Anyonen und lokalisierte Morphismen des Federbush-Modells

Diplomarbeit
am II. Institut für Theoretische Physik
der Universität Hamburg
von

Christian Adler

Mai 1995

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir diskutieren in dieser Arbeit ein Beispiel für das Auftreten anyonischer Statistik in $1+1$-dimensionalen Quantenfeldtheorien. Das Konzept der Statistik ist seit den Anfängen der Quantenphysik von großer Bedeutung, so beispielsweise in Verbindung mit dem Pauli'schen Ausschließungsprinzip und Effekten wie der Bose-Kondensation.
Lange Zeit hat man geglaubt, Bose- und Fermi-Statistik seien die einzigen Möglichkeiten von Statistik (abgesehen vom Parabose- bzw. Parafermi-Fall). Dies ist jedoch nur in $d \geq 4$ Dimensionen richtig. Während man in $2+1$ Dimensionen Zopfgruppen-Statistik für Lokalisation in raumartigen Kegeln erhält [1], kann diese in $1+1$ Dimensionen auch im Fall von Lokalisation in Doppelkegeln auftreten, was darauf zurückzuführen ist, daß dann das raumartige Komplement eines Doppelkegels nicht zusammenhängend ist, vgl. z.B. [2].
Im quantenmechanischen Rahmen ist fraktionelle Statistik zuerst von Leinaas und Myrheim [3] behandelt worden, im feldtheoretischen Zusammenhang hat als erster Wilczek Teilchen mit abelscher Zopfgruppen-Statistik systematisch untersucht [4], wenngleich das Phänomen ungewöhnlicher (fraktioneller) Quantenzahlen schon vorher bekannt war, vgl. [5] und Referenzen dort. Heute ist man der Ansicht, daß Anyonen in Verbindung mit einigen Effekten in Festkörpern — zum Beispiel dem fraktionellen Quanten-Hall-Effekt — eine Rolle spielen könnten.
Im herkömmlichen Zugang zur Quantenfeldtheorie werden Zustände durch Vektoren im Fockraum $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ über einem Einteilchen-Hilbertraum $\mathcal{H}$ beschrieben; jener ist im fermionischen Fall ein unendlich-dimensionales Analogon zur äußeren Algebra über $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ besitzt eine natürliche Polarisation $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ bezüglich des Spektrums des Dirac-Hamiltonoperators. Ein unitärer Operator V auf $\mathcal{H}$ ist genau dann unitär implementierbar, wenn seine Komponenten V_{+-} und V_{-+} (bzgl. der obigen Zerlegung von $\mathcal{H}$) Hilbert-Schmidt-Operatoren sind. Sei $\mathcal{A}$ die $U(1)$-invariante Unteralgebra der Feldalgebra $\mathcal{F}$ des freien Dirac-Feldes [1]. Zur Konstruktion geladener Morphismen mit anyonischer Statistik gehen wir folgendermaßen vor: Neben einer in [6], [35] angegebenen ladungserzeugenden Bogoliubov-Transformation T, die einen fermionischen Automorphismus von $\mathcal{A}$ induziert, untersuchen wir eine einparametrige Schar U_λ von (ungeladenen) Bogoliubov-Operatoren ("Kink-Operatoren"), die zum Federbush-Modell assoziiert sind [2] und deren implementierende Operatoren mit dem von T nur bis auf einen Phasenfaktor kommutieren. Wir zeigen, daß das Produkt $U_\lambda T$ einen lokalisierten Automorphismus ϱ_λ von $\mathcal{A}$ induziert, welcher anyonische Vertauschungsrelationen erfüllt.

[1] $\mathcal{F}$ ist im wesentlichen die CAR-Algebra.
[2] λ ist die Kopplungskonstante in der Lagrangedichte des Federbush-Modells.

Das Netz $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ verletzt in der Vakuumdarstellung Haag-Dualität. Wir geben daher zwei Erweiterungen dieses Netzes an, die Haag-Dualität erfüllen und setzen ϱ_λ hierauf fort.
Schließlich diskutieren wir die Haag-Ruelle-Streutheorie für unser Modell und stellen fest, daß ein- bzw. auslaufende Streuzustände durch eine Potenz der statistischen Phase verknüpft sind; wir argumentieren, daß ϱ_λ als lokalisierter Morphismus des Federbush-Modells aufgefaßt werden kann und vertreten den Standpunkt, daß durch dieses Modell freie Anyonen beschrieben werden.
Den Kern der vorliegenden Arbeit bildet das 5. Kapitel, in welchem wir das Federbush-Modell im Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie besprechen. Zuvor geben wir eine kurze Einführung in den algebraischen Ansatz (Kapitel 1) und stellen die notwendigen mathematischen Hilfsmittel vor (Kapitel 2 und 3). Im 4. Kapitel definieren wir die lokalen Feldalgebren für das freie Dirac-Feld sowie die lokalen Observablenalgebren als deren $U(1)$-eichinvarianten Anteile. Schließlich gehen wir im 6. Kapitel auf mögliche experimentelle Realisierungen anyonischer Statistik ein. In den Anhängen stellen wir einige wichtige Begriffe über C^*- und von-Neumann-Algebren zusammen und diskutieren einen geometrischen Gesichtspunkt der Implementierbarkeit von Bogoliubov-Transformationen.

1 Der algebraische Ansatz

Zu Beginn der Entwicklung der Quantentheorie versuchte man, durch "Quantisierung" einer klassischen Feldtheorie eine Quantenfeldtheorie zu erhalten — in gewisser Weise eine Umkehrung des Bohr'schen Korrespondenzprinzips, demzufolge Quantensysteme einen klassischen Limes besitzen sollten. Obwohl sich dieses Vorgehen für die Berechnung von z.B. Streuquerschnitten als ausgesprochen erfolgreich erwiesen hat, ist es mit einigen mathematischen Schwierigkeiten behaftet, und es ist bislang nur für sehr wenige Modelle gelungen, ihre Existenz rigoros zu beweisen [7].
Neben der Wightman-Theorie [8] hat sich zur Klärung konzeptioneller Fragen die algebraische Quantenfeldtheorie bewährt, die ihren Ausgangspunkt in Arbeiten von Haag, Kastler und Araki hat [9], [10]. Wir bewegen uns in dieser Arbeit im Rahmen des algebraischen Ansatzes und wollen daher auf diesen etwas näher eingehen; eine ausführliche Diskussion findet man in dem Buch von Haag [2] oder in [11] sowie in den Originalarbeiten [12], [13], [14]. Der algebraischen Quantenfeldtheorie liegt die Annahme zugrunde, daß eine Quantenfeldtheorie durch ein Netz von Observablenalgebren vollständig fixiert ist. Genauer: Sei $\mathcal{K}$ die durch Inklusion gerichtete Menge der offenen Doppelkegel, d.h. $\mathcal{K} := \{(V_+ + x) \cap (V_- + y)\}_{x,y \in \mathbb{R}^d, y-x \in V_+}$. Jedem Doppelkegel $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$ wird dann eine von-Neumann-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ zugeordnet, deren selbstadjungierte Elemente die Bedeutung von in $\mathcal{O}$ meßbaren Größen haben. Das Netz $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O})$ soll folgende Eigenschaften besitzen (Haag-Kastler-Axiome):

1) Isotonie:

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2),$$

d.h. durch Vergrößern des Raum-Zeit-Gebietes kann die Algebra der Observablen nicht kleiner werden. Da $\mathcal{K}$ gerichtet ist, macht es Sinn, die Algebra

$$\mathcal{A}_{loc} := \bigcup \{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}}$$

der lokalen Observablen zu betrachten, welche außerdem eine eindeutig bestimmte C^*-Norm $||.||_{C^*}$ besitzt. Durch Vervollständigung bezüglich dieser Norm erhält man dann die sogenannte *quasilokale Algebra*

$$\mathcal{A} := \overline{\bigcup \{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}}}^{||\cdot||_{C^*}},$$

mit anderen Worten: $\mathcal{A}$ ist der C^*-induktive Limes der $\mathcal{A}(\mathcal{O})$.

2) Lokalität: Die Beobachtung, daß Ereignisse in raumartig getrennten Gebieten sich nicht beeinflussen können, bringt man durch die Forderung der Kommutativität der Algebren zu raumartig getrennten Doppelkegeln zum Ausdruck:

$$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \Longrightarrow [\mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)] = 0$$

oder äquivalent hierzu

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)'.$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{A}(\mathcal{O})'$ die Kommutante von $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ und $\mathcal{O}'$ das raumartige Komplement von $\mathcal{O}$. Da dieses Axiom die Tatsache widerspiegelt, daß sich kein Signal schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann, spricht man auch von *Einstein-Kausalität.*

3) **Haag-Dualität:** Die Lokalitätsforderung läßt sich verschärfen, indem man voraussetzt, daß $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ die maximale Algebra ist, die die Inklusion unter 2) erfüllt, also

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}')'.$$

Diese Bedingung ist jedoch nicht immer erfüllt; insbesondere ist sie für das Observablennetz des freien Dirac-Feldes in zwei Dimensionen verletzt, vgl. [2].

4) **Kovarianz:** Es existiert eine Darstellung α der Translationen $T \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ in den Automorphismen von $\mathcal{A}$ derart, daß

$$\alpha_{T_x}(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \mathcal{A}(\mathcal{O} + x).$$

5) **Spektrum-Bedingung:** Es gibt eine stark stetige unitäre Darstellung $x \mapsto U(x)$ der Translationen auf dem physikalischen Hilbertraum $\mathcal{H}$, die α_{T_x} implementiert, d.h.

$$\alpha_{T_x}(A) = U(x)AU(-x),$$

derart, daß die Erzeuger von U Spektrum in $\overline{V_+}$ haben. Diese Forderung heißt manchmal auch "Positivität der Energie". Ferner soll ein von Null verschiedener (bis auf eine Phase eindeutiger) Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ existieren, der von den $U(x)$ invariant gelassen wird:

$$U(x)\Omega = \Omega.$$

Ω wird als *Vakuumvektor* bezeichnet.

6) **Additivität:** Ist $\mathcal{O}_\lambda$ eine Überdeckung von $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$, so ist $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ in der von den $\mathcal{A}(\mathcal{O}_\lambda)$ generierten von-Neumann-Algebra enthalten:

$$\mathcal{O} \subset \bigcup \mathcal{O}_\lambda \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset (\bigvee \mathcal{A}(\mathcal{O}_\lambda)).$$

Im Zusammenhang mit der Darstellungstheorie von von-Neumann-Algebren sind für unsere Zwecke noch einige Begriffe von Bedeutung, an die wir erinnern möchten. Eine Darstellung π einer von-Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ heißt

normal, wenn $\pi(\mathcal{M})$ erneut eine von-Neumann-Algebra ist. Bemerkenswerterweise besitzt $\mathcal{M}$ (bis auf Vielfachheit) nur eine treue normale Darstellung. Im Hinblick auf die quasilokale Algebra $\mathcal{A}$ bedeutet dies, daß nur solche Darstellungen physikalisch von Bedeutung sind, deren Einschränkungen auf alle lokalen Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ normal sind — man spricht aus ersichtlichen Gründen von lokaler Normalität. Um letztere in Modellen nachzuweisen, hat man zu zeigen, daß alle Darstellungen von $\mathcal{A}$ bei Einschränkung auf lokale Algebren in derselben Quasiäquivalenzklasse liegen; vgl. [15] für den Fall des chiralen Ising-Modells.
Neben dem Netz $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ [3] muß noch angegeben werden, welche Zustände ω (d.h. positive, lineare, normierte Funktionale auf $\mathcal{A}$) als physikalisch realisierbar angesehen werden sollen. Äquivalent hierzu kann man natürlich auch die via GNS-Konstruktion erhaltenen Darstellungen benennen. Borchers hat zunächst sämtliche Darstellungen positiver Energie untersucht, stieß jedoch hierbei in Verbindung mit langreichweitigen Kräften und Infrarotwolken auf große Schwierigkeiten. Doplicher, Haag und Roberts schlugen daher folgendes Kriterium vor:

DHR-Kriterium: Betrachte solche Darstellungen π, die bei Einschränkung auf das kausale Komplement eines hinreichend großen Doppelkegels zur Vakuumdarstellung unitär äquivalent sind, also

$$\pi|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} \cong \pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')}$$

für genügend großes $\mathcal{O} \in \mathcal{K}$.

Bemerkung: "Topologische Ladungen"(z.B. Eichladungen) werden in der DHR-Analysis nicht berücksichtigt [4]. Eine Verbesserung wird hier im Falle von Theorien mit Massenlücke durch die Buchholz-Fredenhagen-Analysis [1] erreicht. Dort wird eine Lokalisierung der Zustände in raumartigen Kegeln betrachtet. Wir untersuchen jedoch nur solche Zustände, die dem DHR-Kriterium genügen.

Es existiert dann eine unitäre Abbildung $V : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_0$, so daß

$$\pi(A) = V\pi_0(A)V^* \ , \ A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}').$$

[3] Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß die lokalen Algebren i.a. hyperfinite Typ III_1-Faktoren sind, also bis auf Isomorphie identisch; die Information ist daher in der *Zuordnung* der $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ zu den Doppelkegeln codiert!

[4] Man denke beispielsweise an die elektrische Ladung: Nach dem Gauß'schen Gesetz läßt sich die Ladung im Inneren einer beliebig großen Oberfläche durch eine Flußmessung bestimmen.

Im folgenden identifizieren wir der Einfachheit halber meist die quasilokale Algebra $\mathcal{A}$ mit ihrer Realisierung im Vakuumhilbertraum, d.h. $\mathcal{A} = \pi_0(\mathcal{A})$. Setzt man

$$\varrho(A) = V^* \pi_0(A) V \quad , \; A \in \mathcal{A},$$

so erkennt man, daß die Darstellung π genau dann eine lokalisierte Ladung beschreibt, wenn sie zu einer Darstellung $\pi_0 \circ \varrho$ unitär äquivalent ist, wobei ϱ ein *in* $\mathcal{O}$ *lokalisierter* Endomorphismus der quasilokalen Algebra $\mathcal{A}$ ist, d.h.

$$\varrho(A) = A \quad \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}').$$

Der entscheidende Punkt ist, daß man Endomorphismen komponieren kann. Auf diese Weise ist es Doplicher, Haag und Roberts gelungen, die Superauswahlstruktur [5] zu analysieren. Man nennt zwei lokalisierte Morphismen *äquivalent*, falls die Darstellungen $\varrho_1(\mathcal{A})$ und $\varrho_2(\mathcal{A})$ unitär äquivalent sind; entsprechend definiert man irreduzible Morphismen. Ein in $\mathcal{O}$ lokalisierter Morphismus ϱ heißt *transportierbar*, falls es zu jedem aus $\mathcal{O}$ durch Poincaré-Transformation hervorgehenden Gebiet $\tilde{\mathcal{O}}$ einen zu ϱ äquivalenten Morphismus $\tilde{\varrho}$ gibt. Schließlich definiert ein unitärer Operator $U \in \mathcal{A}_{loc}$ einen transportierbaren, lokalisierten Automorphismus von $\mathcal{A}$ vermöge $\sigma_U(A) = UAU^*$; man spricht von *inneren* Automorphismen.
Nach Definition bilden die Observablen die einzelnen Sektoren in sich ab; existieren daher mehrere Superauswahlsektoren, so möchte man zusätzlich zu den Observablen sogenannte *Feldoperatoren* konstruieren, welche relativ lokal zu den Observablen sind und Übergänge zwischen den einzelnen Superauswahlsektoren induzieren. Nach [12] erhält man die *Feldalgebra* $\mathcal{F}$ vermöge "Erweiterung" der Algebra $\mathcal{A}$ durch Adjungieren lokalisierter Morphismen ϱ von $\mathcal{A}$. Im Falle von Permutationsgruppenstatistik ist es Doplicher und Roberts [16] gelungen, aus der quasilokalen Algebra $\mathcal{A}$ und der Superauswahlstruktur eine Feldalgebra $\mathcal{F}$ sowie eine globale Eichgruppe G zu rekonstruieren derart, daß $\mathcal{A}$ gerade der G-invariante Anteil von $\mathcal{F}$ ist, $\mathcal{A} = \mathcal{F}^G$. In niederen Dimensionen kann aber Zopfgruppenstatistik auftreten, und die Situation ist nicht vollständig geklärt; vgl. jedoch [17], [18], [19]. Man hat aber eine Alternative, das sogenannte *Feldbündel* $\mathbf{F}$, vgl. [13], [20], [22], um dennoch geladene Felder zu beschreiben. In diesem Rahmen sind Zustandsvektoren Paare $\{\varrho, \phi\}, \phi \in \mathcal{H}$, und ϱ ein lokalisierter Morphismus von $\mathcal{A}$. Felder sind Paare $\{\varrho, A\}, A \in \mathcal{A}$, und operieren auf den Zustandsvektoren vermöge

$$\{\varrho, A\}\{\varrho', \phi\} = \{\varrho'\varrho, \varrho'(A)\phi\}.$$

Da die Menge der lokalisierten, transportierbaren Morphismen diejenige der inneren einschließt, ist das Feldbündel in hohem Maße redundant [6], für un-

[5] Der physikalische Hilbertraum $\mathcal{H}$ zerfällt unter der Wirkung von $\mathcal{A}$ in eine direkte Summe von Unterräumen; diese (bzw. die assoziierten Äquivalenzklassen unitärer irreduzibler Darstellungen von $\mathcal{A}$) bezeichnet man als *Superauswahlsektoren*.

