Term entspricht der bereits oben diskutierten Eichbrücke $B(x, z)$ in (4.1), wenn man dort für die Distribution f^μ die Wahl

$$f^\mu(z'; x, z) = \int_0^{1/2} d\lambda (y - z)^\mu \delta_{2\lambda y + (1-2\lambda)z}^{(4)}(z') + \int_{1/2}^1 d\lambda (x - y)^\mu \delta_{2\lambda x + (1-2\lambda)y}^{(4)}(z')$$

4.1 Eichbrücken als Poissonklammern: Das Maxwell-Klein-Gordon-System

trifft.

Da wir letztlich nicht an der reellen Kombination, sondern nur an einem Term interessiert sind, werden wir diese mit Hilfe der lokalisierten Ladung trennen. Diese Methode wurde bereits von J. LANGERHOLC und B. SCHROER [43] verwendet, um die hermiteschen Kombinationen, die bei den Kommutatoren der Stromdichten auftreten, zu trennen. Sei W eine Hyperfläche raumartig getrennter Punkte, und $x \in W$, aber

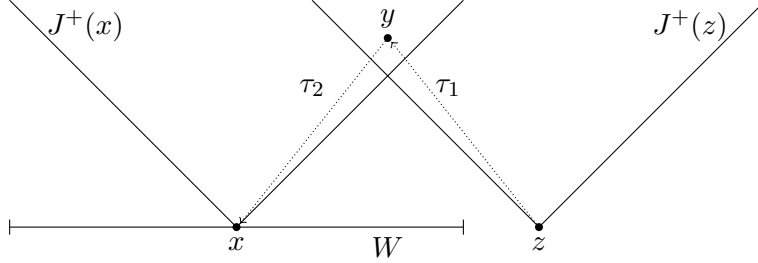


Abbildung 4.3: Die Lichtkegel der Punkte $x, z \in \mathbb{M}$ und die raumartige Hyperfläche W .

$z \notin W$. Wir definieren die im Volumen W lokalisierte Ladung Q_W als¹

$$Q_W := \int_W d\mu_W(z') j^0(z') = i \int_W d\mu_W(z') [\phi^*(z') \partial^0 \phi(z') - \phi(z') \partial^0 \phi^*(z')].$$

Mit den Eigenschaften der Kommutatorfunktion $\Delta(x, y)$ für raumartig getrennte Punkte folgt dann

$$\begin{aligned} \{Q_W, \phi(z)\} &= i \int_W d\mu_W(z') \{\phi^*(z') \partial^0 \phi(z') - \phi(z') \partial^0 \phi^*(z'), \phi(z)\} \\ &= -i \int_W d\mu_W(z') \phi(z') \underbrace{\partial_{z'^0} \{\phi^*(z'), \phi(z)\}}_{=\delta_z^{(4)}(z')=0 \text{ in } W} \\ &= 0 \\ \{Q_W, \phi(x)\} &= -i \int_W d\mu_W(z') \phi(z') \partial_{z^0} \{\phi^*(z'), \phi(x)\} \\ &= -i\phi(x). \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \{Q_W, \phi^*(x)\} &= i\phi(x), \\ \{Q_W, \phi^*(z)\} &= 0. \end{aligned}$$

¹ μ_W ist das Lebesguemaß der Hyperfläche W .

Damit berechnen wir dann

$$\begin{aligned} \{Q_W, \{\{\phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y)\}, \phi^*(z)\phi(z)\}\} &= \{Q_W, \phi^*(x)\Delta(x, y)\Delta(y, z)\phi(z)\} \\ &\quad + \{Q_W, \phi(x)\Delta^*(x, y)\Delta^*(y, z)\phi^*(z)\} \\ &= i\phi^*(x)\Delta(x, y)\Delta(y, z)\phi(z) \\ &\quad - i\phi(x)\Delta^*(x, y)\Delta^*(y, z)\phi^*(z). \end{aligned}$$

Damit können wir den ersten Term isolieren

$$\begin{aligned} \phi^*(x)\Delta(x, y)\Delta(y, z)\phi(z) &= \{\{\phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y)\}, \phi^*(z)\phi(z)\} \\ &\quad - i\{Q_W, \{\{\phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y)\}, \phi^*(z)\phi(z)\}\}. \end{aligned}$$

Der Punkt $y \in J^+(x) \cap J^+(z)$ ist beliebig und wir verschmieren mit einer Testfunktion $g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, $\text{supp}(g) \subset J^+(x) \cap J^+(z)$

$$B_g^\phi(x, z) = \int dy g(y) \phi^*(x)\Delta(x, y)\Delta(y, z)\phi(z). \quad (4.2)$$

Wir haben damit gezeigt, dass Eichbrücken in der Poissonalgebra $\mathcal{F}^{(\phi, A)}$ enthalten sind.

Da wir keine Besonderheiten des Minkowskiraumes (wie z.B. die Translationsinvarianz) benutzt haben, gelten die selben Aussagen auch auf eine beliebigen Raumzeit M , weil hier die Kommutatorfunktion die gleiche Form hat.

4.2 Eichbrücken als Poissonklammern: Das Maxwell-Dirac-System

Für das Maxwell-Dirac-System wiederholen wir die obige Schritte. Wir haben für $x, z \in \mathbb{M}$, $y \in J^+(x) \cap J^+(z)$ wie in Abb. 4.3

$$\{\{\bar{\psi}(x)\psi(x), \bar{\psi}(y)\psi(y)\}, \bar{\psi}(z)\psi(z)\} = \bar{\psi}(x)S(x, y)S(y, z)\psi(z) + \psi(x)\bar{S}(x, y)\bar{S}(y, z)\bar{\psi}(z).$$

Um den hinteren Term abzuspalten, verwenden wir die in W lokalisierte Ladung (siehe Abb. 4.3)

$$Q_W = \int d\mu_W(z') j^0(z') = \int d\mu_W(z') \bar{\psi}(z')\gamma^0\psi(z').$$

Wir erhalten mit den Eigenschaften der Kommutatorfunktion $S(x, y)$

$$\begin{aligned} \{Q_W, \psi(x)\} &= -i\psi(x), \\ \{Q_W, \bar{\psi}(x)\} &= i\bar{\psi}(x), \end{aligned}$$

4.2 Eichbrücken als Poissonklammern: Das Maxwell-Dirac-System

und $\{Q_W, \psi(z)\} = 0 = \{Q_W, \bar{\psi}(z)\}$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \{Q_W, \{\{\bar{\psi}(x)\psi(x), \bar{\psi}(y)\psi(y)\}, \bar{\psi}(z)\psi(z)\}\} &= \{Q_W, \bar{\psi}(x)S(x, y)S(y, z)\psi(z) \\ &\quad + \psi(x)\bar{S}(x, y)\bar{S}(y, z)\bar{\psi}(z)\} \\ &= i\bar{\psi}(x)S(x, y)S(y, z)\psi(z) \\ &\quad - i\psi(x)\bar{S}(x, y)\bar{S}(y, z)\bar{\psi}(z). \end{aligned}$$

Und somit ist

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)S(x, y)S(y, z)\psi(z) &= \{\{\bar{\psi}(x)\psi(x), \bar{\psi}(y)\psi(y)\}, \bar{\psi}(z)\psi(z)\} \\ &\quad - i\{Q_W, \{\{\bar{\psi}(x)\psi(x), \bar{\psi}(y)\psi(y)\}, \bar{\psi}(z)\psi(z)\}\}. \end{aligned}$$

Wir verschmieren wieder über $y \in J^+(x) \cap J^+(z)$ mit einer Testfunktion g , $\text{supp}(g) \subset J^+(x) \cap J^+(z)$

$$B_g^\psi(x, z) = \int dy g(y) \bar{\psi}(x)S(x, y)S(y, z)\psi(z). \quad (4.3)$$

Die Eichbrücken des Maxwell-Dirac-Systems sind damit in der Poissonalgebra $\mathcal{F}^{(\psi, A)}$ enthalten, und werden von lokalen Feldern erzeugt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit die algebraische Formulierung der klassischen Feldtheorie aus [23] auf zwei Eichfeldtheorien verallgemeinert. Hierbei wurden die Poissonklammern als konvergente Reihenentwicklungen nach dem quadratischen geodätischen Abstand konstruiert (die Parametrixkonstruktion). Die Poissonklammern wurden in einem vollständig kovarianten Formalismus, der auf [54] zurückgeht, bestimmt. Es erscheint daher sehr plausibel, dass sich diese Ergebnisse auch in einer quantisierten Feldtheorie wiederfinden werden.

Wir konnten schließlich im Rahmen der Entwicklung nach dem quadratischen geodätischen Abstand die Eichbrüchen

$$\phi^*(x)e^{ie \int_y^x A_\mu dx^\mu} \phi(y)$$

in der untersten Ordnung der Poissonklammern eichinvarianter lokaler Felder wiederfinden. Deren Poissonalgebra umfasst daher die Eichbrücken.

Diesen Formalismus kann man nun auch auf eine beliebige Raumzeit M anwenden. Hierzu werden die klassischen Felder als Auswertungsfunktionale auf den Schnitten in einem Vektorbündel erklärt. Da die Parametrixes in einer Raumzeit die gleiche Form, wie die Parametrixes im Minkowskiraum haben, werden die Eichbrücken in gleicher Weise in den untersten Ordnungen der Poissonklammern $\{\{\phi^*(x)\phi(x), \phi^*(y)\phi(y)\}, \phi^*(z)\phi(z)\}$ auftauchen. In unserer Darstellung fehlt jedoch die Konstruktion der Greenschen Funktionen für das Maxwell-Dirac-System auf einer Raumzeit M . Dazu müsste man den allgemeinen Formalismus aus [6] auf den Dirac-Operator

$$D : C^\infty(M, \Sigma M) \rightarrow C^\infty(M, \Sigma M)$$

anwenden. Hierbei ist ΣM das Spin-Bündel der Mannigfaltigkeit M^1 . Man verfährt dann nach dem gleichen Schema, das wir hier für den Dirac-Operator auf dem Minkowskiraum verwendet haben. Danach kann man selbstverständlich auch eine Verallgemeinerung auf Feldtheorien mit höherem Spin wagen.

In dieser Arbeit ist das Vektorpotential A^μ stets ein externes Hintergrundfeld, eine Rückkopplung der Elektronen auf das Vektorpotential haben wir also vernachlässigt. In einer weiteren Untersuchung wäre es interessant, ob sich ein ähnliches Ergebnis für das Maxwell-Klein-Gordon-System ergibt, wenn das Vektorpotential ebenfalls eine gekoppelte Differentialgleichung erfüllt.

Darüberhinaus haben wir nur eine bestimmte Art von nicht-lokalen, eichinvarianten Feldern untersucht. Es stellt sich die Frage, ob alle nicht-lokalen, eichinvarianten

¹Zur Definition des Dirac-Operators siehe [7] oder [5].

5 Zusammenfassung und Ausblick

Felder bereits in der Poissonalgebra der lokalen, eichinvarianten Felder enthalten sind, und schließlich bleibt die Frage zu klären, ob sich dies auch auf eine quantisierte Feldtheorie übertragen lässt.

A Distributionen und Mannigfaltigkeiten

In diesem Anhang geben wir einige mathematische Grundlagen bezüglich des Rechnens mit Distributionen und dem Umgang mit Mannigfaltigkeiten an.

A.1 Einige Begriffe der Differentialgeometrie

Wir geben hier einige Begriffe und Sätze die im Hauptteil der Arbeit verwendet werden. Wir entnehmen diese den Arbeiten [53, 56, 3, 4].