[6] Diese Redundanz läßt sich beseitigen, vgl. [22].

sere Zwecke jedoch ausreichend. Observable werden in diesem Formalismus durch Paare $\{\mathrm{id}, A\}, A \in \mathcal{A}$, beschrieben. Ein Feld $\{\varrho, A\}$ ist dann in $\mathcal{O}$ lokalisiert, falls

$$AB = \varrho(B)A \quad , B \in \mathcal{A}(\mathcal{O}').$$

Um die Vertauschungsrelationen von geladenen Feldern zu untersuchen, die in raumartig getrennten Doppelkegeln lokalisiert sind, müssen wir noch den Begriff des Intertwiners einführen.

Definition: Seien ϱ_1, ϱ_2 zwei lokalisierte Morphismen. Dann definiert man die Menge der Intertwiner $I(\varrho_1|\varrho_2)$ von ϱ_1 nach ϱ_2 vermöge

$$I(\varrho_1|\varrho_2) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) : \varrho_2(A)T = T\varrho_1(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Man schreibt statt $S \in I(\varrho_1|\varrho_2)$ häufig auch $\mathbf{S} = (\varrho_2|S|\varrho_1)$.

Bemerkung: Die Menge der Intertwiner zwischen Morphismen kann auf (zwei) verschiedene Weisen mit einer Produktstruktur versehen werden; neben der herkömmlichen Verknüpfung $\circ$ existiert noch ein "Kreuzprodukt" $\times$ (welches dem Tensorprodukt entspricht) [2], [22], auf das hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

Sind nun $F_i = \{\varrho_i, A_i\}, i = 1, 2$, in $\mathcal{O}_i$ lokalisierte Felder, $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, und $\mathbf{U}_i = (\tilde{\varrho}_i|U_i|\varrho_i)$, wobei $\tilde{\varrho}_i$ in $\mathcal{O}_i$ lokalisierte Morphismen sind, so gilt

$$F_1F_2 = \epsilon(\varrho_1, \varrho_2)F_2F_1.$$

Hierin ist der *Statistik-Operator*

$$\epsilon(\varrho_1, \varrho_2) = \varrho_2(U_1^{-1})U_2^{-1}U_1\varrho_1(U_2)$$

ein unitärer Intertwiner von $\varrho_1\varrho_2$ nach $\varrho_2\varrho_1$, der weitgehend unabhängig ist von den Intertwinern U_i, genauer:

- In $d \geq 3$ Dimensionen ist $\epsilon(\varrho_1, \varrho_2)$ unabhängig von der Wahl der Intertwiner U_i und es gilt $\epsilon(\varrho_1, \varrho_2)\epsilon(\varrho_2, \varrho_1) = 1$;
- In $d \leq 2$ Dimensionen hängt $\epsilon(\varrho_1, \varrho_2)$ allein davon ab, ob $\mathcal{O}_1$ links von $\mathcal{O}_2$ liegt ($\mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2$) oder umgekehrt.

Setzt man $\epsilon_\varrho := \epsilon(\varrho, \varrho)$, so kann man sich leicht davon überzeugen, daß man vermöge

$$\epsilon_\varrho^{(n)}(\sigma_i) := \varrho^{i-1}(\epsilon_\varrho) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \quad ,$$

eine unitäre Darstellung der Zopfgruppe B_n [7] erhält [23], [24], [25]. Gilt außerdem $\sigma_i^2 = 1$, also $\epsilon_\varrho^2 = 1$, so findet man den Fall der Permutationsgruppenstatistik wieder.
Ein lokalisierter, transportierbarer Morphismus ϱ ist im allgemeinen natürlich nicht invertierbar, besitzt jedoch ein sogenanntes *Linksinverses*, siehe z.B. [26], d.h. es existiert eine positive lineare Abbildung $\phi_\varrho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ mit den Eigenschaften

$$(i) \quad \phi_\varrho(A\varrho(B)) = \phi_\varrho(A)B \qquad A, B \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad \phi_\varrho(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \quad .$$

Für irreduzibles ϱ ist $\phi_\varrho \epsilon_\varrho$ ein Vielfaches der Identität, vgl. z.B. [2]:

$$\phi_\varrho \epsilon_\varrho = \lambda_\varrho \mathbf{1} \quad ;$$

λ_ϱ heißt der *statistische Parameter* und läßt sich zerlegen gemäß $\lambda_\varrho = \frac{\omega_\varrho}{d_\varrho}, |\omega_\varrho| = 1, d_\varrho \geq 1$ (ω_ϱ heißt *statistische Phase* und d_ϱ die *statistische Dimension* [8]). Wir werden später den einfachen Fall betrachten, daß ϱ ein Automorphismus ist; dann ist ϵ_ϱ selbst ein Vielfaches der Eins, die induzierte Darstellung der Zopfgruppe B_∞ eindimensional ($d_\varrho = 1$) und ω_ϱ ist eine beliebige Phase. Exotische Statistik ist bereits von Streater und Wilde [28] und später von Wilczek [57] untersucht worden, der den Namen "Anyon" geprägt hat. Im Fall von Endomorphismen ($d_\varrho > 1$) spricht man von "Plektonen"[21].

[7] B_n wird erzeugt von der Eins und Elementen $\sigma_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$, welche die sogenannten *Artin-Relationen* erfüllen:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i - j| \geq 2 \ ,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \ .$$

B_∞ ist dann der induktive Limes der B_n mit den kanonischen Inklusionen.

[8] Diese ist mit dem Index der Inklusion $\varrho(\mathcal{A}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O})$ vermöge $\mathrm{Ind}\varrho = d_\varrho^2$ verknüpft [27].

2 Bogoliubov-Transformationen

Wir lehnen uns in unserer Darstellung an [29] an und übernehmen die dort verwendeten Bezeichnungen; für einen etwas anderen Zugang vgl. [30], [31], [32]. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler komplexer Hilbertraum, $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ der antisymmetrische Fockraum über $\mathcal{H}$, d.h. die Vervollständigung des Vektorraumes

$$\mathcal{D}_{at} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^{n} \mathcal{H}$$

der antisymmetrischen algebraischen Tensoren bzgl. des kanonischen inneren Produktes. Der Vektor $\Omega := (1, 0, 0, \ldots)$ heißt der Vakuumvektor. Man definiert dann induktiv die Erzeugungsoperatoren $c^*(f), f \in \mathcal{H}$, vermöge

$$c^*(f_1) \ldots c^*(f_n)\Omega := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) f_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\sigma(n)} \quad .$$

Der zu $c^*(f)$ adjungierte Operator ist der Vernichtungsoperator. Es gelten die Relationen

$$\{c(f), c(g)\} = \{c^*(f), c^*(g)\} = 0$$
$$\{c(f), c^*(g)\} = (f, g) \quad .$$

Durch diese Relationen wird eine C^*-Algebra definiert, die sogenannte CAR-Algebra, in Zeichen $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. Ist $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so sei ferner der Operator $\Gamma(U)$ auf $\overline{\bigwedge^n \mathcal{H}}$ gegeben durch

$$\Gamma(U)c^*(f_1) \ldots c^*(f_n)\Omega := c^*(Uf_1) \ldots c^*(Uf_n)\Omega \quad .$$

Ist U sogar unitär, so induziert die Transformation $c^*(f) \mapsto c^*(Uf)$ einen Automorphismus der CAR-Algebra, welcher durch $\Gamma(U)$ unitär (in der Fockdarstellung) implementiert wird, denn es gilt ja

$$\Gamma(U)c^*(f) = c^*(Uf)\Gamma(U) \quad .$$

Schließlich sei für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Operator $d\Gamma(A)$ auf $\overline{\bigwedge^n \mathcal{H}}$ definiert vermöge

$$d\Gamma(A)c^*(f_1) \ldots c^*(f_n)\Omega := \sum_{i=1}^{n} c^*(f_1) \ldots c^*(Af_i) \ldots c^*(f_n)\Omega \quad .$$

Sei P_l die spektrale Projektion des Teilchenzahloperators $d\Gamma(\mathbf{1})$ auf $[0, l]$,

$$P_l \mathcal{F}_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{l} \overline{\bigwedge^{n} \mathcal{H}} \quad .$$

Da nun für beschränkte Operatoren U und A die Operatoren $\Gamma(U)$ und $d\Gamma(A)$ nicht notwendig beschränkt sind, müssen wir die Domänen beachten und führen aus diesem Grund den Raum $\mathcal{D}$ der Vektoren endlicher Teilchenzahl ein, auf dem $\Gamma(U)$ und $d\Gamma(A)$ wohldefiniert sind:

$$\mathcal{D} := \{F \in \mathcal{F}_a(\mathcal{H}) \mid F = P_l F \quad \text{für ein} \quad l \in \mathbb{N}\} \quad .$$

Sei nun zunächst A ein Spurklasseoperator, $A \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ [9]. Dann ist

$$Af = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n g_n (f_n, f) \quad N \leq \infty \quad .$$

Hierbei sind $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots > 0$ die singulären Werte von A und $\{f_n\}$ bzw. $\{g_n\}$ orthonormal. Definiere

$$Ac^*c := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c^*(g_n) c(f_n) \quad .$$

Da die rechte Seite nicht von der Wahl der Orthonormalsysteme abhängt [10], ist dieser Ausdruck wohldefiniert. Ferner ist die Folge für $N = \infty$ wegen $\| c^*(f) \| = \| f \|$ und $\sum \lambda_n = \text{Tr} \mid A \mid < \infty$ normkonvergent und es gilt

$$Ac^*c = d\Gamma(A) \quad .$$

Somit liegt $d\Gamma(A)$ (und wegen $e^{itd\Gamma(A)} = \Gamma(e^{itA})$ auch $\Gamma(e^{itA})$) für $A \in \mathcal{J}_1$ in der CAR-Algebra, während für $A \notin \mathcal{J}_1$ $d\Gamma(A)$ unbeschränkt ist! Außerdem ist $A \mapsto Ac^*c$ komplex-linear.
Als nächstes wollen wir die Linearität der entsprechenden Abbildungen $A \mapsto Acc^*$, $A \mapsto Acc$, $A \mapsto Ac^*c^*$ von $\mathcal{J}_1$ in die CAR-Algebra untersuchen. Wir führen hierzu eine Konjugation J auf $\mathcal{H}$ ein, und schreiben im Hinblick auf spätere Anwendungen $\bar{f}$, $\bar{A}$ und A^T statt Jf, JAJ und JA^*J. Für den oben definierten Spurklasseoperator A setzen wir dann:

$$Acc^* := \sum \lambda_n c(\bar{g}_n) c^*(\bar{f}_n) = -A^T c^* c + \text{Tr} A \; ;$$

$$Acc := \sum \lambda_n c(\bar{g}_n) c(f_n) \; ;$$

$$Ac^*c^* := \sum c^*(g_n) c^*(\bar{f}_n) = (A^*cc)^* \; .$$

Die Linearität von Acc^* ist klar. Aus den kanonischen Antivertauschungsrelationen folgt

$$[Acc, c^*(f)] = c((\bar{A} - A^*)\bar{f}) \quad .$$

[9] Wenn klar ist, auf welchen Hilbertraum Bezug genommen wird, schreiben wir in Zukunft $\mathcal{J}_1$ bzw. $\mathcal{J}_2$ statt $\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ bzw. $\mathcal{J}_2(\mathcal{H})$.

[10] Die Orthonormalsysteme $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ sind im wesentlichen eindeutig bestimmt.

Für zwei Spurklasseoperatoren A, B vertauscht daher $D := (\alpha A + \beta B)cc - \alpha(Acc) - \beta(Bcc)$ mit $c^{(*)}(f)$, wegen der Irreduzibilität der Darstellung also $D = \lambda \mathbf{1}$. Aufgrund von $(\Omega, D\Omega) = 0$ folgt aber sofort $\lambda = 0$. Der Beweis für die Abbildung $A \mapsto Ac^*c^*$ geht analog. Insbesondere folgt aus der angegebenen Kommutatorrelation, daß im Falle $A = A^T$ die Operatoren Acc und Ac^*c^* identisch verschwinden.

Lemma 2.1: (i)

$$\|AccP_l\| \leq l\|A\|_2 \quad ;$$

(ii)

$$\|Ac^*c^*P_l\| \leq (l+2)\|A\|_2 \quad .$$

Beweis: Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, denn $\|Ac^*c^*P_l\| = \|P_{l+2}Ac^*c^*\| = \|A^*ccP_{l+2}\|$. Wir identifizieren im folgenden $\mathcal{H}$ ohne Einschränkung mit $L^2(\mathbb{R}, dp)$ und J mit der komplexen Konjugation. Ferner sei $\mathcal{D}_0^\infty$ der Unterraum von $\mathcal{D}$ bestehend aus Vektoren F, deren N-Teilchen-Komponenten $F^{(n)}$ in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegen. Definiere dann einen Operator $c(p) : \mathcal{D}_0^\infty \longrightarrow \mathcal{D}_0^\infty$ vermöge

$$(c(p)F)^{(l-1)}(p_1, \ldots, p_{l-1}) := \sqrt{l}\, F^{(l)}(p, p_1, \ldots, p_{l-1}) \quad .$$

Es ist $(F, c(p)G) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ für alle $F, G \in \mathcal{D}_0^\infty$ und außerdem

$$\int dpf(p)(F, c(p)G) = (F, c(\bar{f})G) \;\; \forall f \in \mathcal{H}.$$

Für die elementaren Tensoren in $\mathcal{D}_0^\infty$ ist das klar; der allgemeine Fall folgt dann aus Linearität und Stetigkeit. Entsprechend erhält man für die zu $c(p)$ adjungierte quadratische Form (!) $c^*(p)$ auf $\mathcal{D}_0^\infty$:

$$\int dpf(p)c^*(p) = c^*(f) \;\; \forall f \in \mathcal{H},$$

wobei die rechte Seite die Form des Operators $c^*(f)$ ist. Nun ist aber A ein Integraloperator mit quadratintegrablem Kern $A(p, q)$ und es gilt

$$\int dpdqA(p, q)(F, c(p)c(q)G) = (F, AccG) \;\; \forall F, G \in \mathcal{D}_0^\infty.$$

Folglich

$$
\begin{aligned}
& \mid (F^{(l-2)}, AccG^{(l)}) \mid \\
& = \sqrt{l(l-1)} \mid \int dpdqA(p,q) \int dp_1 \ldots dp_{l-2} \bar{F}^{(l-2)}(p_1, \ldots, p_{l-2}) \\
& \quad \times \; G^{(l)}(q,p,p_1,\ldots,p_{l-2}) \mid \\
& \leq l \int dpdq \mid A(p,q) \mid [\int dp_1 \ldots dp_{l-2} \mid F^{(l-2)}(p_1,\ldots,p_{l-2}) \mid^2 \\
& \quad \times \int dq_1 \ldots dq_{l-2} \mid G^{(l)}(q,p,p_1,\ldots,p_{l-2}) \mid^2]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq l \|A\|_2 \|F^{(l-2)}\| \|G^{(l)}\| \quad .
\end{aligned}
$$

Somit lassen sich die Abbildungen $A \mapsto Acc$ und $A \mapsto Ac^*c^*$ auf die Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren fortsetzen. Genauer: Für jedes $A \in \mathcal{J}_2$ gibt es eindeutig bestimmte Operatoren Acc, Ac^*c^* von $\mathcal{D}$ in sich derart, daß $A_n c^{(*)} c^{(*)} F \longrightarrow Ac^{(*)}c^{(*)}F \;\; \forall F \in \mathcal{D}$, falls $\mathcal{J}_1 \ni A_n \longrightarrow A$ in $\mathcal{J}_2$.
Sei nun A allgemeiner ein beschränkter Operator. Dann gibt es eine analoge Darstellung von $d\Gamma(A)$: A besitzt nämlich nach dem Nuklear-Theorem einen eindeutig bestimmten Kern $A(p,q) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ (die Abbildung $(f,g) \mapsto (\bar{f}, Ag)$ von $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}$ ist bilinear); $d\Gamma(A)$ entspricht dann der Operator $\int dpdqA(p,q)c^*(p)c(q)$ in dem Sinne, daß

$$
(F, d\Gamma(A)G) = \int dpdqA(p,q)(c(p)F, c(q)G) \quad \forall F, G \in \mathcal{D}_0^\infty .
$$

Schließlich bemerken wir, daß für $A \in \mathcal{J}_1$ die Normalordnung von Acc^* nichts anderes ist als die Subtraktion der Spur von A:

$$
: Acc^* := -A^T c^* c \quad .
$$

In unserem Fall ist $\mathcal{H}$ die direkte Summe zweier L^2-Räume, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Die Projektionen auf $\mathcal{H}_\delta$ seien mit P_δ bezeichnet; ferner setzen wir

$$
A_{\delta\delta'} := P_\delta A P_{\delta'} \quad , \delta, \delta' = +, - \; ,
$$

und schreiben daher

$$
A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix} .
$$

Bemerkung: Die obige Zerlegung von $\mathcal{H}$ rührt daher, daß der freie Dirac-Hamiltonoperator H Spektrum $(-\infty, -m] \cup [m, \infty), m \geq 0$ die Ruhmasse, hat; d.h. P_+, P_- sind die spektralen Projektionen auf $[m, \infty)$ bzw. $(-\infty, -m]$.