Definition A.1 (Raumzeit). Eine d -dimensionale Raumzeit (M, g) ist differenzierbare, orientierbare und zeit-orientierbare Lorentzmannigfaltigkeit mit der Signatur $(+, -, \dots, -)$, in der es keine geschlossenen kausalen Geodäten gibt.

Der Tangentialraum $T_p M$ ist diffeomorph zum d -dimensionalen Minkowskiraum \mathbb{M} . Auf $T_p M$ wird durch die Metrik g eine kausale Struktur erzeugt.

Die Menge der *zeitartigen Vektoren* an $p \in M$

$$V_p := \{v \in T_p M \mid g(v, v) > 0\}$$

ist ein Kegel, der in zwei Kegel V_p^-, V_p^+ zerfällt ($V_p = V_p^+ \cup V_p^-$), mit

$$V_p^- = -V_p^+.$$

Wir nennen die Vektoren aus V_p^+ *zukunftsgerichtet* und die Vektoren aus V_p^- *vergangenheitsgerichtet*. Die Menge der *lichtartigen Vektoren*

$$\partial V_p := \{v \in T_p M \mid g(v, v) = 0\}$$

bildet ebenfalls einen Kegel, und ist der Rand der Menge V_p . Auch ∂V_p kann in zwei Kegel $\partial V_p^+, \partial V_p^-$ zerlegt werden, so dass ∂V_p^+ der Rand der Menge V_p^+ , und ∂V_p^- der Rand der Menge V_p^- ist. Die übrigen Vektoren

$$\{v \in T_p M \mid g(v, v) < 0\}$$

bezeichnen wir als die *raumartigen Vektoren*.

Mit *kausalen Geodäten* sind Geodäten gemeint, deren Tangentialvektor am Punkt $p \in M$ in V_p liegt. Eine kausale Geodäte heißt *zukunftsgerichtet/vergangenheitsgerichtet*, falls ihr Tangentialvektor zukunftsgerichtet/vergangenheitsgerichtet ist. Die *Zukunftsentwicklung* eines Punktes $p \in M$ ist

$$J^+(p) := \left\{ q \in M \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt eine zukunftsgerichtete kausale} \\ \text{Geodäte } \tau, \text{ mit } \tau(0) = p, \tau(1) = q \end{array} \right\}.$$

A Distributionen und Mannigfaltigkeiten

Die *Vergangenheitsentwicklung* von p wird ähnlich definiert

$$J^-(p) := \left\{ q \in M \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt eine vergangenheitsgerichtete kausale} \\ \text{Geodäte } \tau, \text{ mit } \tau(0) = p, \tau(1) = q \end{array} \right\},$$

und

$$J(p) := J^+(p) \cup J^-(p).$$

Die Zukunfts- und Vergangenheitsentwicklungen einer Teilmenge $S \subset M$ sind

$$\begin{aligned} J^+(S) &:= \bigcup_{p \in S} J^+(p), \\ J^-(S) &:= \bigcup_{p \in S} J^-(p), \\ J(S) &:= J^+(S) \cup J^-(S). \end{aligned}$$

Zwei Punkte $p, q \in M$ heißen raumartig getrennt, falls $p \neq q$ und diese nur durch eine raumartige Geodäte verbindbar sind.

Das *Zukunftsabhängigkeitsgebiet* einer Teilmenge $S \subset M$ ist

$$D^+(S) := \left\{ p \in M \mid \begin{array}{l} \text{Jede vergangenheitsgerichtete kausale} \\ \text{Geodäte durch } p \text{ schneidet } S \end{array} \right\}.$$

Ähnlich ist der *Vergangenheitsabhängigkeitsbereich* definiert

$$D^-(S) := \left\{ p \in M \mid \begin{array}{l} \text{Jede zukunftsgerichtete kausale} \\ \text{Geodäte durch } p \text{ schneidet } S \end{array} \right\}.$$

Außerdem definieren wir den *kausalen Abhängigkeitsbereich*

$$D(S) := D^+(S) \cup D^-(S).$$

Eine Teilmenge $S \subset M$ heißt *achronal*, falls

$$I^+(S) \cap S = \emptyset.$$

Definition A.2 (Cauchyfläche). Eine abgeschlossene, achronale Teilmenge $\Sigma \subset M$ heißt *Cauchyfläche*, falls

$$D(\Sigma) = M.$$

Beispiel (Minkowskiraum). Da die Tangentialräume $T_p\mathbb{M}$ an den Minkowskiraum $(\mathbb{M}, \text{diag}(+1, -1, \dots, -1))$ diffeomorph zum Minkowskiraum selbst sind, haben wir

$$\begin{aligned} J^+(p) &= \overline{V_p^+} = \{p \in \mathbb{M} \mid p^2 \geq 0, p^0 \geq 0\}, \\ J^-(p) &= -\overline{V_p^+}. \end{aligned}$$

Die Menge

$$\Sigma = \{p \in \mathbb{M} \mid p^0 = 0\}$$

ist eine Cauchyfläche.

Definition A.3 (Global hyperbolische Raumzeit). Eine Raumzeit (M, g) heißt *global hyperbolisch*, falls es eine Cauchyfläche $\Sigma \subset M$ gibt.

Wir werden uns häufiger mit verschiedenen Vektorbündeln über der Raumzeit M befassen.

Definition A.4 (Vektorbündel). Ein k -dimensionales *Vektorbündel* (E, p) über der Raumzeit M ist ein parakompakter Hausdorffraum E und eine glatte Abbildung

$$p : E \rightarrow M,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $p^{-1}(x)$ ist für alle $x \in M$ ein Vektorraum der Dimension k ,
2. für alle $x \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subset M$ von x und einen Diffeomorphismus

$$\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(x) \subset E,$$

so dass für alle $q \in U$, $v \mapsto \phi(q, v)$ ein linearer Isomorphismus von \mathbb{R}^k auf $p^{-1}(x)$ ist.

Beispiele für Vektorbündel, die verwendet werden, sind:

1. **Tangentialbündel:**

$$TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M.$$

2. **Normalenbündel:** Sei $\mathcal{N} \subset M$ eine Unterraumzeit. Wir bilden zu jedem Tangentialraum an \mathcal{N} in x das orthogonale Komplement:

$$T_x \mathcal{N}^\perp := \left\{ v \in T_x \mathcal{N} \mid g(v, w) = 0 \ \forall w \in T_x \mathcal{N} \right\}.$$

Das *Normalenbündel* an \mathcal{N} ist dann

$$N\mathcal{N} = \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \{x\} \times T_x \mathcal{N}^\perp.$$

3. Das **komplementäre Bündel:** Sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, und $p' : D \rightarrow M$ ein Untervektorbündel. Wir bilden zu jedem Untervektorraum $p'^{-1}(x) \subset p^{-1}(x)$ den komplementären Vektorraum. D.h. wir erklären auf jedem $p^{-1}(x)$ die Äquivalenzrelation

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in p'^{-1}(x).$$

Die Menge der Äquivalenzklassen lässt sich bijektiv auf einen Untervektorraum $C_x \subset p^{-1}(x)$ abbilden. Diesen Untervektorraum C_x nennen wir den zu $p'^{-1}(x)$ komplementären Untervektorraum. Das zu $p' : D \rightarrow M$ komplementäre Bündel ist dann

$$p \Big|_{D^c} : D^c \rightarrow M,$$

$$D^c := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times C_x.$$

A.2 Distributionen und mikrolokale Analysis

Der Begriff der Distribution findet in der Physik häufig seine Anwendung, so auch in dieser Arbeit. Wir tragen hier einige Ergebnisse aus der Theorie der Distributionen zusammen, diese wurden vor allem dem Buch von Hörmander [35] entnommen, und die Beweise zu den zitierten Sätzen finden sich dort.

Definition A.5 (Distribution). Sei $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ die Menge der glatten Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Eine *Distribution* ist ein lineares und stetiges Funktional

$$\begin{aligned} t : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi &\mapsto t(\varphi). \end{aligned}$$

Die Tatsache, dass man Distribution mit glatten Funktionen verschmieren muss verrät ihre singuläre Natur. Durch das Studium dieser „Singularität“ kann man weitere Informationen über eine Distribution erhalten. Dazu betrachtet man die Fouriertransformierte \hat{t} einer Distribution t . Die Fouriertransformation ist durch

$$\hat{t}(\varphi) = t(\hat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

erklärt.

Man sagt eine Distribution ist glatt (unendlich oft stetig differenzierbar), falls ein $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ existiert, so dass

$$t(\varphi) = \int dx f(x)\varphi(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Nach dem Paley-Wiener-Schwartz-Theorem (siehe [35], Theorem 7.3.1) wissen wir, dass die Fouriertransformierte einer glatten Funktion schnell abfällt:

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists C_N : |\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{A.1})$$

Dies gilt für glatte Distributionen gleichermaßen. Um das singuläre Verhalten zu studieren, definiert man nun den Kegel

$$\Sigma(t) := \left\{ \eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \mid \nexists \text{ keine kegelförmige Umgebung } V \text{ von } \eta, \text{ so dass (A.1) gilt.} \right\}.$$

$\Sigma(t)$ ist ein abgeschlossener Kegel in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, man nennt diesen auch den „Kegel der singulären Richtungen“. Man kann (siehe [35]) die Eigenschaft

$$\Sigma(\varphi \cdot t) \subset \Sigma(t), \quad \varphi \in C_0^\infty$$

zeigen. Mit dessen Hilfe definieren wir nun

$$\Sigma_x(t) := \bigcap_{\substack{\varphi \in C_0^\infty \\ x \in \text{supp}(\varphi)}} \Sigma(\varphi \cdot t).$$

Nun sind wir in der Lage die Wellenfront einer Distribution t zu definieren:

Definition A.6 (Wellenfront). Die *Wellenfront einer Distribution* $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ist die folgende abgeschlossene, kegelförmige Menge

$$\text{WF}(t) := \left\{ (x, k) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \mid k \in \Sigma_x(t) \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Hierbei bedeutet kegelförmig, dass $\text{WF}(t)$ invariant unter Multiplikation der zweiten Variablen mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist.

Um Distributionen auf beliebigen Raumzeiten M zu erklären verwendet man den Pullback mittels aller möglichen Karten κ . Dazu muss man zunächst den Pullback auf den Distributionen erklären.

Sei $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion. Die Menge der Normalen auf f ist durch

$$N_f := \{(f(x), \eta) \in Y \times \mathbb{R}^d \mid {}^t f'(x)\eta = 0\}$$

erklärt. Dabei bezeichnet ${}^t f'(x)\eta$ das Skalarprodukt dieser Vektoren. Es gilt (siehe [35] Theorem 8.2.4):

Satz A.7. *Sei $t \in \mathcal{D}'(Y)$. Der Pullback f^*t kann auf eindeutige Weise erklärt werden, wenn*

$$N_f \cap \text{WF}(t) = \emptyset,$$

*so dass $f^*t = t \circ f$ ist, falls $t \in C^\infty(Y)$. Für jede Distribution $t \in \mathcal{D}'(Y)$ gilt*

$$\text{WF}(f^*t) \subset f^* \text{WF}(t). \quad (\text{A.3})$$

Bei der rechten Seite der letzten Relation wird $\text{WF}(t)$ als Teilmenge des Kovektorbündels $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ aufgefasst, d.h.

$$f^*(x, k) = (x, k \circ f).$$

Der Pullback wird hier durch stetige Fortsetzung der Operation $f^*t = t \circ f$ auf den stetigen Funktionen t konstruiert. Häufig verwendet man dennoch die suggestive Schreibweise

$$f^*t = t \circ f$$

für $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Wir sind jetzt in der Lage zu erklären, was eine Distribution auf eine Raumzeit M ist.