Die “zweite Quantisierung” $A \mapsto d\Gamma(A)$ ist noch mit dem Makel negativer Energien behaftet. Man geht daher zu einer anderen irreduziblen Darstellung der CAR-Algebra über:

$$\tilde{c}(f) := c(P_+ f) + c^*(\overline{P_- f}) \quad .$$

Analog zu oben wird für unitäre Operatoren U, die mit P_δ kommutieren, die Transformation $\tilde{c}(f) \mapsto \tilde{c}(Uf)$ durch

$$\tilde{\Gamma}(U) := \Gamma(U_{++})\Gamma(\overline{U}_{--})$$

unitär implementiert (hierbei steht $\Gamma(U_{++})$ für $\Gamma(U_{++} \oplus \mathbf{1})$ etc.); insbesondere wird der Automorphismus $\tilde{c}(f) \mapsto \tilde{c}(e^{itH} f)$ durch $\tilde{\Gamma}(e^{itH}) = \Gamma({e^{itH}}_{++})\Gamma(\overline{e^{itH}}_{--})$ implementiert. Ferner ist der infinitesimale Erzeuger $d\tilde{\Gamma}(H) = d\Gamma(H_{++}) - d\Gamma(H_{--})$ von $\tilde{\Gamma}(e^{itH})$ positiv. Zusammenfassend kann man also sagen, daß der Übergang von $c(P_- f)$ zu $c^*(\overline{P_- f})$ das positive Spektrum des “zweitquantisierten” Energieoperators sicherstellt. In Anlehnung an die Literatur bezeichnen wir manchmal Teilchen-(bzw. Antiteilchen-) Erzeuger/Vernichter mit $a^{(*)}$ (bzw. $b^{(*)}$) und ersetzen $\tilde{c}$ durch das Symbol Ψ, d.h. also $\Psi(f) = a(P_+ f) + b^*(\overline{P_- f})$. Man kann somit $\Psi(f)$ als ausgeschmiertes Dirac-Feld zur Zeit $t = 0$ auffassen.

Sei nun U ein unitärer Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist die durch U induzierte Bogoliubov-Transformation genau dann unitär implementierbar, d.h. es existiert ein unitärer Operator $\tilde{\Gamma}(U)$ auf dem Fockraum derart, daß

$$\Psi(Uf) = \tilde{\Gamma}(U)\Psi(f)\tilde{\Gamma}(U)^* \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad ,$$

wenn U_{+-} und U_{-+} Hilbert-Schmidt-Operatoren sind, vgl. [33], [32]. Falls er existiert, ist der implementierende Operator wegen der Irreduzibilität der $\{\Psi(f)^{(*)}\}$ bis auf eine Phase eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Die Menge der (unitär) implementierbaren unitären Operatoren auf $\mathcal{H}$ bildet eine Gruppe $\mathcal{G}_2$, denn: seien U, V zwei solche Operatoren; dann ist

$$\begin{aligned} UV &= \begin{pmatrix} U_{++} & U_{+-} \\ U_{-+} & U_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{++} & V_{+-} \\ V_{-+} & V_{--} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_{++}V_{++} + U_{+-}V_{-+} & U_{++}V_{+-} + U_{+-}V_{--} \\ U_{-+}V_{++} + U_{--}V_{-+} & U_{-+}V_{+-} + U_{--}V_{--} \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

also

$$(UV)_{\delta-\delta} = U_{\delta-\delta}V_{-\delta-\delta} + U_{\delta\delta}V_{\delta-\delta} \quad \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H}) \ .$$

Die Menge der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$, deren Nebendiagonal-Elemente Hilbert-Schmidt-Operatoren sind, sei mit $\mathbf{g}_2$ bezeichnet ($\mathbf{g}_2$ ist die (komplexe) Lie-Algebra von $\mathcal{G}_2$).
Ist $iA \in \mathbf{g}_2$ schief-adjungiert, so ist e^{itA} eine normstetige einparametrige Untergruppe von $\mathcal{G}_2$; man kann nun die Phasen der zugehörigen Implementer so wählen, daß man eine stark stetige einparametrige Gruppe erhält; also

$$\tilde{\Gamma}(e^{itA}) = e^{itd\tilde{\Gamma}(A)} \quad \forall A = A^* \in \mathbf{g}_2 \ .$$

Die zunächst beliebige additive Konstante in $d\tilde{\Gamma}(A)$ wird durch die Forderung $(\Omega, d\tilde{\Gamma}(A)\Omega) = 0$ festgelegt. Daß diese Wahl erlaubt ist, ist für $A \in \mathcal{J}_1$ leicht einzusehen; wir betrachten diesen Fall daher zuerst. Wir haben oben gesehen, daß Ac^*c und e^{itAc^*c} für $A \in \mathcal{J}_1$ in der CAR-Algebra liegen. Wegen

$$e^{itAc^*c}c^*(f) = c^*(e^{itA}f)e^{itAc^*c}$$

ist

$$e^{itA\tilde{c}^*\tilde{c}}\tilde{c}^*(f) = \tilde{c}^*(e^{itA}f)e^{itA\tilde{c}^*\tilde{c}} \quad ,$$

wobei

$$A\tilde{c}^*\tilde{c} = \begin{pmatrix} a^* & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b^* \end{pmatrix} \ .$$

Dann hat aber

$$d\tilde{\Gamma}(A) := \ :A\tilde{c}^*\tilde{c}: \ = A\tilde{c}^*\tilde{c} - \mathrm{Tr}A_{--}$$

verschwindenden Vakuumerwartungswert und implementiert die Transformation $\tilde{c}(f) \mapsto \tilde{c}(e^{itA}f)$. Wir schreiben $d\tilde{\Gamma}(A)$ nun in der Form

$$d\tilde{\Gamma}(A) = d\Gamma(A_{++}) - d\Gamma(A_{--}^T) + A_{+-}a^*b^* + A_{-+}ba \quad .$$

Hierdurch wird aber für alle $A \in \mathbf{g}_2$ ein Operator auf $\mathcal{D}$ definiert, denn die rechte Seite macht für beliebige $A \in \mathbf{g}_2$ Sinn, vorausgesetzt, man wendet sie auf einen Vektor endlicher Teilchenzahl an; ferner ist $d\tilde{\Gamma}(A)^* = d\tilde{\Gamma}(A^*) \ \ \forall A \in \mathbf{g}_2$ auf $\mathcal{D}$.

Wir sind nun in der Lage, einige Lemmata zu beweisen, die bei der Berechnung des Statistik-Operators benötigt werden.

Lemma 2.2: Sei $A \in \mathbf{g}_2$ selbstadjungiert. Dann ist $d\tilde{\Gamma}(A)$ auf $\mathcal{D}$ wesentlich selbstadjungiert. Bezeichnet man den Abschluß dieses Operators mit demselben Symbol, so gilt:

$$e^{itd\tilde{\Gamma}(A)}\Psi(f)^* = \Psi(e^{itA}f)^*e^{itd\tilde{\Gamma}(A)} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{H} \ .$$

Beweis: Sei $F \in \mathcal{D}$. Dann gilt aber nach Definition von $\mathcal{D}$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$: $P_n F = F$, also

$$d\tilde{\Gamma}(A)^k F = d\tilde{\Gamma}(A) P_{n+2k-2} \dots d\tilde{\Gamma}(A) P_n F \quad .$$

Setzt man

$$|||A||| := 4\max\{\|A_{++}\|, \|A_{--}\|, \|A_{+-}\|_2, \|A_{-+}\|_2\} \quad ,$$

so erhält man mit Lemma 2.1 die Abschätzung

$$\|d\tilde{\Gamma}(A) P_l\| \leq (l+2)|||A||| \quad .$$

Folglich ist

$$\|d\tilde{\Gamma}(A)^k F\| \leq |||A|||^k (n+2k) \dots (n+2) \quad ,$$

und die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} d\tilde{\Gamma}(A)^k F$$

konvergiert für $|z| < \delta := \frac{1}{2|||A|||}$. Da $d\tilde{\Gamma}(A)$ auf $\mathcal{D}$ symmetrisch ist, folgt die wesentliche Selbstadjungiertheit aus Nelsons Theorem über analytische Vektoren.

Um die zweite Behauptung zu zeigen, benutzen wir die Kommutatorrelation

$$[d\tilde{\Gamma}(A), \Psi(f)^*] = \Psi(Af)^* \quad ,$$

welche aus der im Beweis von Lemma 2.1 angegebenen Vertauschungsrelation folgt. Betrachte die beiden Funktionen

$$F_1(z) := e^{id\tilde{\Gamma}(zA)} \Psi(f)^* F$$

und

$$F_2(z) := \Psi(e^{izA} f)^* e^{id\tilde{\Gamma}(zA)} F \quad .$$

Da $\Psi(e^{izA} f)^*$ eine in z ganze Funktion ist, sind $F_1(z)$ und $F_2(z)$ für $|z| < \delta$ analytisch und es gilt

$$\begin{aligned} F_1^{(n)}(0) &= i^n d\tilde{\Gamma}(A)^n \Psi(f)^* F \\ &= i^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Psi(A^k f)^* d\tilde{\Gamma}(A)^{n-k} F \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \Psi(\frac{(iA)^k}{k!} f)^* \frac{(id\tilde{\Gamma}(A))^{n-k}}{(n-k)!} F \\ &= F_2^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N} \, . \end{aligned}$$

Das bedeutet aber, daß F_1 und F_2 in der offenen Kreisscheibe $|z| < \delta$ übereinstimmen; die Behauptung folgt dann aus der Gruppeneigenschaft für alle $t \in \mathbb{R}$.

Der physikalische Inhalt dieses Lemmas ist die Aussage, daß Ströme lokale Eichtransformationen erzeugen. Der Kommutator zweier Ströme ist nun nur bis auf eine additive Konstante wieder ein Strom ($\rightarrow$ " Stromalgebra"). Dieser konstante Term ist gerade der zu $d\tilde{\Gamma}(A)$ assoziierte (Lie-Algebra-)Kozykel, welcher die zentrale Erweiterung fixiert und in der physikalischen Literatur als *Schwinger-Term* bekannt ist. Wir gehen hierauf im nächsten Hilfssatz ein.

Lemma 2.3: Für $A, B \in \mathbf{g}_2$ gilt auf $\mathcal{D}$:

$$[d\tilde{\Gamma}(A), d\tilde{\Gamma}(B)] = d\tilde{\Gamma}([A,B]) + C(A,B)\mathbf{1} \quad ,$$

wobei

$$C(A,B) := \mathrm{Tr}(A_{-+}B_{+-} - B_{-+}A_{+-})$$

ist.

Beweis: Aufgrund der im Beweis von Lemma 2.2 angegebenen Abschätzung genügt es aus Stetigkeitsgründen, die Behauptung für Spurklasseoperatoren zu zeigen. Dann gilt aber

$$[A\tilde{c}^*\tilde{c}, B\tilde{c}^*\tilde{c}] = [A,B]\tilde{c}^*\tilde{c} \quad ,$$

was sich mit der Definition von $d\tilde{\Gamma}(A)$ in der folgenden Form schreiben läßt:

$$[d\tilde{\Gamma}(A), d\tilde{\Gamma}(B)] = d\tilde{\Gamma}([A,B]) + \mathrm{Tr}([A,B]_{--})\mathbf{1} \quad .$$

Man rechnet nun leicht nach, daß

$$[A,B]_{--} = (A_{-+}B_{+-} - B_{-+}A_{+-}) + [A_{--}, B_{--}] \ .$$

Bemerkenswerterweise kann der Schwinger-Term $C(A,B)$ auch für kommutierende Operatoren A und B von Null verschieden sein. Es gilt

Lemma 2.4: Seien $A, B \in \mathbf{g}_2$ selbstadjungierte Operatoren derart, daß $[A,B] = 0$ ist. Dann ist

$$\tilde{\Gamma}(e^{iA})\tilde{\Gamma}(e^{iB}) = e^{-\frac{1}{2}C(A,B)}\tilde{\Gamma}(e^{i(A+B)}) = e^{-C(A,B)}\tilde{\Gamma}(e^{iB})\tilde{\Gamma}(e^{iA}) \quad .$$

Beweis: Nach Lemma 2.3 gilt auf $\mathcal{D}$ nämlich

$$[d\tilde{\Gamma}(A), d\tilde{\Gamma}(B)] = C(A,B)\mathbf{1} \quad .$$

Andererseits ist auf $\mathcal{D}$ aber (vgl. Lemma 2.2):

$$e^{id\tilde{\Gamma}(z_1 A)}e^{id\tilde{\Gamma}(z_2 B)} = e^{-z_1 z_2 \frac{1}{2}C(A,B)}e^{id\tilde{\Gamma}(z_1 A + z_2 B)}$$

für $|z_1| + |z_2| < \frac{1}{2\max\{|||A|||,|||B|||\}}$. Für hinreichend großes n gilt die Behauptung daher für $\frac{A}{n}$ und $\frac{B}{n}$. Somit folgt die Aussage aus

$$\tilde{\Gamma}(e^{i\frac{A}{n}})\tilde{\Gamma}(e^{i\frac{B}{n}}) = e^{-\frac{C(A,B)}{n^2}}\tilde{\Gamma}(e^{i\frac{B}{n}})\tilde{\Gamma}(e^{i\frac{A}{n}})$$

und

$$\tilde{\Gamma}(e^{i(A+B)}) = \tilde{\Gamma}(e^{i\frac{(A+B)}{n}})^n = e^{\frac{C(A,B)}{2n}}[\tilde{\Gamma}(e^{i\frac{A}{n}})\tilde{\Gamma}(e^{i\frac{B}{n}})]^n \quad .$$

Schließlich betrachten wir den Fall, daß einer der Operatoren eine ladungserzeugende Bogoliubov-Transformation ist (vgl. Kapitel 3).

Lemma 2.5: Seien $T \in \mathcal{G}_2$ und $A = A^* \in \mathbf{g}_2$ derart, daß $[T, A] = 0$. Dann gilt:

$$\tilde{\Gamma}(e^{iA})\tilde{\Gamma}(T) = e^{i(\tilde{\Gamma}(T)\Omega, d\tilde{\Gamma}(A)\tilde{\Gamma}(T)\Omega)}\tilde{\Gamma}(T)\tilde{\Gamma}(e^{iA}) \quad .$$

Beweis: Die implementierenden Operatoren sind bis auf eine Phase eindeutig bestimmt, also

$$\tilde{\Gamma}(T)^* e^{itd\tilde{\Gamma}(A)}\tilde{\Gamma}(T) = e^{i\phi(t)}e^{itd\tilde{\Gamma}(A)} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da die linke Seite eine stark stetige einparametrige Gruppe beschreibt, ist $\phi(t) = \gamma t$ und

$$\tilde{\Gamma}(T)^* d\tilde{\Gamma}(A)\tilde{\Gamma}(T) = d\tilde{\Gamma}(A) + \gamma \quad .$$

Die Behauptung folgt dann durch Bildung von Vakuumerwartungswerten für $t = 1$.

3 Fredholm-Operatoren und Ladungserzeugung

In diesem Abschnitt rekapitulieren wir einige grundlegende Sachverhalte aus der Theorie der Fredholm-Operatoren und gehen dabei auch auf topologische Aspekte ein. Es hat sich nämlich gezeigt [29], [34], [35], daß die Topologie der Menge der Fredholm-Operatoren eng mit der Sektorstruktur gewisser Quantenfeldtheorien verknüpft ist; eine ausführlichere Darstellung findet man in [36], [37] und [38].

Definition 3.1: Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum; ein Operator $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt **Fredholm-Operator**, wenn

(i) $\dim \operatorname{Ker} F < \infty$;

(ii) $F(\mathcal{H})$ ist abgeschlossen;

(iii) $\dim \operatorname{Koker} F = \dim \operatorname{Ker} F^* < \infty$.

Die Menge der Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}$ wird im folgenden mit $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ bezeichnet.

Der klassische [11] Fredholm-Index ist dann ein Maß für den Größenunterschied von Ker F und Koker F, genauer:

Definition 3.2: Sei $F \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Dann ist vermöge

$$\operatorname{Ind} F := \dim \operatorname{Ker} F \; - \; \dim \operatorname{Koker} F$$

eine Abbildung Ind : $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ definiert, der **Fredholm-Index**.
Notation: Setze

$$\mathcal{F}_n(\mathcal{H}) := \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \mid \operatorname{Ind} F = n\}.$$

Ein zentraler Punkt ist die Stetigkeit der Index-Abbildung, für deren Nachweis wir einige Hilfsmittel benötigen. Zunächst stellen wir zu diesem Zweck zwei Kompositionsregeln für Fredholm-Operatoren vor.

Lemma 3.3: (i) Seien $F \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ und $G \in \mathcal{F}(\mathcal{H}')$ Fredholm-Operatoren. Dann ist auch $F \oplus G$ ein Fredholm-Operator und es gilt:

$$\operatorname{Ind} F \oplus G = \operatorname{Ind} F \; + \; \operatorname{Ind} G \; ;$$

[11] Der Begriff des Indexes ist von Mingo [39] verallgemeinert worden, vgl. [38], [37].