Definition A.8 (Distribution auf einer Raumzeit). Eine *Distribution t auf einer Raumzeit (M, g)* , $t \in \mathcal{D}(M)$ ist ein differenzierbarer Atlas $\{(\kappa, U_\kappa)\}$, $\bigcup_\kappa U_\kappa = M$, und ein System von Distributionen (im bisherigen Sinn) $t_\kappa \in \mathcal{D}'(\kappa(U_\kappa))$, mit

$$t_{\kappa'} = (\kappa \circ \kappa^{-1})^* t_\kappa \quad \text{in } \kappa'(U_\kappa \cap U_{\kappa'}).$$

Man kann zeigen, dass hiermit die Distribution t eindeutig definiert ist (siehe [35], Theorem 6.3.4). Die Wellenfront einer Distribution auf einer beliebigen Raumzeit M definiert man nun ebenfalls mittels des Pullbacks durch Karten.

A Distributionen und Mannigfaltigkeiten

Definition A.9 (Wellenfront auf einer Raumzeit). Sei $t \in \mathcal{D}'(M)$ eine Distribution auf einer beliebigen Raumzeit M . Die *Wellenfrontmenge* von t ist jene Teilmenge $\text{WF}(t) \subset T^*M$, so dass

$$\text{WF}(t) \Big|_{\kappa(U_\kappa)} = \kappa^* \text{WF}(t \circ \kappa^{-1}) \quad (\text{A.4})$$

gilt.

Aus der (A.3) folgt, dass die Wellenfront eindeutig definiert ist, da der Kartenwechsel $\kappa \circ \kappa'^{-1}$ invertierbar ist.

B Funktionalableitung und die Jacobi-Identität

Im Hauptteil der Arbeit haben wir mehrfach die Funktionalableitung $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}$ verwendet. Wir wollen hier diesen Begriff genauer erläutern. Außerdem rechnen wir hier explizit die Jacobi-Identität der oben definierte Peierlsklammern nach.

Definitionen und Sätze über die Funktionalableitung entnehmen wir der Arbeit [34].

Auf dem Vektorraum $C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ erklären die Halbnormen

$$\|f\|_n := \sum_{i=0}^{\infty} \sup_x |D^i f(x)|, \quad f \in C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R}) \quad (\text{B.1})$$

eine hausdorffsche Topologie. Unter reellen Funktionalen verstehen wir die (in dieser Topologie) stetigen Abbildungen

$$F : C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Oben hatten wir festgestellt, dass die Menge der Funktionale eine Algebra bildet, welche wir mit $\mathcal{F}(C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R}))$ bezeichnet haben. Auf den Funktionalen definieren wir eine Richtungsableitung.

Definition B.1 (Richtungsableitung). Sei $F : U \subset C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional, dann ist die *Richtungsableitung* von F an der Stelle $f \in U$, in Richtung von $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$DF(f)h = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(f + \lambda h) - F(f)}{\lambda}, \quad (\text{B.2})$$

falls dieser Limes existiert. Das Funktional F heißt differenzierbar, falls F an jeder Stelle $f \in U$ und in jeder Richtung $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ differenzierbar ist.

Ähnlich wie die Ableitung von Funktionen, hat die Richtungsableitung von Funktionalen die folgenden Eigenschaften.

Satz B.2. Sei $F \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, $f \in U$ und $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dann gilt:

1. $DF(f)$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$DF(f)(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha DF(f)h_1 + \beta DF(f)h_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Die Abbildung

$$DF : U \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

ist stetig in der Relativtopologie von $U \times C^\infty(M, \mathbb{R})$.

B Funktionalableitung und die Jacobi-Identität

3. Die Richtungsableitung erfüllt die Leibnizregel

$$D(F \cdot G)(f)h = G \cdot DF(f)h + F \cdot DG(f)h.$$

Die Beweise dieser Aussagen findet man in [34], Abschnitt 3, mit Ausnahme der Leibnizregel. Seien F, G differenzierbare Funktionale, dann ist

$$\begin{aligned} D(F \cdot G)(f)h &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(f + \lambda h) \cdot G(f + \lambda h) - F(f) \cdot G(f)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(f + \lambda h) \cdot G(f + \lambda h) - F(f) \cdot G(f)}{\lambda} + \frac{F(f) \cdot G(f + \lambda h)}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. - \frac{F(f) \cdot G(f + \lambda h)}{\lambda} \right\} \\ &= G(f) \cdot DF(f)h + F(f) \cdot DG(f)h. \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung ist in h eine Distribution mit kompaktem Träger, diese Distribution werden wir symbolisch durch $\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)}$ ausdrücken, und meinen damit

$$DF(f)h = \int dx \frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} h(x).$$

Die Distribution $\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)}$ bezeichnen wir auch als *Variationsableitung*, oder einfach *Variation*. Die Variation erfüllt dann ebenfalls die Leibnizregel.

$$\frac{\delta(F \cdot G)}{\varphi(x)} = \frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} \cdot G + F \cdot \frac{\delta G}{\delta \varphi(x)}.$$

Die zweite Richtungsableitung eines Funktionals ist die Richtungsableitung der Richtungsableitung von F :

$$D^2 F(f)[h, k] = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{DF(f + \nu k)h - DF(f)h}{\nu}. \quad (\text{B.3})$$