(ii) Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ Fredholm-Operatoren, so ist

$$\text{Ind } F_1 \circ F_2 = \text{Ind } F_1 \; + \; \text{Ind } F_2,$$

mit anderen Worten: $\mathcal{F}_n(\mathcal{H}) \cdot \mathcal{F}_m(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_{n+m}(\mathcal{H})$.

Beweis: (i) Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
&\dim \text{Ker } F \oplus G \; - \; \dim \text{Koker } F \oplus G \\
&= \dim \text{Ker } F \oplus G \; - \; \dim \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'/\text{Bild } F \oplus G \\
&= \dim \text{Ker } F \oplus \text{Ker } G \; - \; \dim \mathcal{H}/\text{Bild } F \oplus \mathcal{H}'/\text{Bild } G \\
&= \dim \text{Ker } F \; - \; \dim \mathcal{H}/\text{Bild } F \; + \; \dim \text{Ker } G \; - \; \dim \mathcal{H}'/\text{Bild } G \\
&= \text{Ind } F \; + \; \text{Ind } G.
\end{aligned}$$

(ii) Offenbar ist $F_1 \circ F_2$ wieder ein Fredholm-Operator. Die Behauptung ergibt sich dann aus folgender Überlegung: Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_1 & \longrightarrow & H_1' & \longrightarrow & H_1'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle F}\big\downarrow & & {\scriptstyle F'}\big\downarrow & & {\scriptstyle F''}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & H_2' & \longrightarrow & H_2'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

wobei die Zeilen exakte Sequenzen und F, F', F'' Fredholm-Operatoren seien. Dann gilt

$$\text{Ind } F \; - \; \text{Ind } F' \; + \; \text{Ind } F'' \; = \; 0 \text{ [12]}.$$

Wende diese Relation auf

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & H \oplus H & \xrightarrow{p} & H & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle F_2}\big\downarrow & & {\scriptstyle F_1 F_2 \oplus Id}\big\downarrow & & {\scriptstyle F_1}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{j} & H \oplus H & \xrightarrow{q} & H & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

[12] Diese in der Literatur auch als Schlangenlemma bekannte Aussage erhält man mit Mitteln der homologischen Algebra; für einen Beweis verweisen wir auf [40].

an, wobei

$$\begin{aligned} i(u) &:= (u, F_2 u) \\ j(u) &:= (F_1 u, u) \\ p(u,v) &:= F_2 u - v \\ q(u,v) &:= u - F_1 v \end{aligned}$$

für $u, v \in H$. Ohne Beweis zitieren wir

Theorem 3.4 (Atkinson): Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist genau dann ein Fredholm-Operator, wenn es ein $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sowie $K_1, K_2 \in \mathcal{J}_\infty(\mathcal{H})$ gibt mit

$$ST - Id = K_1 \text{ und } TS - Id = K_2 \,[13] .$$

Lemma 3.5: $\mathcal{F}_n(\mathcal{H}) + \mathcal{J}_\infty(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_n(\mathcal{H})$.

Beweis: Sei $F \in \mathcal{F}_n(\mathcal{H})$, $K \in \mathcal{J}_\infty(\mathcal{H})$; nach einem Satz von Riesz [37], welcher besagt, daß $Id + K \in \mathcal{F}_0(\mathcal{H})$, ist dann jedes Quasiinverse G zu F ebenfalls ein Fredholm-Operator mit $\mathrm{Ind}\, G = -\mathrm{Ind}\, F$. Wegen

$$G(F+K) - Id = GF - Id + GK \in \mathcal{J}_\infty(\mathcal{H})$$

und

$$(F+K)G - Id = FG - Id + KG \in \mathcal{J}_\infty(\mathcal{H})$$

ist G dann auch Quasiinverses zu $(F+K)$ und $\mathrm{Ind}\, G = -\mathrm{Ind}\,(F+K)$.

Wir sind nun in der Lage, eine schärfere Aussage über die Abbildung $\mathrm{Ind} : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ zu machen.

Theorem 3.6 (Dieudonné): $\mathrm{Ind} : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist lokal konstant.

[13] S heißt auch *Quasiinverses* zu T. Ferner folgt aus dem Theorem von Atkinson, daß $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ abgeschlossen ist bezüglich Komposition, Adjunktion und kompakten Störungen, vgl. [37].

Beweis: Sei $F \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, G ein Quasiinverses zu F, $FG - Id = K_1$, $GF - Id = K_2$. Dann gilt für alle $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\| T \| < \| G \|^{-1}$:

$$F + T \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) , \quad (*)$$

denn nach dem Neumannschen Kriterium [41] sind wegen $\| TG \| < 1$ und $\| GT \| < 1$ die Operatoren $Id + TG$ und $Id + GT$ invertierbar und es gilt

$$(Id + GT)^{-1} G(F + T) = Id + (Id + GT)^{-1} K_2$$

und analog

$$(F + T) G (Id + TG)^{-1} = Id + K_1 (Id + TG)^{-1} ;$$

mit dem Theorem von Atkinson folgt dann die Behauptung $(*)$. Da der Fredholm-Index eines invertierbaren Operators verschwindet, ist wegen 3.3 und 3.5 der Beweis erbracht.

Bemerkung: Die Menge $V(X)$ der Isomorphieklassen aller Vektorraumbündel über einem topologischen Raum X wird durch die *Whitney-Summe* zu einer abelschen Halbgruppe, deren Grothendieck-Gruppe mit $K(X)$ bezeichnet sei. Sei Y ein weiterer topologischer Raum. Dann ist nach einem Theorem von Atiyah und Jänich, vgl. [37], $K(X)$ zur Menge

$$[X, Y] := \{ \tilde{f} \mid f : X \longrightarrow Y \text{stetig} \} ,$$

wobei $\tilde{f}$ die Homotopieklasse von f ist, isomorph. Insbesondere ist also die Index-Abbildung eine Bijektion der Wegzusammenhangskomponenten von $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ auf $\mathbb{Z}$.

Lemma 3.7: Sei $U \in \mathcal{G}_2$. Dann sind U_{++} und U_{--} Fredholm-Operatoren mit $\text{Ind}\, U_{++} = -\text{Ind}\, U_{--}$.

Beweis: Nach dem Theorem von Atkinson ist U_{++} (bzw. U_{--}) genau dann ein Fredholm-Operator, wenn U_{++} (bzw. U_{--}) invertierbar modulo $\mathcal{J}_\infty(\mathcal{H})$ ist. Da U jedoch nach Voraussetzung invertierbar ist, ist U_{++} (bzw. U_{--}) invertierbar modulo $\mathcal{J}_2(\mathcal{H})$. Ferner läßt sich $U_{++} \oplus U_{--}$ stetig in U deformieren [14] ; da der Fredholm-Index invertierbarer Operatoren verschwindet, folgt mit 3.3 die Behauptung.

[14] $U_t = \begin{pmatrix} U_{++} & tU_{+-} \\ tU_{-+} & U_{--} \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$, ist ein Fredholm-Operator.

Unter der Wirkung des Ladungsoperators

$$Q := d\tilde{\Gamma}(\mathbf{1}) = d\Gamma(P_+) - d\Gamma(P_-)$$

spaltet der Fockraum in die direkte Summe von "Ladungssektoren" auf,

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n \quad ,$$

d.h. $F \in \mathcal{F}_n :\Leftrightarrow QF = nF$.
Ist $U \in \mathcal{G}_2$, so bildet $\tilde{\Gamma}(U)$ $\mathcal{F}_n$ in $\mathcal{F}_{n+q(U)}$ ab, wobei $q(U) \in \mathbb{Z}$ durch U eindeutig bestimmt ist. In der Tat haben Carey, Hurst und O'Brien gezeigt, daß $q(U)$ durch den Fredholm-Index von U_{--} gegeben ist, d.h. also

$$q(U) = \dim \operatorname{Ker} U_{--} - \dim \operatorname{Ker} U_{--}^* \quad .$$

Insbesondere kann man im Fall $q(U) = 1$ den n-fach geladenen Sektor durch wiederholte Anwendung von $\tilde{\Gamma}(U)$ aus dem Vakuumsektor erzeugen.

4 Das freie Dirac-Feld in $d = 2$ Dimensionen

(i) *Notation:* Seien $\check{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R}, dx)^2$ und die γ-Matrizen gegeben durch

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 := \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Betrachte dann den freien Hamilton-Operator (zur Masse $m = 1$)

$$\check{H} \; = \; -i\gamma^5 \frac{d}{dx} + \gamma^0$$

auf $\check{\mathcal{H}}$ mit dem Definitionsbereich $W_1(\mathbb{R})^2$, wobei $W_1(\mathbb{R})$ den ersten Sobolev-Raum bezeichnet. Wir verwenden im folgenden die Spektraldarstellung von $\check{H}$ auf $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}, d\theta)^2$ (θ die Rapidität; diese ist mit dem Impuls über $p(\theta) = (\cosh\theta, \sinh\theta)$ verknüpft), welche induziert wird durch eine unitäre Transformation $W : \mathcal{H} \longrightarrow \check{\mathcal{H}}$; letztere ist definiert vermöge

$$(Wg)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\delta=+,-} \int d\theta e^{i\delta x \sinh\theta} w_\delta(\theta) g_\delta(\theta)$$

mit der inversen Transformation

$$(W^{-1}f)_\delta(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-i\delta x \sinh\theta} \overline{w_\delta}(\theta) \cdot f(x) .$$

Die Dirac-Spinoren sind hierbei gegeben durch

$$w_+(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\theta}{2}} \\ e^{-\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad w_-(\theta) := i\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\theta}{2}} \\ -e^{-\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} .$$

Ist dann $\check{A}$ ein Operator auf $\check{\mathcal{H}}$, so erhält man einen Operator auf $\mathcal{H}$ gemäß

$$A := W^{-1} \check{A} W$$

und entsprechend umgekehrt. Die Spektralprojektoren P_δ sind in der Spektraldarstellung durch

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben; um ihre Gestalt im Rapiditätsraum anzugeben, beachten wir, daß der Hamilton-Operator im Rapiditätsraum als Multiplikation mit

$$H(\theta) = \begin{pmatrix} \sinh\theta & 1 \\ 1 & -\sinh\theta \end{pmatrix}$$

wirkt, so daß sich für die Projektoren

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{H(\theta)}{E_\theta}) \qquad (E_\theta = \cosh\theta)$$

ergibt. Schließlich trägt $\mathcal{H}$ eine Darstellung der Poincaré-Gruppe, welche gegeben ist durch

$$(U(a,\Lambda)f)_\delta(\theta) := e^{i\delta(a^0\cosh\theta - a^1\sinh\theta)} f_\delta(\theta-\alpha) \ ,$$

wobei

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \ .$$

(ii) *Feld- und Observablenalgebren:* Der durch e^{itH} induzierte Zeitentwicklungsautomorphismus ist unitär implementierbar und man setzt

$$\Psi_t(f) := \tilde{\Gamma}(e^{itH})\Psi(f)\tilde{\Gamma}(e^{itH})^* \ .$$

Lokale Feldalgebren lassen sich dann folgendermaßen konstruieren: für $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ und $R > 0$ sei $\mathcal{O}(t,x,R)$ der (symmetrische) Doppelkegel mit Basis $B_R(x)$ zur Zeit t. Hierbei ist $B_R(x) \subset \mathbb{R}$ das offene Intervall um x mit Radius R. Setze dann

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}(t,x,R)) := \{\Psi_t(f) | \mathrm{supp} f \subset B_R(x)\}''$$

und

$$\mathcal{F} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{F}(\mathcal{O})}^{\|\cdot\|_{C^*}} \ .$$

Nach Doplicher, Haag und Roberts [12] erfüllt $\mathcal{F}$ die Eigenschaft der "twisted duality"[15]: Für $F \in \mathcal{F}$ definiert man den bosonischen und fermionischen Anteil von F durch

$$F_\pm := \frac{1}{2}(F \pm \mathrm{Ad}\,\tilde{\Gamma}(-\mathbf{1})(F))$$

und definiert

$$\mathcal{F}(\mathcal{O})^\tau := \{F_+ + \tilde{\Gamma}(-\mathbf{1})F_- | F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})\} \ .$$

Dann gilt statt Haag-Dualität:

$$\mathcal{F}(\mathcal{O})^\tau = \mathcal{F}(\mathcal{O}')' \ .$$

Die lokalen Observablenalgebren bestehen aus den $U(1)$-invarianten Elementen der lokalen Feldalgebren:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{O}) &:= \mathcal{F}(\mathcal{O}) \ \cap \ \{\tilde{\Gamma}(e^{i\gamma}) | \gamma \in \mathbb{R}\}' \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{O})^\tau \ \cap \ \{\tilde{\Gamma}(e^{i\gamma}) | \gamma \in \mathbb{R}\}' \ ; \end{aligned}$$

[15] Da raumartig getrennt lokalisierte Fermifelder antikommutieren, ist Haag-Dualität kein geeigneter Begriff.

die Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ wird also erzeugt durch Monome in $(\Psi_t(f), \Psi_t(g)^*)$ mit supp$f, g \subset B_R(x)$, die jeweils die gleiche Anzahl Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren enthalten.
Es ist Binnenhei [35] gelungen, vermöge geeigneter Multiplikationsoperatoren im Ortsraum unitär implementierbare Bogoliubov-Transformationen T anzugeben, die eine Ladung $q(T) = 1$ erzeugen und lokalisierte Automorphismen von $\mathcal{A}$ induzieren, die auch transportierbar sind — obwohl Haag-Dualität für das Netz $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ des freien Dirac-Feldes in der Vakuum-Darstellung in $d = 2$ Dimensionen verletzt ist. Wir wollen nun die Frage untersuchen, ob sich die angegebenen lokalen Observablenalgebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ so erweitern lassen, daß Haag-Dualität gilt [16]. Hierzu betrachten wir Multiplikationsoperatoren im Ortsraum, die zum klassischen Federbush-Modell assoziiert sind, vgl. [42], [43].

[16] Natürlich kann man $\mathcal{A}^d(\mathcal{O}) := \mathcal{A}(\mathcal{O}')'$ wählen; wir möchten jedoch "kleinere" Erweiterungen finden.

5 Das Federbush-Modell

Das Federbush-Modell beschreibt zwei Arten massiver, geladener Fermionen, welche vermöge einer Strom-Pseudostrom-Kopplung miteinander wechselwirken [44]. Die Lagrangedichte der Theorie ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \sum_{s=\pm 1} \Psi_s^\dagger (i\gamma^\mu \partial_\mu - m(s))\Psi_s \quad - \quad 2\pi\lambda\epsilon_{\mu\nu} J_1^\mu J_{-1}^\nu \quad ,$$

wobei

$$J_s^\mu = \Psi_s^\dagger \gamma^\mu \Psi_s \quad , \quad \Psi_s^\dagger = \overline{\Psi}_s \gamma^0 \quad .$$

Der zugehörige Fockraum ist $\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_{+1} \oplus \mathcal{H}_{-1}) \cong \mathcal{F}_a(\mathcal{H}_{+1}) \otimes \mathcal{F}_a(\mathcal{H}_{-1})$, wobei $\mathcal{H}_s, s = \pm 1$, Kopien von $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, d\theta)^2$ sind. Sei $\epsilon(\cdot)$ die durch

$$\epsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

gegebene Sprungfunktion und definiere die "Kink-Operatoren"

$$\check{U}_\lambda := e^{i\pi\lambda\epsilon(\cdot)} \quad , \lambda \in \mathbb{R},$$

mit Sprungstelle bei $x = 0$ bzw. allgemeiner

$${}^\xi\check{U}_\lambda := \check{U}(\xi, 1)\check{U}_\lambda \check{U}(\xi, 1)^*$$

mit Sprungstelle bei $x = \xi$. Ruijsenaars hat nun zwei Dinge bemerkt [42], [43]: Zum einen ist die durch ${}^\xi U_\lambda$ induzierte Bogoliubov-Transformation zwar nicht unitär implementierbar, aber doch implementierbar im Sinne von quadratischen Formen; die auf diese Weise zu ${}^\xi U_\lambda$ assoziierte quadratische Form auf den algebraischen Tensoren $\mathcal{D}_{at}$ sei mit $\varphi_\lambda(\xi)$ bezeichnet. Zum anderen ist das Federbush-Feld als quadratische Form gegeben durch

$$\Psi_{\lambda,s}(\xi) = \Psi_{0,s}(\xi)\varphi_{\lambda,-s}(\xi) \quad ;$$

hierbei ist $\Psi_{0,s}$ das freie Dirac-Feld und $\varphi_{\lambda,s}(\xi)$ ist durch die Form $\varphi_{-\lambda s}(\xi)$ gegeben.
Wie erwähnt, ist die Transformation U_λ nicht unitär implementierbar, da $U_{\lambda\pm\mp} \notin \mathcal{J}_2$. Wir betrachten aus diesem Grund Operatoren $U_{\lambda,\varepsilon}$ mit $s - \lim_{\varepsilon\to 0} U_{\lambda,\varepsilon} = U_\lambda$, welche die Hilbert-Schmidt-Bedingung erfüllen und somit unitär implementierbare Transformationen erzeugen. In Anlehnung an Ruijsenaars fassen wir die zugehörigen Implementer $\tilde{\Gamma}(U_{\lambda,\varepsilon})$ als zweitquantisierte "Feld-Operatoren" auf und untersuchen dann die lokalisierten DHR-Morphismen, welche durch $\tilde{\Gamma}(U_{\lambda,\varepsilon}T)$ induziert werden.

5.1 Definition der Operatoren

Sei α eine reellwertige, ungerade C^∞-Funktion, die für $x \geq 1$ den Wert 1 annimmt und im Intervall $(-1, 1)$ monoton wächst. Definiere dann

$$\check{U}_{\lambda,\varepsilon} := e^{i\pi\lambda\alpha(\frac{\cdot}{\varepsilon})} \qquad \lambda \in \mathbb{C}\ ,\ \varepsilon > 0\ .$$

Im folgenden werden wir die Indizes unterdrücken, sofern dadurch keine Mißverständnisse entstehen.

5.2 Implementierbarkeit

Behauptung: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die durch $U_{\lambda,\varepsilon}$ induzierte Bogoliubov-Transformation für $m > 0$ unitär implementierbar.

Beweis: Wir definieren zunächst einen für $\lambda \in \mathbb{R}$ unitären Operator $\check{U}^C_{\lambda,\varepsilon}$ vermöge

$$\check{U}^C_{\lambda,\varepsilon} := \cos\pi\lambda + i\sin\pi\lambda\tanh\frac{\pi}{2}(\frac{\cdot}{\varepsilon} - i\lambda) \quad ,\ \lambda \in \mathbb{C}$$

und setzen

$$\check{D}_{\lambda,\varepsilon} := \check{U}_{\lambda,\varepsilon} - \check{U}^C_{\lambda,\varepsilon}\ .$$

$\check{D}$ operiert als Multiplikation mit einer Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, und die Fouriertransformierte von $\tanh\frac{\pi}{2}(x - i\lambda)$ (aufgefaßt als temperierte Distribution) ist

$$\int dx e^{ipx}\tanh\frac{\pi}{2}(x - i\lambda) = \frac{2}{i}\mathrm{PV}\frac{e^{\lambda p}}{\sinh p}\ ;$$

hierbei bezeichnet PV den Cauchy'schen Hauptwert. Wegen $U_{n\lambda} = (U_\lambda)^n$ genügt es, die Hilbert-Schmidt-Eigenschaft für $\lambda \in S := \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\,(\lambda) < \frac{1}{2}\}$ zu zeigen. Die uns interessierenden Kerne sind gegeben durch

$$\begin{aligned} U^C_{\delta-\delta}(\theta_1,\theta_2) &= P_\delta W^{-1}\check{U}^C W P_{-\delta} \\ &= i\varepsilon\delta C_\lambda(\varepsilon\delta[\sinh\theta_1 + \sinh\theta_2])\sinh(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) \quad , \end{aligned}$$

wobei (mit $p = \sinh\theta$)

$$C_\lambda(p) := \frac{\sin\pi\lambda}{\pi}\frac{e^{\lambda p}}{\sinh p}\ .$$

Entsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{\delta-\delta}(\theta_1,\theta_2) &= P_\delta W^{-1}\check{D} W P_{-\delta} \\ &= i\varepsilon\delta D_\lambda(\varepsilon\delta[\sinh\theta_1 + \sinh\theta_2])\sinh(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) \quad , \end{aligned}$$

wobei D_λ die durch

$$\begin{aligned} D_\lambda(p) \ &:= \ \frac{1}{2\pi}\int e^{-ipx}[\cos(\pi\lambda\alpha(x)) - \cos\pi\lambda \\ &+ \ i(\sin(\pi\lambda\alpha(x)) - \sin\pi\lambda\tanh\frac{\pi}{2}(x - i\lambda))] \end{aligned}$$

gegebene Schwartzfunktion ist. Nun läßt sich zeigen, daß $U_{\delta-\delta}$ in $\mathcal{J}_2$ liegen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 d\theta_2 |U^C_{\delta-\delta}|^2 \ &= \ \varepsilon^2 \int d\theta_1 d\theta_2 |C_\lambda(\varepsilon\delta[\sinh\theta_1 + \sinh\theta_2])|^2 \sinh^2(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) \\ &= \ 2\varepsilon^2 \int d\phi d\theta |C_\lambda(2\varepsilon\delta\sinh\phi\cosh\theta)|^2 \sinh^2\phi \\ &\leq \ \text{const. } \varepsilon^{-1} \int dp d\theta |C_\lambda(p)|^2 \frac{p^2}{\cosh^3\theta} \\ &\leq \ \text{const.}' \ \varepsilon^{-1} \int dp d\theta \frac{p^2 e^{2\lambda p}}{\sinh^2 p}\frac{1}{\cosh^3\theta} \ < \ \infty \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 d\theta_2 |D_{\delta-\delta}|^2 \ &= \ \varepsilon^2 \int d\theta_1 d\theta_2 |D_\lambda(\varepsilon\delta[\sinh\theta_1 + \sinh\theta_2])|^2 \sinh^2(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) \\ &= \ 2\varepsilon^2 \int d\phi d\theta |D_\lambda(2\varepsilon\delta\sinh\phi\cosh\theta)|^2 \sinh^2\phi \\ &\leq \ \text{const. } \varepsilon^{-1} \int dp d\theta |D_\lambda(p)|^2 \frac{p^2}{\cosh^3\theta} \ < \ \infty\,, \end{aligned}$$

da $D_\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Damit ist der Beweis erbracht.

Bemerkung: Ruijsenaars beweist in [43] eine stärkere Aussage, nämlich die Tatsache, daß die Operatoren $U_{\delta-\delta}$ $\|.\|_2$-ganze Funktionen in λ sind; wir bemerken, daß für $m = 0$ die Operatoren $U_{\lambda,\varepsilon}$ nur für ganzzahliges λ implementierbare Bogoliubov-Transformationen induzieren, vgl. auch [45]. Wir wollen diesen masselosen Fall etwas näher untersuchen. Hierzu betrachten wir etwas allgemeiner die Bogoliubov-Transformation

$$\begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f'_+ \\ f'_- \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^{2i\Lambda_+(.)} & 0 \\ 0 & e^{2i\Lambda_-(.)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei $\Lambda_{+/-}$ glatte Funktionen sein sollen, welche für $|x_{+/-}| \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte streben und die außerdem die Bedingung

$$\Lambda_{+/-}(+\infty) = -\Lambda_{+/-}(-\infty)$$

erfüllen. Die assoziierten Integralkerne ergeben sich zu ($\theta(.)$ bezeichne die Heavyside-Funktion)

$$K_i(p,q) = \theta(p)\theta(q)K_-^i(p,q) + \theta(-p)\theta(-q)K_+^i(p,q) \quad i = 1,2,3,4.$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned}
K^1_{+/-}(p,q) &= e^{-2i\Lambda_{+/-}(\infty)}(\delta(p-q) + F_{+/-}(p-q)) \quad , \\
K^2_{+/-}(p,q) &= e^{-2i\Lambda_{+/-}(\infty)}F_{+/-}(p+q) \quad , \\
K^3_{+/-}(p,q) &= K^2_{+/-}(-p,-q) \quad , \\
K^4_{+/-}(p,q) &= K^1_{+/-}(-p,-q) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei

$$F_{+/-}(p) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx[e^{2i(\Lambda_{+/-}(x)+\Lambda_{+/-}(\infty))} - 1]e^{\mp ipx} \quad .$$

Um sicherzustellen, daß die induzierten Morphismen in Doppelkegeln lokalisierbar sind, wollen wir uns auf solche Funktionen $\Lambda_{+/-}$ einschränken, die außerhalb eines beschränkten Intervalles konstant sind (s. Abschnitt 3). Die Hilbert-Schmidt-Bedingung für die Kerne K_2 und K_3 ist erfüllt, falls

$$\Lambda_{+/-}(\infty) - \Lambda_{+/-}(-\infty) = 2\Lambda_{+/-}(\infty) = n_{+/-}\pi \quad , n_{+/-} \in \mathbb{Z}.$$

Die Gruppe der implementierbaren Bogoliubov-Transformationen zerfällt mithin in disjunkte Klassen $C(n_+, n_-)$. Labonté [46] unterscheidet ferner schwache und starke Transformationen: man spricht von einer starken Bogoliubov-Transformation, falls K_1 und K_4 nichtleeren Kern haben; in diesem Fall ist das transformierte Vakuum Ω' orthogonal zu Ω. Die schwachen Transformationen sind gerade durch die Klasse $C(0,0)$ gegeben, alle anderen Klassen induzieren starke Bogoliubov-Transformationen. Man erkennt, daß masselose Theorien wie etwa das mit dem Federbush-Modell eng verwandte masselose Thirring-Modell zur Untersuchung von Zopfgruppen-Statistik in unserem Rahmen nicht geeignet sind, da die Implementierbarkeit der Bogoliubov-Transformationen dann stets fermionische Statistik impliziert. Wir betrachten daher von nun an nur noch den Fall $m > 0$.

5.3 Lokalisierbarkeit und Ladung

Binnenhei hat folgendes bewiesen: $U \in \mathcal{G}_2$ induziert genau dann einen in $\mathcal{O}(0,\xi,R)$ lokalisierten Automorphismus von $\mathcal{A}$, wenn es für jede der beiden Zusammenhangskomponenten $\Delta_i, i = 1,2$, von $\mathbb{R} \setminus B_R(\xi)$ ein $\tau_{\Delta_i} \in U(1)$ gibt derart, daß

$$Ug = \tau_{\Delta_i} g \quad \forall g \in \mathcal{H} \text{ mit } \operatorname{supp} Wg \subset \Delta_i \quad .$$

Der Bogoliubov-Operator $U_{\lambda,\varepsilon}$ liefert also einen in $\mathcal{O}(0,0,\varepsilon)$ lokalisierten Automorphismus.
Induzieren nun $U, V \in \mathcal{G}_2$ jeweils einen in $\mathcal{O}(0,\xi,R)$ lokalisierten Morphismus, so gilt dies auch für ihr Produkt, denn es ist ja

$$(UV)(g) = U(Vg) = U\tau^V_{\Delta_i} g = \tau^U_{\Delta_i}\tau^V_{\Delta_i} g$$

für alle $g \in \mathcal{H}$ mit supp $Wg \subset \Delta_i$, $i = 1, 2$.
Behauptung: Ind $U_{\lambda,\varepsilon\delta\delta} = 0$, $\delta = +, -$.
Beweis: $U_{\lambda,\varepsilon\delta-\delta} \in \mathcal{J}_2$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ impliziert, daß $U_{\lambda,\varepsilon\delta\delta}$ für alle reellen λ Fredholm-Operatoren sind; aufgrund der Stetigkeit in λ und $U_{0,\varepsilon\delta\delta} = \mathbf{1}$ liegt $U_{\lambda,\varepsilon\delta\delta}$ in der Zusammenhangskomponente der Identität.

5.4 Transportierbarkeit

Wir beschränken uns auf die Situation zur Zeit $t = 0$. Wir haben bereits gesehen, daß $U_{\lambda,\varepsilon}$ einen in $\mathcal{O}(0,0,\varepsilon)$ lokalisierten Morphismus induziert. Entsprechend erzeugt Multiplikation mit $e^{i\pi\lambda\alpha(\frac{x-\xi}{\varepsilon})}$ einen in $\mathcal{O}(0,\xi,\varepsilon)$ lokalisierten Automorphismus, der zum ersten äquivalent ist. Wir zeigen, daß diese Äquivalenz durch ein unitäres Element einer lokalen Observablenalgebra vermittelt wird.
Sei hierzu ${}^{\xi}U$ der den in $\mathcal{O}(0,\xi,\varepsilon)$ lokalisierten Morphismus induzierende Bogoliubov-Operator und $\tilde{\Gamma}(U^{\xi}U^*)$ implementiere die durch $U^{\xi}U^*$ erzeugte Bogoliubov-Transformation. Dann bildet $\tilde{\Gamma}(U^{\xi}U^*)$ die Ladungssektoren in sich ab und vertauscht mit den globalen Eichtransformationen $\tilde{\Gamma}(e^{i\gamma})$. Sei nun $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}(0,0,\varepsilon) \cup \mathcal{O}(0,\xi,\varepsilon)$. Dann soll $\tilde{\Gamma}(U^{\xi}U^*)$ in $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ enthalten sein; es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{\Gamma}(U^{\xi}U^*) \in \mathcal{F}(\mathcal{O})^{\tau} = \mathcal{F}(\mathcal{O}')'$. Sei $f \in \mathcal{H}$ so gewählt, daß supp $Wf \cap B(\mathcal{O}) = \emptyset$ ($B(\mathcal{O})$ die Basis von $\mathcal{O}$) gilt, so ist

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(U^{\xi}U^*)\Psi(f)\tilde{\Gamma}(U^{\xi}U^*)^* &= \Psi(U^{\xi}U^* f)\\ &= \Psi(W^{-1}\check{U}^{\xi}\check{U}^* W f)\\ &= \Psi(f).\end{aligned}$$

Man beachte, daß $\tilde{\Gamma}(U_{\lambda}{}^{\xi}U^*_{\lambda'})$ für $\lambda \neq \lambda'$ *nicht* in $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ liegt, da $\check{U}_{\lambda}{}^{\xi}\check{U}^*_{\lambda'}$ dann auf $\mathcal{O}'$ nicht die Identität ist (sondern ein $U(1)$-Phasenfaktor, nämlich $e^{\pm i\pi(\lambda-\lambda')}$).
Die Komposition zweier in $\mathcal{O}$ lokalisierter, transportierbarer Automorphismen ϱ_1, ϱ_2 ist ebenfalls transportierbar, denn:
Seien $\tilde{\varrho}_1 = U_1^*\varrho_1 U_1$ und $\tilde{\varrho}_2 = U_2^*\varrho_2 U_2$, U_1, U_2 die entsprechenden Ladungstransporter. Dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{\varrho}_1\tilde{\varrho}_2(A) &= \mathrm{Ad}\ U_1^*\varrho_1 \circ \mathrm{Ad}\ U_2^*\varrho_2(A)\\ &= \mathrm{Ad}\ U_1^*\varrho_1(\mathrm{Ad}\ U_2^*\varrho_2(A))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= U_1^*\varrho_1(U_2^*\varrho_2(A)U_2)U_1 \\
&= U_1^*\varrho_1(U_2^*)\varrho_1\varrho_2(A)\varrho_1(U_2)U_1 \\
&= (\varrho_1(U_2)U_1)^*\varrho_1\varrho_2(A)(\varrho_1(U_2)U_1).
\end{aligned}
$$

5.5 Lokale Normalität

Behauptung: $V \in \mathcal{G}_2$, induziere einen in $\mathcal{O}$ lokalisierten, transportierbaren Automorphismus ϱ_V von $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$\pi_0|_{\mathcal{A}(\mathcal{O})} \cong \pi_0 \circ \varrho_V|_{\mathcal{A}(\mathcal{O})} \ .$$

Beweis: Es existiert nämlich ein Bogoliubov-Operator $V_1 \in \mathcal{G}_2$, welcher einen zu ϱ_V inneräquivalenten Automorphismus in einem zu $\mathcal{O}$ raumartigen Gebiet $\mathcal{O}_1$ erzeugt derart, daß $\tilde{\Gamma}(V)\tilde{\Gamma}(V_1)^*$ die Äquivalenz vermittelt. Somit hat man für $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$

$$
\begin{aligned}
(\pi_0 \circ \varrho_V)(A) &= \pi_0(\varrho_V(A)) \\
&= \pi_0(\tilde{\Gamma}(V)A\tilde{\Gamma}(V)^*) \\
&= \pi_0(\tilde{\Gamma}(V)\tilde{\Gamma}(V_1)^*\tilde{\Gamma}(V_1)A\tilde{\Gamma}(V_1)^*\tilde{\Gamma}(V_1)\tilde{\Gamma}(V)^*) \\
&= \pi_0(\tilde{\Gamma}(V)\tilde{\Gamma}(V_1)^*A\tilde{\Gamma}(V_1)\tilde{\Gamma}(V)^*) \\
&= \pi_0(\tilde{\Gamma}(V)\tilde{\Gamma}(V_1)^*)\pi_0(A)\pi_0(\tilde{\Gamma}(V)\tilde{\Gamma}(V_1)^*)^* \ .
\end{aligned}
$$

Insbesondere sind also die durch $U_{\lambda,\varepsilon}$ erzeugten Morphismen lokal normal.

Zusammenfassung: Es ist gelungen, lokalisierte, transportierbare, neutrale, lokal normale Automorphismen der quasilokalen Algebra $\mathcal{A}$ anzugeben. In Verbindung mit den geladenen Morphismen von Binnenhei erhält man somit für jeden Ladungssektor eine einparametrige Schar von Automorphismen, die (vom Vakuum) in den jeweiligen Sektor führen [17].