Auf gleiche Weise definieren wir höhere Richtungsableitungen. Wir erhalten dann, dass die n -te Richtungsableitung $D^n F(f)[h_1, \dots, h_n]$ linear in h_1, \dots, h_n und stetig in auf $U \times (C^\infty(M, \mathbb{R}))^n$. Außerdem ist $D^n F(f)$ symmetrisch. Auch die höheren Richtungsableitungen schreiben wir als symmetrische Distributionen $\frac{\delta^n F}{\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)}$

$$D^n F(f)[h_1, \dots, h_n] = \int d(x_1, \dots, x_n) \frac{\delta^n F}{\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)} h(x_1) \dots h(x_n).$$

Mit dem den bisherigen Informationen können wir nun die Variation einer Greenschen Funktion bestimmen. Z.B. für Δ^R erhalten wir über

$$\int dz \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(z)} \Delta^R(z, y) = \delta_y(x)$$

den Zusammenhang

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \int dz' \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x')\delta\varphi(z')} \Delta^R(z', y') \\
&= \int dz' \left[\frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(x')\delta\varphi(z')} \Delta^R(z', y') + \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x')\delta\varphi(z')} \frac{\delta\Delta^R(z', y')}{\delta\varphi(x)} \right].
\end{aligned}$$

Die Variation der Greenschen Funktion Δ^R ist also

$$\frac{\delta\Delta^R(x, y)}{\delta\varphi(z)} = - \int dx' dy' \Delta^R(x, y') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(y')\delta\varphi(x')} \Delta^R(x', y). \quad (\text{B.4})$$

Damit können wir den Beweis der Jacobi-Identität aus Abschnitt 2.2 vervollständigen. Wir müssen noch zeigen, dass der Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} \\
&= - \int d(x, y, z, z', x', y') \left[\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta G}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, z') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta H}{\delta\varphi(z')} \right. \\
&\quad - \frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta G}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, z') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta H}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad + \frac{\delta G}{\delta\varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta H}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, z') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta F}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad - \frac{\delta G}{\delta\varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta H}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, z') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta F}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad + \frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta F}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, z') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta G}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad \left. - \frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \Delta(x, y) \frac{\delta F}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, z') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta G}{\delta\varphi(z')} \right].
\end{aligned}$$

verschwindet. Wir schreiben $\Delta(x, y) = \Delta_R(x, y) - \Delta_A(x, y)$ aus und sortieren die Terme um, dann erhalten wir

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int dX dX' \left[\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta_R(x, y) \frac{\delta G}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta H}{\delta\varphi(z')} \right. \\
&\quad - \frac{\delta G}{\delta\varphi(x)} \Delta_R(x, y) \frac{\delta H}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta F}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad - \frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta_A(x, y) \frac{\delta G}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta H}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad + \frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \Delta_A(x, y) \frac{\delta F}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta G}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad - \frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta_R(x, y) \frac{\delta G}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta H}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad + \frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \Delta_R(x, y) \frac{\delta F}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta G}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad + \frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta_A(x, y) \frac{\delta G}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta H}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad - \frac{\delta G}{\delta\varphi(x)} \Delta_A(x, y) \frac{\delta H}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta F}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad + \frac{\delta G}{\delta\varphi(x)} \Delta_R(x, y) \frac{\delta H}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta F}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad - \frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \Delta_R(x, y) \frac{\delta F}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta G}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad + \frac{\delta G}{\delta\varphi(x)} \Delta_A(x, y) \frac{\delta H}{\delta\varphi(z)} \Delta_A(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_A(y', z') \frac{\delta F}{\delta\varphi(z')} \\
&\quad \left. - \frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} \Delta_A(x, y) \frac{\delta F}{\delta\varphi(z)} \Delta_R(z, x') \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')} \Delta_R(y', z') \frac{\delta G}{\delta\varphi(z')} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die Ableitung $\frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(x')\delta\varphi(y')}$ symmetrisch in y, x', y' ist.

Die bisher gemachten Aussagen für die Funktionalableitung lassen sich ohne Veränderung auch für Funktionale auf $C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C})$ verallgemeinern. Wenn diese Testfunktionen jedoch Werte in einer Grassmann-Algebra annehmen, muss man zwischen der Links- und der Recht-Variation unterscheiden. Bei der Variation werden wir f und \bar{f} als unabhängige Funktionen betrachten, obwohl $\bar{f} = f^\dagger \gamma^0$.

Definition B.3. Sei $C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C}^d)$ der Raum der glatten Grassmann-wertigen Funktionen¹ auf dem d -dimensionalen Minkowskiraum. Die *Links-Variation* eines Funktionals F auf $C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C}) \times C^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{C})$ ist jene Distribution $\frac{\delta^L F}{\delta\psi(x)}$, für die

$$\frac{d}{d\lambda} F(f + \lambda g, \bar{f}) \Big|_{\lambda=0} = \int d^d x g(x) \frac{\delta^L F}{\delta\psi(x)},$$

¹Zur Definition Grassmann-wertiger Funktionen siehe [61].

gilt, beziehungsweise die Distribution $\frac{\delta^L F}{\delta \bar{\psi}(x)}$, für die

$$\frac{d}{d\lambda} F(f, \bar{f} + \lambda \bar{g}) \Big|_{\lambda=0} = \int d^d x \bar{g}(x) \frac{\delta^L F}{\delta \bar{\psi}(x)}$$

gilt. Die *Rechts-Variation* des Funktionals F ist jene Distribution $\frac{\delta^R F}{\delta \psi(x)}$, für die

$$\frac{d}{d\lambda} F(f + \lambda g, \bar{f}) \Big|_{\lambda=0} = \int d^d x \frac{\delta^R F}{\delta \psi(x)} g(x),$$

gilt, beziehungsweise die Distribution $\frac{\delta^R F}{\delta \bar{\psi}(x)}$, für die

$$\frac{d}{d\lambda} F(f, \bar{g} + \lambda \bar{g}) \Big|_{\lambda=0} = \int d^d x \frac{\delta^R F}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{g}(x)$$

gilt.