5.6 Statistik und Erweiterungen des Netzes $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$

Sei

$$ {}^{\xi}\check{T}_\varepsilon := \begin{pmatrix} e^{i\pi\alpha(\frac{x-\xi}{\varepsilon})} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Dann induziert ${}^{\xi}T_\varepsilon$ einen in $\mathcal{O}(0,\xi,\varepsilon)$ lokalisierten, einfach geladenen Automorphismus von $\mathcal{A}$. Ferner setzen wir ${}^{\xi}V_{\lambda,\varepsilon} := {}^{\xi}U_{\lambda,\varepsilon}{}^{\xi}T_\varepsilon$ und bezeichnen den hierdurch erzeugten Morphismus mit ϱ_λ.

[17] $\varrho_\lambda(A) := \tilde{\Gamma}(U_{\lambda,\varepsilon})\varrho^{(n)}_{Binnenhei}(A)\tilde{\Gamma}(U_{\lambda,\varepsilon})^*$; die ϱ_λ sind jedoch für $\lambda \neq \lambda'$ nicht inneräquivalent, s.u. .

Für $\mathcal{O}(0,\xi,\varepsilon)\times\mathcal{O}(0,\xi',\varepsilon)$ ist $[\tilde{\Gamma}({}^{\xi}T),\tilde{\Gamma}({}^{\xi'}T^*)]_+ = 0$, denn ϱ_λ ist für $\lambda = 0$ ein lokalisierter Morphismus des freien Dirac-Feldes [35] und daher gilt:

$$\begin{aligned} -\mathbf{1} = \epsilon_{\varrho_0} &= \tilde{\Gamma}({}^{\xi}T^{\xi'}T^*)^*\tilde{\Gamma}({}^{\xi}T)\tilde{\Gamma}({}^{\xi}T^{\xi'}T^*)\tilde{\Gamma}({}^{\xi}T)^* \\ &= \tilde{\Gamma}({}^{\xi'}T^*)^*\tilde{\Gamma}({}^{\xi}T)\tilde{\Gamma}({}^{\xi'}T^*)\tilde{\Gamma}({}^{\xi}T)^* \quad . \end{aligned}$$

Ferner haben die Operatoren U_λ gerade die Gestalt $U_\lambda = e^{iA_\lambda}$. Damit $\tilde{\Gamma}({}^{\xi}U_\lambda)$ und $\tilde{\Gamma}({}^{\xi'}U_{\lambda'})$ (für raumartige Lokalisationsgebiete) vertauschen, muß der Lie-Algebra-Kozykel $C({}^{\xi}A_\lambda, {}^{\xi'}A_{\lambda'})$ verschwinden (modulo 2π). Hiervon überzeugt man sich leicht durch explizites Nachrechnen [18]: Die relevanten Faltungskerne sind gegeben durch (ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\varepsilon = 1$ und $\xi = 0$ angenommen)

$$A_{\delta-\delta}(\theta_1,\theta_2) = i\delta\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\hat{\alpha}[\delta(\sinh\theta_1+\sinh\theta_2)]\sinh(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) \quad ,$$

wobei $\hat{\alpha}$ die Fouriertransformierte [19] von α bezeichnet, und aufgrund der ungeraden Symmetrie der Funktion α ergibt sich

$$A_{\delta-\delta}(\theta_1,\theta_2) = i\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\hat{\alpha}(\sinh\theta_1+\sinh\theta_2)\sinh(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}) \quad ;$$

mit anderen Worten: Die Kerne A_{+-} und A_{-+} stimmen überein, woraus die Behauptung folgt.

Wir sind nun in der Lage, den Statistik-Operator $\epsilon_{\varrho_\lambda}$ anzugeben. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \epsilon_{\varrho_\lambda} &= \tilde{\Gamma}({}^{\xi}V^{\xi'}V^*)^*\tilde{\Gamma}({}^{\xi}V)\tilde{\Gamma}({}^{\xi}V^{\xi'}V^*)\tilde{\Gamma}({}^{\xi}V)^* \\ &= \tilde{\Gamma}({}^{\xi'}V^*)^*\tilde{\Gamma}({}^{\xi}V)\tilde{\Gamma}({}^{\xi'}V^*)\tilde{\Gamma}({}^{\xi}V)^* \quad . \end{aligned}$$

Dann gilt aber unter Benutzung von Lemma 2.4 bzw. Lemma 2.5 [20]:

[18] Diese Rechnung wird z.B. in dem Buch von Pressley und Segal [60] in einem etwas allgemeineren Rahmen durchgeführt.

[19] im Sinne von Distributionen

[20] Wir bezeichnen den auftretenden (Lie-Gruppen-) Kozykel mit $c(.,.)$.

$$
\begin{aligned}
&\tilde\Gamma({}^\xi V)\tilde\Gamma({}^{\xi'}V^*)\\
&= \tilde\Gamma({}^\xi U{}^\xi T)\tilde\Gamma({}^{\xi'}T^*{}^{\xi'}U^*)\\
&= c({}^\xi U,{}^\xi T)^{-1}c({}^{\xi'}T^*,{}^{\xi'}U^*)^{-1}\tilde\Gamma({}^\xi U)\tilde\Gamma({}^\xi T)\tilde\Gamma({}^{\xi'}T^*)\tilde\Gamma({}^{\xi'}U^*)\\
&= -c({}^\xi U,{}^\xi T)^{-1}c({}^{\xi'}T^*,{}^{\xi'}U^*)^{-1}\tilde\Gamma({}^\xi U)\tilde\Gamma({}^{\xi'}T^*)\tilde\Gamma({}^\xi T)\tilde\Gamma({}^{\xi'}U^*)\\
&= -e^{i\pi\lambda \mathrm{sign}(\xi'-\xi)}c({}^\xi U,{}^\xi T)^{-1}c({}^{\xi'}T^*,{}^{\xi'}U^*)^{-1}\tilde\Gamma({}^{\xi'}T^*)\tilde\Gamma({}^\xi U)\tilde\Gamma({}^\xi T)\tilde\Gamma({}^{\xi'}U^*)\\
&= -e^{i2\pi\lambda \mathrm{sign}(\xi'-\xi)}c({}^\xi U,{}^\xi T)^{-1}c({}^{\xi'}T^*,{}^{\xi'}U^*)^{-1}\tilde\Gamma({}^{\xi'}T^*)\tilde\Gamma({}^{\xi'}U^*)\tilde\Gamma({}^\xi U)\tilde\Gamma({}^\xi T)\\
&= -e^{i2\pi\lambda \mathrm{sign}(\xi'-\xi)}\tilde\Gamma({}^{\xi'}T^*{}^{\xi'}U^*)\tilde\Gamma({}^\xi U{}^\xi T)\\
&= -e^{i2\pi\lambda \mathrm{sign}(\xi'-\xi)}\tilde\Gamma({}^{\xi'}V^*)\tilde\Gamma({}^\xi V) \quad .
\end{aligned}
$$

Folglich erhält man

$$\epsilon_{\varrho_\lambda} \;=\; -e^{i2\pi\lambda \mathrm{sign}(\xi'-\xi)}\mathbf{1} \quad .$$

Für den Fall, daß $\lambda \neq \lambda'$ ist, ist der Statistik-Operator aufgrund der Tatsache, daß zueinander raumartig lokalisierte, transportierbare Morphismen kommutieren (vgl. beispielsweise [26]), ebenfalls ein Vielfaches der Eins. Durch eine analoge Rechnung erhält man

$$\epsilon(\varrho_\lambda,\varrho_{\lambda'}) \;=\; -e^{i\pi(\lambda+\lambda')\mathrm{sign}(\xi'-\xi)}\mathbf{1} \quad .$$

Bemerkung: Die Beobachtung, daß das Federbush-Feld nicht in der Borchers-Klasse des freien Feldes liegt, siehe z.B. [47], spiegelt sich in unserem Rahmen in der Tatsache wider, daß das "Feld"$\tilde\Gamma(U)$ zwar lokal, jedoch i.a. nicht lokal relativ zum "Feld"$\tilde\Gamma(T)$ ist.

Zur Erweiterung des Netzes schlagen wir zwei Alternativen vor. Einerseits haben wir oben gesehen, daß $\tilde\Gamma({}^\xi U_\lambda)$ zwar in $\mathcal{A}(\mathcal{O}(0,\xi,\varepsilon)')'$, nicht jedoch in $\mathcal{A}(\mathcal{O}(0,\xi,\varepsilon))$ liegt. Man kann daher die Operatoren $\tilde\Gamma({}^\xi U_\lambda)$ zu $\mathcal{A}(\mathcal{O}(0,\xi,\varepsilon))$ hinzunehmen und die davon erzeugte von-Neumann-Algebra als neue Observablenalgebra betrachten. Wir vermuten, daß dies gleichbedeutend ist mit dem Übergang zum dualen Netz $\mathcal{A}^d$ [21]; in jedem Fall ist man aber gezwungen, die Lokalisation in Doppelkegeln aufzugeben, da die Kink-Operatoren $\tilde\Gamma(U_\lambda)$ nur in Halbräumen lokalisiert sind (nach Ausführung einer globalen Eichtransformation). Man betrachtet daher die Algebren $\mathcal{A}(W_\pm)$ zu Keilgebieten

$$W_\pm := \{x \in \mathbb{R}^2 |\mid x^0 \mid < \pm x^1\} \quad ,$$

[21] $\mathcal{A}^d(\mathcal{O}) := \mathcal{A}(\mathcal{O}')'$

für die Haag-Dualität aus "twisted duality"(bzw. aus einem Resultat von Bisognano und Wichmann [48]) folgt:

$$\mathcal{A}(W_+ + x)' = \mathcal{A}(W_- + x)'' \quad .$$

Die Morphismen ϱ_λ lassen sich offenbar auf das derart erweiterte Netz fortsetzen und liefern eine massive Einteilchendarstellung [22]. Die noch zu untersuchende Streutheorie rechtfertigt eine solche Solitonen-Interpretation [23]. Andererseits kann man ein Analogon zu der von Fredenhagen, Rehren und Schroer [21] für den konformen Fall eingeführten universellen Algebra betrachten. Sei hierzu

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{O}) := \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

und

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{O}') := \mathcal{A}(\mathcal{O})' \quad .$$

Dieses Netz [24] erfüllt nach Konstruktion Haag-Dualität. Die Algebren $\mathcal{A}_1(\mathcal{O})$ und $\mathcal{A}_1(\mathcal{O}')$ erzeugen nun eine C^*-Algebra $\mathcal{A}_1$, die durch die folgenden Eigenschaften eindeutig festgelegt wird:

(i) Es gibt unitale Einbettungen $\iota^I : \mathcal{A}_1(I) \hookrightarrow \mathcal{A}_1$ derart, daß für alle $I, J \in \Sigma := \{\mathcal{O}, \mathcal{O}' | \mathcal{O} \in \mathcal{K}\}$ gilt:

$$\iota^J|_{\mathcal{A}_1(I)} = \iota^I \quad , I \subset J,$$

und $\mathcal{A}_1$ wird von den Algebren $\iota(\mathcal{A}_1(I))$ erzeugt.

(ii) Für jede Familie normaler Darstellungen $(\pi^I)_{I\in\Sigma}$, $\pi^I : \mathcal{A}_1(I) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$, mit

$$\pi^J|_{\mathcal{A}_1(I)} = \pi^I \quad , I \subset J,$$

existiert eine eindeutig bestimmte Darstellung π von $\mathcal{A}_1$ in $\mathcal{H}_\pi$ derart, daß

$$\pi \circ \iota^I = \pi^I \quad .$$

Es sei angemerkt, daß die durch $\iota^I(A) \mapsto A$ induzierte Vakuumdarstellung π_0 von $\mathcal{A}_1$ nicht notwendig treu ist.
Wir wissen bereits, wie ϱ_λ auf den lokalen Algebren $\mathcal{A}_1(\mathcal{O})$ operiert; um diesen Morphismus auf $\mathcal{A}_1$ fortzusetzen, genügt es daher zu sagen, wie ϱ_λ auf den Algebren $\mathcal{A}_1(\mathcal{O}')$, also auf den Kommutanten $\mathcal{A}(\mathcal{O})'$ wirken soll. Sei hierzu ϱ_λ lokalisiert in $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}(0, \xi, \varepsilon)$ und $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}(0, \xi', \varepsilon')$ ein weiterer

[22] Die Erzeuger der Translationen sind dieselben wie beim freien Feld; es existiert somit eine isolierte Massenschale.

[23] In unserem Fall sind rechtsseitiges und linksseitiges Vakuum durch eine innere Symmetrie verbunden; für eine Verallgemeinerung siehe [49].

[24] Der Begriff des Netzes wird strenggenommen nur für gerichtete Systeme verwendet; wir benutzen denselben Ausdruck, da keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Doppelkegel. Dann ist ϱ_λ unitär äquivalent zu einem in $\mathcal{O}_1$ lokalisierten Morphismus $\hat{\varrho}_\lambda$ vermöge

$$\mathcal{T} := \tilde{\Gamma}({}^{\xi'}V_{\lambda,\varepsilon'})\tilde{\Gamma}({}^{\xi}V_{\lambda,\varepsilon})^* \quad .$$

Dieser Ladungstransporter liegt in einer lokalen Algebra $\mathcal{A}_1(\tilde{\mathcal{O}}), \tilde{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1$, denn

$$\tilde{\Gamma}({}^{\xi'}V_{\lambda,\varepsilon'})\tilde{\Gamma}({}^{\xi}V_{\lambda,\varepsilon})^*\Psi(f)\tilde{\Gamma}({}^{\xi}V_{\lambda,\varepsilon})\tilde{\Gamma}({}^{\xi'}V_{\lambda,\varepsilon'})^* = \Psi(f)$$

für $\mathrm{supp} W f \cap B_{\tilde{\mathcal{O}}} = \emptyset$. Setze dann

$$\varrho_\lambda^{\mathcal{A}_1(\mathcal{O}_1)'} := \mathrm{Ad}\mathcal{T}^*|_{\mathcal{A}_1(\mathcal{O}_1)'} \quad .$$

Dies ist wohldefiniert, denn angenommen A liegt sowohl in $\mathcal{A}_1(\mathcal{O}(0,\xi_1,\varepsilon_1))'$ als auch in $\mathcal{A}_1(\mathcal{O}(0,\xi_2,\varepsilon_2))'$, so wirken $\mathrm{Ad}\tilde{\Gamma}({}^{\xi_1}V_{\lambda,\varepsilon_1})$ und $\mathrm{Ad}\tilde{\Gamma}({}^{\xi_2}V_{\lambda,\varepsilon_2})$ auf A wie die Identität, so daß also

$$\varrho_\lambda^{\mathcal{A}_1(\mathcal{O}_1)'}(A) = \varrho_\lambda^{\mathcal{A}_1(\mathcal{O}_2)'}(A) \quad .$$

Die derart fortgesetzten Morphismen induzieren massive Einteilchendarstellungen: die Kovarianz folgt aus der Kovarianz der Bogoliubov-Operatoren ${}^{\xi}V$:

$$U(a,1){}^{\xi}VU(a,1)^* = {}^{\xi+a}V \quad ,$$

wobei $U(a,1)$ die darstellenden Operatoren der Translationen in der oben angegebenen Darstellung der Poincaré-Gruppe sind. Die Erzeuger der Translationen stimmen daher mit denen des freien Feldes überein, so daß die Existenz einer isolierten Massenschale sichergestellt ist. Damit sind alle Voraussetzungen der Haag-Ruelle-Streutheorie erfüllt, die wir im nächsten Abschnitt besprechen wollen.

Interessanterweise sind nun die Morphismen ϱ_λ und $\varrho_{\lambda'}$ für $\lambda \neq \lambda'$ nicht mehr äquivalent; da das Netz Haag-Dualität erfüllt, ist Äquivalenz gleichbedeutend mit innerer Äquivalenz: es existiert nämlich ein Doppelkegel $\mathcal{O}$, welcher die Lokalisationsgebiete von ϱ_λ und $\varrho_{\lambda'}$ enthält, so daß die Morphismen auf $\mathcal{A}_1(\mathcal{O}')$ trivial wirken. Dann vertauscht aber der unitäre Operator U, welcher die Äquivalenz vermittelt, mit $\mathcal{A}_1(\mathcal{O}')$, liegt also aufgrund von Haag-Dualität schon in $\mathcal{A}_1(\mathcal{O})$. Wären nun ϱ_λ und $\varrho_{\lambda'}$ inneräquivalent, so müßten die zugehörigen Statistik-Operatoren $\epsilon_{\varrho_\lambda}$ und $\epsilon_{\varrho_{\lambda'}}$ übereinstimmen; dies ist jedoch nicht der Fall.

5.7 Streutheorie

Die LSZ-Streutheorie für das Federbush-Modell ist von Ruijsenaars in [43], [51] ausführlich behandelt worden. Wir zitieren daher nur das für uns wichtige Resultat und verweisen für Details sowie Beweise auf die angegebenen

Originalarbeiten. Alle Felder seien aufgefaßt als quadratische Formen auf $\mathcal{D}_0^\infty$ und q bezeichne das Vorzeichen der auftretenden Ladungen. Definiere dann

$$\Psi^{\text{ex}}_{\lambda,s}(x) := S_{\mp\frac{\lambda}{2}}\Psi_{0,s}(x)S_{\pm\frac{\lambda}{2}} \quad , \quad \text{ex} = \text{in}, \text{out}$$

wobei

$$(S_\lambda\Psi)(\theta_1, q_1, s_1, \ldots, \theta_n, q_n, s_n)$$

$$:= e^{i\pi\lambda\sum_{i<j}\epsilon(\theta_i-\theta_j)(s_i-s_j)q_iq_j}\Psi(\theta_1, q_1, s_1, \ldots, \theta_n, q_n, s_n)$$

die LSZ-S-Matrix S_λ definiert. Diese Bezeichnungen werden durch die folgende Tatsache gerechtfertigt: Sei $F_s(x)$ eine Lösung der Dirac-Gleichung zur Masse $m(s)$ derart, daß die Fouriertransformierte von $F_s(x)$ in $\mathcal{C}_0^\infty$ liegt. Für $\psi, \phi \in \mathcal{D}_0^\infty$ sei außerdem

$$\alpha_t := \int dx^1 \bar{F}_s(x) \cdot (\psi, \Psi_{\lambda,s}(x)\phi)$$

und

$$\alpha_{\text{ex}} := \int dx^1 \bar{F}_s(0, x^1) \cdot (\psi, \Psi^{\text{ex}}_{\lambda,s}(0, x^1)\phi) \quad , \text{ex} = \text{in}, \text{out} .$$

Dann gilt:

$$\lim_{t\to\pm\infty} \alpha_t = \alpha_{\text{ex}} \quad , \text{ex} = \text{out}, \text{in} .$$

Ruijsenaars hat ferner unter Benutzung eines Resultates von Hepp [52] gezeigt, daß die ein- bzw. auslaufenden Felder $\Psi^{\text{ex}}_{\lambda,s}$ mit den asymptotischen Feldern der Haag-Ruelle-Theorie übereinstimmen.

Wir wollen nun die Haag-Ruelle-Streuzustände für die Morphismen ϱ_λ im Rahmen des Feldbündelformalismus konstruieren. Hierzu gehen wir zunächst auf die Existenz globaler Selbstintertwiner ein und verdeutlichen die auftretende Schwierigkeit im Fall von Theorien auf dem Kreis, d.h. $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(S^1)$ [21]. Das Problem besteht darin, daß der Statistik-Operator von der Wahl eines "Punktes bei Unendlich"$\xi \in S^1$ abhängen kann. Ist nämlich ϱ in einem Intervall J lokalisiert und σ in einem Intervall I, und sei $\xi \in I' \cap J'$ gewählt, so ändert sich der Statistik-Operator $\epsilon_\xi(\varrho, \sigma)$ nicht, solange man ξ stetig verschiebt; $I' \cap J'$ besitzt jedoch unter Umständen zwei Zusammenhangskomponenten $\Delta_{1,2}$. Wählt man nun $\xi \in \Delta_1$ und $\zeta \in \Delta_2$, so stimmen die assoziierten Statistik-Operatoren nur im Spezialfall trivialer Monodromie überein!

Globale Selbstintertwiner lassen sich dann wie folgt konstruieren: Seien ϱ und σ beide in I lokalisiert und $\tilde{\varrho}$ sei lokalisiert in J und liege in der Äquivalenzklasse von ϱ. Dann stimmen die Statistik-Operatoren $\epsilon(\varrho, \sigma)$ und $\epsilon(\sigma, \varrho)$ für ξ und ζ überein. Setzt man

$$\mathcal{A}_\xi := \overline{\{\mathcal{A}(I) | I \subset S^1, \xi \notin I\}} \quad ,$$

so liegen die Operatoren $\epsilon(\varrho,\sigma)$ und $\epsilon(\sigma,\varrho)$ in $\mathcal{A}_\xi \cap \mathcal{A}_\zeta$, so daß aufgrund von Haag-Dualität ein Intertwiner $S : \pi_0\varrho \longrightarrow \pi_0\tilde{\varrho}$ existiert, der sowohl in $\pi_0(\mathcal{A}_\xi)$ als auch in $\pi_0(\mathcal{A}_\zeta)$ liegt. Sind $S_1 \in \mathcal{A}_\xi$ bzw. $S_2 \in \mathcal{A}_\zeta$ die entsprechenden Urbilder, so definiert

$$S_\varrho := S_1^* S_2$$

einen globalen Intertwiner von ϱ nach ϱ. Entscheidend ist nun, daß S_ϱ in der Vakuumdarstellung trivial ist, während $\pi_0\sigma(S_\varrho)$ gerade der Monodromie-Operator ist:

$$\pi_0\sigma(S_\varrho) = \pi_0(\epsilon(\varrho,\sigma)\epsilon(\sigma,\varrho)) \quad .$$

Von der Wahl des "Punktes bei Unendlich" hängt also grob gesprochen ab, ob I rechts oder links von J liegt und somit die Lage der Lokalisationsgebiete von Morphismen relativ zueinander, vgl. auch Kapitel 1. Die Auszeichnung eines solchen Punktes ξ ist im Fall von Theorien auf der reellen Geraden, wie sie von uns betrachtet werden, aber in natürlicher Weise vorgegeben. Die Wahl eines Blattes in der Überlagerung, die auf S^1 notwendig ist, erübrigt sich daher.

Wir haben oben gesehen, daß alle Voraussetzungen der Haag-Ruelle-Streutheorie erfüllt sind, die wir jetzt kurz vorstellen wollen, um sie dann auf unser konkretes Beispiel anzuwenden, vgl. [13], [2], und im Fall von Lokalisation in raumartigen Kegeln in $2+1$ Dimensionen [53]. Seien daher $B' \in \mathcal{A}_1(\mathcal{O})$ für einen Doppelkegel $\mathcal{O}$ und $\mathbf{B}' = \{\varrho, B'\}$ das assoziierte Feld. Ferner sei g eine Schwartzfunktion auf dem Minkowski-Raum, deren Fourier-transformierte das Spektrum von $\mathbf{B}'\mathbf{\Omega}$ nur auf der Massenschale schneidet. Definiere dann einen Einteilchenzustand vermöge

$$\mathbf{B} := \int d^2x g(x)\alpha_x(\mathbf{B}') \quad .$$

Durch unsere Wahl von g und B' haben wir sichergestellt, daß $\mathbf{B}$ fast-lokal ist. Ist nun

$$f(x) = \int dp \tilde{f}(p) e^{i(px^1 - E_p t)}$$

mit

$$\tilde{f}(p) \in \mathcal{C}_0^\infty \quad \text{und} \quad E_p = \sqrt{p^2+m^2}$$

eine $\mathcal{C}^\infty$-Lösung positiver Energie der Klein-Gordon-Gleichung zur Masse m, so definiert man mit Hilfe von

$$\mathbf{B}_f(t) := \int_{x^0=t} dx^1 f(x)\alpha_x(\mathbf{B})$$

einen Eigenvektor des Masse-Operators M^2 zum Eigenwert m^2 (also einen Einteilchen-Zustandsvektor), der nicht von der Zeit abhängt:

$$\Psi := \mathbf{B}_f(t)\mathbf{\Omega} = \{\varrho, \psi\} \quad .$$

Mit anderen Worten: Man definiert Einteilchen-Zustände zu einer festen Zeit und propagiert diese mit Hilfe einer Lösung der Klein-Gordon-Gleichung zu beliebigen Zeiten. Im nächsten Schritt konstruiert man in kanonischer Weise Vielteilchenzustände

$$\mathbf{B}_{f_n}(t)\ldots\mathbf{B}_{f_1}(t)\mathbf{\Omega} \quad ,$$

wobei wir annehmen [52], vgl. auch [13], daß die f_i im Rapiditätsraum paarweise disjunkten Träger haben [25], und zeigt die starke Konvergenz der Ausdrücke

$$\Psi_n \times_{in} \ldots \times_{in} \Psi_1 := \lim_{t\to-\infty} \mathbf{B}_{f_n}(t)\ldots\mathbf{B}_{f_1}(t)\mathbf{\Omega}$$

bzw.

$$\Psi_n \times_{out} \ldots \times_{out} \Psi_1 := \lim_{t\to+\infty} \mathbf{B}_{f_n}(t)\ldots\mathbf{B}_{f_1}(t)\mathbf{\Omega} \quad ,$$

so daß es Sinn macht, diese Objekte als ein- bzw. auslaufende Streuzustände zu interpretieren.
Wir wollen jetzt Skalarprodukte von Streuzuständen explizit ausrechnen. Hierzu benötigen wir eine Version des sogenannten Cluster-Theorems, deren Beweis man in [13] oder [53] finden kann.

Lemma 5.1: Seien

$$\mathbf{B}_i = \{\varrho_i, B_i\} \in \mathbf{F}(\mathcal{O}_i) \quad , i = 1, \ldots, 4$$

mit $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 \times \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_4$ und $\mathbf{T} = (\varrho_3\varrho_4|T|\varrho_1\varrho_2)$. Setze

$$\tau := \sup\{|t| \mid \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 + (t,0) \subset (\mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_4)'\} \quad .$$

Sind dann $\varrho_1 = \varrho_3$ lokalisierte, Poincaré-kovariante, irreduzible Morphismen, so gilt

$$|(\mathbf{B}_4\mathbf{B}_3\mathbf{\Omega}, \mathbf{T}\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1\mathbf{\Omega}) - (\mathbf{B}_3\mathbf{\Omega}, \mathbf{B}_1\mathbf{\Omega})(\mathbf{B}_4\mathbf{\Omega}, \phi_1(\mathbf{T})\mathbf{B}_2\mathbf{\Omega})| < c_n \tau^{-n} \|\mathbf{T}\| \prod_{i=1}^{4} \|\mathbf{B}_i\|^{26}$$

für alle n, wobei ϕ_1 das (eindeutig bestimmte) Linksinverse zu ϱ_1 ist und $\phi_1(\mathbf{T}) = (\varrho_4|\phi_1(\mathbf{T})|\varrho_2)$; c_n hängt nur von der Ladung der $\mathbf{B}_i$ ab.

Sei nun $\Psi_i = \mathbf{B}_{f_i}(t)\mathbf{\Omega} = \{\varrho_i, \psi_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, eine Menge von normierten Einteilchenzuständen mit paarweise disjunktem Träger im Rapiditätsraum, wobei sämtliche ϱ_i Kopien von ϱ_λ sein sollen. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Indizes nach wachsender Rapidität geordnet sind:

$$\mathrm{supp}\tilde{f}_i \;<\; \mathrm{supp}\tilde{f}_{i+1} \quad , i = 1, \ldots, n-1 \quad ,$$

[25] Diese Forderung stellt sicher, daß die Streuzustände schneller als jede inverse Potenz von $|t|$ konvergieren.

[26] Es läßt sich sogar eine exponentielle Schranke beweisen, siehe z.B. [53]

d.h. $\mathrm{supp}\tilde{f}_i$ liege im Rapiditätsraum links von $\mathrm{supp}\tilde{f}_{i+1}$. Dann ist nach Konstruktion klar, daß sich im Limes großer Zeiten die Konfiguration

$$(\Psi_1, \mathcal{O}_1) < \ldots < (\Psi_n, \mathcal{O}_n)$$

und für $t \to -\infty$ die Anordnung

$$(\Psi_n, \mathcal{O}_n) < \ldots < (\Psi_1, \mathcal{O}_1)$$

einstellen. Diese aus- bzw. einlaufenden Konfigurationen werden aber gerade verknüpft durch die unitäre Transformation

$$S_\lambda = (-e^{i2\pi\lambda})^{\sum_{i<j} 1}\mathbf{1} = (-e^{i2\pi\lambda})^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathbf{1} \quad .$$

Damit erhält man durch wiederholte Anwendung von Lemma 5.1 [13], [53]:

$$((\Psi_n, \mathcal{O}_n) \times_{out} \ldots \times_{out} (\Psi_1, \mathcal{O}_1), S_\lambda(\Psi_n, \mathcal{O}_n) \times_{out} \ldots \times_{out} (\Psi_1, \mathcal{O}_1))$$

$$= (-e^{i2\pi\lambda})^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad .$$

Schließlich wollen wir in der obigen Betrachtung für die Einteilchenzustände $\Psi_i = \{\varrho_i, \psi_i\}$ unterschiedliche Werte von λ zulassen, d.h. $\varrho_i = \varrho_{\lambda_i}$, und lediglich $\sum_i \lambda_i = \Lambda$ (Λ fest vorgegeben) fordern. Dann werden ein- und auslaufende Streuzustände aber durch

$$S_\Lambda = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{i\pi(n-1)\Lambda}$$

verknüpft; mit anderen Worten: Der auftretende Phasenfaktor hängt nur von der "Gesamtladung" Λ ab.
Wir interpretieren dieses Ergebnis in der folgenden Weise: Die Morphismen ϱ_λ beschreiben freie Anyonen, deren Streuverhalten allein durch den statistischen Parameter bestimmt ist, welcher seinerseits mit der Kopplungskonstanten des Federbush-Modells verknüpft ist. Die in der S-Matrix auftretende Phase trägt zum Streuquerschnitt nicht bei; folgt man einem Vorschlag von Swieca [54] und spaltet die Streumatrix in einen kinematischen und einen dynamischen Anteil auf, so ist in unserem Fall der dynamische Teil trivial. Wir bemerken, daß man z.B. im Fall des Sinus-Gordon-Modells eine analoge Interpretation wählen kann [55].

6 Zusammenfassung und Ausblick

Es ist gelungen, mit Hilfe von implementierbaren Bogoliubov-Transformationen lokalisierte DHR-Morphismen anzugeben, die nicht-triviale (anyonische) Statistik aufweisen und mit dem Federbush-Modell eng verwandt sind bzw. sogar als lokalisierte Morphismen dieser Theorie gelten können. Völlig analog lassen sich auch Morphismen für weitere Modelle wie z.B. das masselose Thirring-Modell oder das Ising-Modell im Skalenlimes konstruieren, jedoch tritt hierbei keine exotische Statistik auf (das massive Federbush-Modell zerfällt für $m(s) \to 0$ in zwei entkoppelte masselose Thirring-Modelle mit Kopplungskonstanten λ und $-\lambda$; wir haben aber gesehen, daß die entsprechenden Bogoliubov-Transformationen bei $m = 0$ nur für ganzzahliges λ implementierbar sind, so daß man stets Fermi-Dirac-Statistik erhält).

Es ist nun eine interessante Frage, ob der in der Streumatrix auftretende Phasenfaktor Experimenten zugänglich ist. Wir haben bereits erwähnt, daß das gefundene Streuverhalten "typisch" für Solitonen ist. Man könnte daher an eine Realisierung der folgenden Form denken, die von Goldstone und Wilczek in [56] vorgeschlagen worden ist: Betrachte ein Polyacetylen-Molekül, dessen Grundzustand schematisch auf zwei verschiedene Weisen dargestellt werden kann:

$$A: \quad \ldots//\backslash//\backslash//\backslash\ldots \quad \text{oder} \quad B: \quad \ldots/\backslash\backslash/\backslash\backslash/\backslash\backslash\ldots \quad ,$$

d.h. Einfach- und Doppelbindungen alternieren jeweils. Eine Störung dieses Grundzustandes der Gestalt

$$\ldots/\backslash\backslash/\backslash//\backslash//\backslash\ldots$$

läßt sich durch endliche Umordnungen von Elektronenbindungen nicht in eine der Formen A oder B überführen und stellt ein Soliton dar. Baut man nun zwei Störungen ein,

$$\ldots/\backslash\backslash/\backslash//\backslash/\backslash\backslash\ldots \quad ,$$

so kann man diesen Zwei-Solitonen-Zustand durch "Hinzufügen eines Elektrons" in den Grundzustand B überführen; ein Soliton trägt somit quasi eine halbzahlige "Ladung". Su und Schrieffer haben für andere Polymere weitere "fraktionelle Ladungen" angegeben, vgl. [57] und die dort angegebene Literatur. Man könnte versuchen, in langkettigen Molekülen solche Störungen an verschiedenen Stellen anzuregen und die Existenz des Phasenfaktors durch einen Vergleich von Laufzeiten mit und ohne Streuung nachzuweisen. Ein ähnliches Konzept ließe sich eventuell auch in Spin-Ketten umsetzen [27]. Wir wollen an dieser Stelle qualitativ diskutieren, warum sol-

[27] Bemerkenswerterweise findet man solche solitonische Ausbreitung auch im menschlichen Nervensystem: Reizinduzierte Impulse propagieren längs der Axonen ohne Änderung der Signalform [58].

che Laufzeitdifferenzen für Solitonen in gewissen Modellen zu erwarten sind [63], müssen jedoch feststellen, daß in unserem Fall kein solcher Effekt auftreten sollte. Betrachte zunächst ein klassisches Teilchen der Energie E in einer Raumdimension, das sich in einem zeitunabhängigen Zentralpotential, welches im Unendlichen verschwindet, bewegt. Zur Zeit t_i befinde sich das Teilchen bei x_i und entsprechend zu einer späteren Zeit t_f bei x_f. Bezeichnet dann v die Geschwindigkeit, so gilt (siehe z.B. auch [64])

$$\begin{aligned} t_f - t_i &= \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{v(x,E)} \\ &= \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_i}^{x_f} dx p(x,E) \\ &= \frac{\partial}{\partial E}[S + E(t_f - t_i)] \quad , \end{aligned}$$

wobei $S := \int_{t_i}^{t_f} dt L(x,\dot{x})$ die Wirkung ist; t_f ist hierbei natürlich als Funktion von x_f und E aufzufassen. Diese Beziehung bleibt nun auch im feldtheoretischen Zusammenhang gültig, denn vermöge der Euler-Lagrange-Gleichungen erhält man mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})$:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial E}[\int_{t_i}^{t_f} dt \int dx \mathcal{L} + E(t_f - t_i) \\ &= (t_f - t_i) + (E - \int dx \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi}|_{t=t_f} + L_{t=t_f}) \tfrac{\partial t_f}{\partial E} \\ &= t_f - t_i \quad . \end{aligned}$$

Andererseits ist aber für die freie Theorie

$$t_f - t_i = \frac{\partial}{\partial E}[p(E)(x_f - x_i)] \quad ,$$

woraus man durch Differenzbildung findet:

$$\Delta t(E) = \lim \frac{\partial}{\partial E}[S + E(t_f - t_i) - p(E)(x_f - x_i)] \quad .$$

Hierbei ist der Limes für $t_i, x_i \to -\infty$ und $t_f, x_f \to \infty$ (wobei t_f und x_f durch die Dynamik des Systems korreliert sind) zu betrachten. Für Potentiale endlicher Reichweite genügt es natürlich, wenn z.B. x_i links und x_f rechts vom Lokalisationsgebiet des Potentials (das als zusammenhängend angenommen werden soll) liegt. Auf der anderen Seite wird nun die Schrödinger-Gleichung für einen Hamiltonoperator H in der WKB-Näherung gelöst durch

$$\psi(x) = e^{iu(x)} \quad ,$$

wobei für eine klassisch unbeschränkte Bewegung

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} dx' p(x', E)$$

gilt, d.h. es tritt ausschließlich Transmission auf, und zwar mit einer Amplitude $S(E) = e^{i2\delta(E)}$, wobei $\delta(E)$ durch diese Relation definiert wird (im Rahmen der Streutheorie ist $S(E)$ Eigenwert der S-Matrix und hat wegen deren Unitarität den Betrag eins). Die Phasenverschiebung $\delta(E)$ wird in der WKB-Approximation gegeben durch

$$\delta(E) = \lim \int_{x_i}^{x_f} dx[p(x,E) - p(E)] \quad ;$$

hierbei ist der Limes wieder im obigen Sinne aufzufassen. Durch Vergleich erhält man daher

$$\Delta t(E) = \frac{d}{dE} 2\delta(E) \quad .$$

Man sollte erwarten, daß dieses Resultat für Quantenfeldtheorien im semiklassischen Limes gültig bleibt.