Die hier gewählte Konvention entspricht der Links-Variation aus [71, Chapter 26, Section 2].

Literaturverzeichnis

- [1] AHARONOV, Y. und D. BOHM: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Phys. Rev., 115(3):485–491, 1959.
- [2] AHARONOV, Y. und D. BOHM: *Further Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Phys. Rev., 123(4):1511–1524, 1961.
- [3] BÄR, C.: *Differentialgeometrie*, 2006. Vorlesungsskript.
- [4] BÄR, C.: *Lorentzgeometrie*, 2006. Vorlesungsskript.
- [5] BÄR, C., P. GAUDUCHON und A. MOROIANU: *Generalized Cylinders in Semi-Riemannian and Spin Geometry*. Math. Zeitschrift, 249:545–580, 2005.
- [6] BÄR, C., N. GINOUX und F. PFÄFFLE: *Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*. ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society Publishing House, 2007.
- [7] BAUM, H.: *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten*. Teubner Verlag, Leipzig, 1981.
- [8] BERGMANN, P. G.: *Introduction of „True Observables“ into the Quantum Field Equations*. Nuovo Cimento, 3(6):1177–1185, 1956.
- [9] BERGMANN, P. G. und I. GOLDBERG: *Dirac Bracket Transformations in Phase Space*. Phys. Rev., 98:531–538, 1955.
- [10] BOGOLIUBOV, N. N. und D. V. SHIRKOV: *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. John Wiley and Sons, New York, dritte Auflage, 1980.
- [11] BRATTELI, O. und D. W. ROBINSON: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Band Eins der Reihe *Texts and Monographs in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, zweite Auflage, 2002.
- [12] BRATTELI, O. und D. W. ROBINSON: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Band Zwei der Reihe *Texts and Monographs in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, zweite Auflage, 2002.
- [13] BRENNECKE, F.: *Zum Anomalie-Problem der Master-Ward-Identität*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 2005.

- [14] BRUNETTI, R. und K. FREDENHAGEN: *Microlocal Analysis and Interacting Quantum Field Theories: Renormalization on Physical Backgrounds*. Commun. Math. Phys., 208:623–661, 2000.
- [15] DE WITT, B. S.: *Quantum Theory without Electromagnetic Potentials*. Phys. Rev., 125(6):2189–2191, 1962.
- [16] D’EMILIO, E. und M. MINTCHEV: *Physical Charged Sectors in QED. 1. Infrared Asymptotics*. Fortschr. Phys., 32:473, 1984.
- [17] D’EMILIO, E. und M. MINTCHEV: *Physical Charged Sectors in QED. 2. The Charge Operator*. Fortschr. Phys., 32:503, 1984.
- [18] DEWITT, B. S.: *The Global Approach to Quantum Field Theory*, Band Eins. Oxford University Press, 2003.
- [19] DEWITT, B. S.: *The Global Approach to Quantum Field Theory*, Band Zwei. Oxford University Press, 2003.
- [20] DIRAC, P. A. M.: *Gauge Invariant Formulation of Quantum Electrodynamics*. Can. J. Phys., 33:650, 1955.
- [21] DIRAC, P. A. M.: *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Sciences, Yeshiva University, New York, 1964.
- [22] DÜTSCH, M. und K. FREDENHAGEN: *A Local (Perturbative) Construction of Observables in Gauge Theories: The Example of QED*. Commun. Math. Phys., 203:71–105, 1999.
- [23] DÜTSCH, M. und K. FREDENHAGEN: *The Master Ward Identity and Generalized Schwinger-Dyson Equation in Classical Field Theory*. Commun. Math. Phys., 243:275–314, 2003.
- [24] EHRENBERG, W. und R. E. SIDAY: *The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics*. Proc. Phys. Soc. London, B62:8–21, 1949.
- [25] EPSTEIN, H. und V. GLASER: *The Role of Locality in Perturbation Theory*. Annales Poincaré Phys. Theor., 19(A):211–295, 1973.
- [26] FLATO, M., J. SIMON und E. TAFLIN: *On Global Solutions of the Maxwell-Dirac Equations*. Commun. Math. Phys., 112:21, 1987.
- [27] FLATO, M., J. SIMON und E. TAFLIN: *Asymptotic Completeness, Global Existence and the Infrared Problem for the Maxwell-Dirac Equations*. unbekannt, 1995.
- [28] FRIEDLANDER, F. G.: *The Wave Equation on a Curved Space-Time*. Cambridge University Press, 1975.

- [29] FRÖHLICH, J., G. MORCHIO und F. STROCCHI: *Charged Sectors and Scattering States in Quantum Electrodynamics*. Ann. Phys., 119:241, 1979.
- [30] GAMBINI, R. und J. PULLIN: *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*. Oxford University Press, 1996.
- [31] GELFAND, I., S. GELFAND, V. RETAKH und R. L. WILSON: *Quasideterminants*. Advances in Mathematics, 193(1):56–141, 2005.
- [32] HAAG, R.: *Local Quantum Physics*. Springer Verlag, Heidelberg, zweite Auflage, 1996.
- [33] HAAG, R. und D. KASTLER: *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*. J. Math. Phys., 5:848, 1964.
- [34] HAMILTON, R. S.: *The Inverse Function Theorem of Nash and Moser*. Bulletin of the AMS, 7(1):65–222, 1982.
- [35] HÖRMANDER, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Band Eins. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, zweite Auflage, 1990.
- [36] I. M. GELFAND, G. E. SCHILOV: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*, Band Eins. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, zweite Auflage, 1967.
- [37] J. M. JAUCH, F. ROHRICH: *The Theory of Photons and Electrons*. Springer Verlag, Heidelberg, zweite Auflage, 1976.
- [38] JACKSON, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*. W. DeGruyter Verlag, Berlin, dritte Auflage, 2002.
- [39] JORDAN, P.: *Zur Quantenelektrodynamik. III. Eichinvariante Quantelung und Diracsche Magnetpote*. Z. Phys., 97:535–537, 1935.
- [40] KASTER, D., D. W. ROBINSON und A. SWIECA: *Conserved Currents and Associated Symmetries; Goldstone's Theorem*. Commun. Math. Phys., Seiten 108–120, 1966.
- [41] KONTSEVICH, M.: *Deformation Quantization of Poisson Manifolds*. Lett. Math. Phys., 66:157–216, 2003.
- [42] LANDSMAN, N. P.: *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics*. Springer Verlag, Heidelberg, 1998.
- [43] LANGERHOLC, J. und B. SCHROER: *Can Current Operators Determine a Complete Theory?* Commun. Math. Phys., 4:123–136, 1967.
- [44] M. BÖHM, A. DENNER, H. JOOS: *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*. B. G. Teubner, Stuttgart, dritte Auflage, 2001.