Insgesamt haben wir daher folgende Argumentationskette: Die Eigenwerte der S-Matrix hängen im allgemeinen von der Energie ab; die assoziierte Streuphase $\delta(E)$ sollte sich dann in einer Laufzeitdifferenz $\Delta t(E)$ manifestieren. Für das Federbush-Modell ist die Streuphase jedoch energieunabhängig, woraus $\Delta t(E) = 0$ resultiert. Obwohl daher die Lagrangedichte der Federbush-Theorie auf ein wechselwirkendes Modell hindeutet, sehen wir keine Möglichkeit, das Federbush-Feld experimentell vom freien Feld zu unterscheiden.

A Anhang

A.1 C^*- und von-Neumann-Algebren

Wir stellen der Vollständigkeit halber einige im Zusammenhang mit Operatoralgebren wichtige Begriffe vor, vgl. [59]. Ist A ein komplexer Banachraum versehen mit einer Algebrastruktur derart, daß

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in A \;\; ,$$

so nennt man A eine *Banach-Algebra*. Existiert ferner eine normerhaltende Involution * auf A mit der Eigenschaft

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A \;\; ,$$

so heißt A eine *C^*-Algebra*.
Ein lineares Funktional ω auf einer C^*-Algebra A heißt *positiv*, falls $\omega(x^*x) \geq 0 \;\forall x \in A$. Ein positives lineares Funktional ω auf A mit $\omega(\mathbf{1}) = 1$ wird als *Zustand* auf A bezeichnet. Bemerkenswerterweise induziert jedes positive lineare Funktional ω auf einer C^*-Algebra A eine Darstellung π_ω von A auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_\omega$ mit einem Vektor Ω_ω derart, daß $\pi_\omega(A)\Omega_\omega$ dicht ist in $\mathcal{H}_\omega$ und $\omega(x) =< \Omega_\omega, \pi_\omega(x)\Omega_\omega > \quad \forall x \in A$; dies ist die Aussage des bekannten Gelfand-Naimark-Segal-Theorems (GNS-Konstruktion).
Sei nun $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$ und setze für $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{M}' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | xM = Mx \;\; \forall M \in \mathcal{M}\} \quad ;$$

$\mathcal{M}'$ ist die sogenannte *Kommutante* von $\mathcal{M}$ und nach Konstruktion eine unitale Banach-Algebra. Ist eine Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ invariant unter der Involution, so spricht man von einer **-Unteralgebra*. Unter einer *von-Neumann-Algebra* in $\mathcal{H}$ versteht man eine *-Unteralgebra $\mathcal{M}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{M} = (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}''$.

A.2 Die Gruppe $U_{res}(\mathcal{H})$

Wir wollen in diesem Anhang eine etwas geometrischere Sichtweise vorstellen, die z.B. in [60], [61] eingehend diskutiert worden ist. Man faßt in diesem Zugang diejenigen Vektoren im Fockraum, welche den reinen, quasifreien Zuständen entsprechen, als Schnitte eines komplexen Geradenbündels $\mathbf{DET}^*$ (des dualen Determinantenbündels) über einer komplexen Hilbert-Mannigfaltigkeit $\mathbf{Gr}$ (dem sogenannten Grassmannian) auf.

Definition: Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ ein Hilbertraum mit gegebener Polarisation. Dann ist der *Grassmannian* $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$ die Menge aller abgeschlossenen Unterräume W von $\mathcal{H}$ derart, daß

(i) $P_+ : W \longrightarrow \mathcal{H}_+$ ist ein Fredholm-Operator;

(ii) $P_- : W \longrightarrow \mathcal{H}_-$ ist ein Hilbert-Schmidt-Operator.

Bemerkung: $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$ ist eine glatte komplexe Hilbert-Mannigfaltigkeit, die lokal aussieht wie der Raum $\mathcal{J}_2(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-)$ der Hilbert-Schmidt-Operatoren von $\mathcal{H}_+$ in $\mathcal{H}_-$, deren Zusammenhangskomponenten durch den Fredholm-Index von P_+ indiziert werden [28].

Die Gruppe $GL(\mathcal{H})$ aller beschränkten invertierbaren Operatoren auf $\mathcal{H}$ operiert nicht auf $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$, da die Eigenschaften (i) und (ii) nicht respektiert werden. Man geht daher zu einer geeigneten Untergruppe, der eingeschränkten linearen Gruppe über, die dann auf dem Grassmannian wirkt.

Definition: Sei $A \in GL(\mathcal{H})$; A habe bezüglich der Polarisation $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A \in GL_{res}(\mathcal{H})$, falls A_{+-} und A_{-+} Hilbert-Schmidt-Operatoren sind.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß die Untergruppe $U_{res}(\mathcal{H}) \subset GL_{res}(\mathcal{H})$ eine reelle Banach-Lie-Gruppe ist, deren Komplexifizierung gerade $GL_{res}(\mathcal{H})$ ist.
Die von uns betrachteten Bogoliubov-Operatoren liegen folglich in $U_{res}(\mathcal{H})$. Projektive Darstellungen dieser Gruppe werden durch die Wahl eines 2-Kozykels zu einer eigentlichen Darstellung einer zentralen Erweiterung $U_{res}(\mathcal{H})^{\sim}$ von $U_{res}(\mathcal{H})$. Als topologische Räume sind die zentralen Erweiterungen $U_{res}(\mathcal{H})^{\sim}$ Faserbündel über $U_{res}(\mathcal{H})$ mit Faser $U(1)$ und werden als solche durch ihre (erste) Chern-Klasse charakterisiert. Die Wirkung von $U_{res}(\mathcal{H})$ auf $\mathbf{Gr}(\mathcal{H})$ läßt sich zu einer holomorphen Operation von $U_{res}(\mathcal{H})^{\sim}$ auf $\mathbf{DET}^*$ liften, d.h. man erhält auf diese Weise eine Darstellung von $U_{res}(\mathcal{H})^{\sim}$ im Fockraum. Die zu der von uns untersuchten Darstellung $\tilde{\Gamma}$ assoziierte Darstellung $\tilde{c}(f) := c(P_+ f) + c^*(\overline{P_- f})$ der CAR-Algebra $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ ist nun (bis auf unitäre Äquivalenz) die einzige Darstellung positiver Energie bezüglich der durch e^{itH} induzierten Zeitautomorphismengruppe [62].

[28] Einen Beweis dieser Aussagen findet man z.B. in [60].

Literatur

[1] D. Buchholz, K.Fredenhagen: Locality and structure of particle states. Commun.Math.Phys. **84**, 1 (1982)

[2] R.Haag: Local Quantum Physics. Springer (1992)

[3] J.Leinaas, J.Myrheim: On the theory of identical particles. Il Nuovo Cimento **37 B**, 1 (1977)

[4] F.Wilczek: Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles. Phys.Rev.Lett. **49**, 957 (1982)

[5] A.Lerda: Anyons. Springer (1992)

[6] S.Ruijsenaars: Index Formulas for Generalized Wiener-Hopf Operators and Boson-Fermion Correspondence in $2N$ Dimensions. Commun.Math.Phys. **124**, 553 (1989)

[7] J.Glimm, A.Jaffe: Constructive Quantum Field Theory: Selected Papers. Birkhäuser (1985)

[8] R.Streater, A.Wightman: PCT, Spin and Statistics, and All That. Benjamin (1964)

[9] R.Haag, D.Kastler: An algebraic approach to quantum field theory. J.Math.Phys. **5**, 848 (1964)

[10] H.Araki: A lattice of von Neumann algebras associated with the quantum theory of a free Bose field. J.Math.Phys. **4**, 1343 (1963)

[11] D.Kastler (ed.): The Algebraic Theory of Superselection Sectors. Introduction and Recent Results. World Scientific (1990)

[12] S.Doplicher, R.Haag, J.Roberts: Fields, observables and gauge transformations I+II. Commun.Math.Phys. **13**, 1 (1969) bzw. Commun.Math.Phys. **15**, 173 (1969)

[13] S.Doplicher, R.Haag, J.Roberts: Local observables and particle statistics I+II. Commun.Math.Phys. **23**, 199 (1971) bzw. Commun.Math.Phys. **35**, 49 (1974)

[14] S.Doplicher, J.Roberts: Fields, statistics and nonabelian gauge groups. Commun.Math.Phys. **28**, 331 (1972)

[15] J.Böckenhauer: Lokale Normalität und lokalisierte Morphismen des chiralen Ising-Modells. Diplomarbeit, Hamburg 1994

[16] S.Doplicher, J.Roberts: Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics. Commun.Math.Phys. **131**, 51 (1990)

[17] H.Rehren: Field Operators for anyons and plektons. Commun.Math.Phys. **145**, 123 (1992)

[18] G.Mack, V.Schomerus: Quasi Hopf Quantum Symmetry in Quantum Theory. Nucl.Phys. **B 370**, 185 (1992)

[19] V.Schomerus: Construction of Field Algebras with Quantum Symmetry from Local Observables. Preprint hep-th 9401042 (1994)

[20] K.Fredenhagen, H.Rehren, B.Schroer: Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebra I. General Theory. Commun.Math.Phys. **125**, 201 (1989)

[21] K.Fredenhagen, H.Rehren, B.Schroer: Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebra II. Geometric aspects and conformal covariance. Rev.Math.Phys., special issue, 113 (1992)

[22] D.Kastler, M.Mebkhout, H.Rehren: Introduction to the algebraic theory of superselection sectors, in [11]

[23] H.Rehren: Quantum Symmetry associated with braid group statistics. Proceedings Clausthal-Zellerfeld (1989)

[24] H.Rehren, B.Schroer: Einstein causality and Artin braids. Nucl.Phys. **B 312**, 3 (1989)

[25] K.Fredenhagen: Structure of superselection sectors in low-dimensional quantum field theory. Proceedings Lake Tahoe (1989)

[26] J.Roberts: Lectures on Algebraic Quantum Field Theory, in [11]

[27] R.Longo: Index of subfactors and statistics of quantum fields I+II. Commun.Math.Phys. **126**, 217 (1989) bzw. Commun.Math.Phys. **130**, 285 (1990)

[28] R.Streater, I.Wilde: Fermion states of a Bose field. Nucl.Phys. **B 24**, 561 (1970)

[29] A.Carey, S.Ruijsenaars: On Fermion Gauge Groups, Current Algebras and Kac-Moody Algebras. Acta Appl.Math **10**, 1 (1987)

[30] K.Fredenhagen: Implementation of automorphisms and derivations of the CAR-algebra. Commun.Math.Phys. **52**, 255 (1977)

[31] H.Araki: Bogoliubov automorphisms and Fock representations of canonical anticommutation relations. Contemporary Mathematics **62**, 23 (1987)

[32] D.Shale, W.Stinespring: States of the Clifford algebra. Ann.Math. **80**, 365 (1964)

[33] K.Friedrichs: Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Interscience Publ. (1953)

[34] A.Carey, C.Hurst, D.O'Brien: Automorphisms of the Canonical Anticommutation Relations and Index Theory. J.Funct.Anal. **48**, 360 (1982)

[35] C.Binnenhei: Bogoliubov-Transformationen und lokalisierte Morphismen für freie Diracfelder. Diplomarbeit, Hamburg 1993

[36] F.Hirzebruch, W.Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis. B.I. Hochschultaschenbücher Bd. 296 (1971)

[37] B.Booß: Topologie und Analysis. Springer (1977)

[38] N.Wegge-Olsen: K-Theory And C^*-Algebras. Oxford University Press (1993)

[39] J.Mingo: K-Theory and multipliers of stable C^*-Algebras. Trans.Amer.Math.Soc. **299**, 397 (1987)

[40] S.Lang: Algebra. Addison-Wesley (1993)

[41] M.Reed, B.Simon: Methods of modern mathematical physics I-III. Academic Press (1972-1979)

[42] S.Ruijsenaars: Integrable Quantum Field Theories and Bogoliubov Transformations. Ann.Phys. **132**, 328 (1981)

[43] S.Ruijsenaars: The Wightman axioms for the fermionic Federbush model. Commun.Math.Phys. **87**, 181 (1982)

[44] P.Federbush: A two-dimensional relativistic field theory. Phys.Rev. **121**, 1247 (1961)

[45] A.Raina, G.Wanders: The Gauge Transformations of the Schwinger Model. Ann.Phys. **132**, 404 (1981)

[46] G.Labonté: On the nature of "strong" Bogoliubov transformations for fermions. Commun.Math.Phys. **36**, 59 (1974)

[47] A.Wightman: Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields. Vorlesungen anläßlich der French Summer School of Theoretical Physics, Cargèse 1964

[48] J.Bisognano, E,Wichmann: On the duality condition for quantum fields. J.Math.Phys. **17**, 303 (1976)

[49] K.Fredenhagen: Generalization of the theory of superselection sectors, in [11]

[50] K.Fredenhagen: Superselection Sectors in Low Dimensional Quantum Field Theory. Proceedings of the Karpacz Winter School (1992)

[51] S.Ruijsenaars: Scattering Theory for the Federbush, Massless Thirring and Continuum Ising Models. J.Funct.Anal. **48**, 135 (1982)

[52] K.Hepp: On the Connection Between Wightman and LSZ Quantum Field Theory. Proceedings Brandeis (1965)

[53] K.Fredenhagen, M.Gaberdiel, S.Rüger: Scattering States of Plektons (Particles with Braid Group Statistics) in $2+1$ Dimensional Quantum Field Theory. Preprint (1994)

[54] B.Schroer: Algebraic QFT as a framework for classification and model building. A heretic view of the new kinematics, in [11]

[55] B.Schroer: Scattering properties of anyons and plektons. Nucl.Phys. **B 369**, 478 (1992)

[56] J.Goldstone, F.Wilczek: Fractional Quantum Numbers on Solitons. Phys.Rev.Lett. **47**, 986 (1981)

[57] F.Wilczek: Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. World Scientific (1990)

[58] J.Changeux, A.Connes: Gedankenmaterie. Springer (1994)

[59] M.Takesaki: Theory of Operator Algebras I. Springer (1979)

[60] A.Pressley, G.Segal: Loop Groups. Clarendon Press, Oxford (1986)

[61] J.Mickelsson: Current Algebras and Groups. Plenum Press (1989)

[62] M.Weinless: Existence and uniqueness of the vacuum for linear quantized fields. J.Funct.Anal. **4**, 350 (1969)

[63] R.Jackiw, G.Woo: Semiclassical scattering of quantized nonlinear waves. Phys.Rev. **D 12**, 1643 (1975)

[64] R.Abraham, J.Marsden: Foundations of Mechanics. Addison-Wesley (1978)

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Fredenhagen für die interessante Themenstellung sowie die hilfreiche Betreuung der Arbeit; ferner meinen Kommilitonen für zahlreiche Diskussionen und meinen Eltern für die Unterstützung während meines Studiums.

Erklärung

Ich versichere, daß ich die Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Hamburg, Mai 1995