- [45] MAISON, H. D.: *Global Charges as Integrals Over Densities*. Nuovo Cim., A11:389–396, 1972.
- [46] MANDELSTAM, S.: *Quantum Electrodynamics Without Potentials*. Ann. Phys., 19:1–24, 1962.
- [47] MARECKI, P.: *Quantum Electrodynamics on Background External Fields*. Doktorarbeit, Universität Hamburg, 2003.
- [48] MAROLF, D. M.: *Poisson Brackets on the Space of Histories*. Ann. Phys., 236:374–391, 1994.
- [49] MAROLF, D. M.: *The Generalized Peierls Bracket*. Ann. Phys., 236:392–412, 1994.
- [50] MORCHIO, G. und F. STROCCHI: *Infrared Singularities, Vacuum Structure and Pure Phases in Local Quantum Field Theory*. Ann. Inst. Poincaré, 33:251, 1980.
- [51] MORCHIO, G. und F. STROCCHI: *A Non-perturbative Approach to the Infrared Problem in QED*. Nucl. Phys., B211:471, 1983.
- [52] OLBERMANN, H.: *States of Low Energy on Robertson-Walker Spacetimes*. Class. Quant. Grav., 24:5011–5030, 2007.
- [53] O’NEILL, B.: *Semi-Riemmanian Geometry*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, San Diego, 1983.
- [54] PEIERLS, R. E.: *The Commutation Laws of Relativistic Field Theory*. Proc. Roy. Soc. Lond., 214(A):143–157, 1952.
- [55] PESHKIN, M. und A. TONOMURA: *The Aharonov-Bohm Effect*, Band 340 der Reihe *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [56] QUERENBURG, B. VON: *Mengentheoretische Topologie*. Springer, Berlin, zweite Auflage, 2001.
- [57] REED, M. und B. SIMON: *Functional Analysis*, Band Eins der Reihe *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, New York, zweite Auflage, 1980.
- [58] REQUARDT, M.: *Symmetry Conservation and Integrals over Local Charge Densities in Quantum Field Theory*. Commun. Math. Phys., 50:259–263, 1976.
- [59] RIESZ, M.: *L’intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*. Acta. Math., 81:1–223, 1949.
- [60] RUBAKOV, V.: *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2002.

- [61] SCHARF, G.: *Finite Quantum Electrodynamics: The Causal Approach*. Springer Verlag, Heidelberg, zweite Auflage, 1996.
- [62] SCHARF, G.: *Quantum Gauge Theories - A True Ghost Story*. John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [63] STEINMANN, O.: *Perturbation Expansions in Axiomatic Field Theory*, Band Elf der Reihe *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin, 1971.
- [64] STEINMANN, O.: *Perturbative QED in Terms of Gauge Invariant Fields*. Ann. Phys., 157:232, 1984.
- [65] STEINMANN, O.: *Perturbation Theory of Wightman Functions*. Commun. Math. Phys., 152:627–645, 1993.
- [66] STEINMANN, O.: *Perturbative QED and Axiomatic Field Theory*. Springer, Berlin, 2000.
- [67] STEINMANN, O.: *Physical Fields in QED*. Prog. Math., 251:301–310, 2007.
- [68] SYMANZIK, K.: *Lectures on Lagrangian Quantum Field Theory*. Technischer Bericht, Desy, 1971. Desy T-71/1.
- [69] WALD, R. M.: *General Relativity*. Chicago University Press, 1984.
- [70] WALD, R. M.: *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. Chicago University Press, Chicago, 1994.
- [71] WEINBERG, S.: *The Quantum Theory of Fields*, Band Drei. Cambridge University Press, 2005.
- [72] WEINBERG, S.: *The Quantum Theory of Fields*, Band Eins. Cambridge University Press, 2005.
- [73] WEINBERG, S.: *The Quantum Theory of Fields*, Band Zwei. Cambridge University Press, 2005.
- [74] ZWANZIGER, D.: *Physical States in Quantum Electrodynamics*. Phys. Rev., D14:2570, 1976.

Literaturverzeichnis

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Fredenhagen für eine interessante und abwechslungsreiche Aufgabenstellung danken. Die intensive Betreuung über den gesamten Zeitraum der Diplomarbeit war äußerst hilfreich.

Außerdem möchte ich Claudio Dappiaggi, Nicola Pinamonti, Pedro Lauridsen Ribeiro, Thomas-Paul Hack und Kai J. Keller für die stete Bereitschaft Fragen zu meiner Diplomarbeit zu diskutieren.

Meinen Mitstreitern Ole W. Niekerken, Marc O. Hoge, Thomas Kecker, Philipp Levermann sowie Kenan Mujkić danke ich für die gemeinsame Zeit und zahlreiche erhellende Diskussionen.

Schließlich danke ich meiner Mutter und meinem Bruder für die Unterstützung während meines gesamten Studiums.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere diese Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, 9. Februar 2009

Sebastian Jakobs