Zum Anomalie-Problem der Master-Ward-Identität

Diplomarbeit

vorgelegt von

Ferdinand Brennecke

Oktober 2005

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

Gutachter der Diplomarbeit:
Prof. Dr. K. Fredenhagen
Prof. Dr. G. Mack

Abstract

In this diploma thesis we investigate in the framework of perturbative algebraic quantum field theory the anomalies of the master Ward identity, which was proposed in [1] as a new, universal renormalization condition. By showing the validity of a similar identity, we get a better understanding of these anomalies. We develop an effective field formalism and find analogies between this identity and the quantum action principle of Lam and Lowenstein. As an application of the master Ward identity we consider the problem of consistent interactions between gauge fields and give a cohomological derivation of the Yang-Mills interaction in gauge fixed BRST-formalism.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich im Rahmen der perturbativen algebraischen Quantenfeldtheorie mit der Frage der Erfüllbarkeit der Master-Ward-Identität, welche als neue und universelle Renormierungsbedingung in [1] vorgeschlagen wurde. Wir zeigen die Gültigkeit einer ähnlichen Identität, in der die Anomalien der Master-Ward-Identität konkret zum Ausdruck kommen. Durch die Entwicklung eines effektiven Feldformalismus wird es möglich, die gefundene Identität mit dem auf Lam und Lowenstein zurückgehenden Quantenwirkungsprinzip in Beziehung zu setzen. Als eine Anwendung der Master-Ward-Identität betrachten wir das Problem konsistenter Wechselwirkungen zwischen Eichfeldern und geben eine kohomologische Ableitung der Yang-Mills-Wechselwirkungsterme im eichfixierten BRST-Formalismus an.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Ein zentrales Problem der theoretischen Physik ist die Angabe einer konsistenten Quantisierungsmethode für Eichtheorien. Dieser Fragestellung liegt die Tatsache zugrunde, dass sich die vier bekannten fundamentalen Wechselwirkungen der Materie durch Eichtheorien beschreiben lassen. In der Quantenfeldtheorie, die den theoretischen Rahmen der heutigen Elementarteilchenphysik bildet, wurden unterschiedliche Ansätze zur Beantwortung dieser Frage verfolgt.

Im Pfadintegralzugang zur Quantenfeldtheorie wird die Quantisierung von Yang-Mills-Theorien – einer speziellen Klasse von Eichtheorien – hinsichtlich der Resultate während der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts als weitgehend gelöst angesehen: Nach der erfolgreichen Entwicklung der Quantenelektrodynamik durch Tomonaga, Schwinger, Feynman und Dyson und zunächst vergeblichen Versuchen, die entwickelten Methoden auf allgemeinere Eichtheorien zu übertragen, konnten Faddeev und Popov [2] durch die Einführung zusätzlicher unphysikalischer Felder (Faddeev-Popov-Geister) in die Lagrange-Dichte erstmals auch für nichtabelsche Eichtheorien eine unitäre S-Matrix und konsistente Feynman-Regeln angeben. Becchi, Rouet, Stora [3, 4] und Tyutin [5] reformulierten die durch die Einführung der Geistfelder gebrochene Eichsymmetrie in Form einer globalen und nilpotenten Symmetrie (BRST-Symmetrie). Die wesentliche Schwierigkeit bestand nun darin, die durch die Anwendung eines Renormierungsverfahrens hervorgerufene Verletzung der BRST-Symmetrie explizit zu kontrollieren. Unter Verwendung des auf die Arbeiten von Lam [6] und Lowenstein [7] zurückgehenden Quantenwirkungsprinzips wurde eine algebraische Analyse der auftretenden Anomalien möglich (algebraische Renormierung [8]). Die Frage nach der Erhaltung der BRST-Symmetrie in einer quantisierten Eichtheorie wurde damit auf die Bestimmung gewisser Kohomologien des BRST-Operators zurückgeführt [9].

Trotz dieser Erfolge weist das skizzierte Verfahren gewisse ernstzunehmende Probleme auf: Der funktionale Zugang beruht auf einigen heuristischen Überlegungen in Zusammenhang mit dem Pfadintegral und ermöglicht kaum Einsichten in die Operator- und Zustandsstruktur der Theorie. Einen mathematisch konsistenten Rahmen der Quantenfeldtheorie bildet die algebraische Quantenfeldtheorie. Sie betrachtet die lokalen Observablenalgebren als die zentralen Objekte und versucht anhand ihrer Strukturen und gegenseitigen Beziehungen auf grundlegende Eigenschaften des jeweiligen quantenfeldtheoretischen Modells zu schließen. Eine explizite Konstruktion der lokalen Observablenalgebren einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie im Rahmen der kausalen Störungstheorie wurde in [10] begonnen. Dieses von Bogoliubov und Stückelberg [11] sowie Epstein und Glaser [12] entwickelte Renormierungsverfahren unterscheidet sich von den übrigen Renormierungsschemata durch die Verwendung einer raumzeitabhängigen Kopplungskonstanten $g(x)$, die dazu dient, die Wechselwirkung auf der Grundlage einer freien Theorie nur in einem beschränkten Raumzeitgebiet (dem Träger von g) einzuschalten. Das fundamentale Objekt der kausalen Störungstheorie bildet die lokale g-abhängige S-Matrix, welche im Grenzfall $g \to 1$ (adiabatischer Limes) formal gegen die Dyson-Reihe des Zeitentwicklungsoperators im Wechselwirkungsbild strebt. Hinsichtlich der dabei auftretenden Infrarot-Divergenzen ist ein solcher Grenzübergang meist nur in Theorien massiver Teilchen mathematisch durchführbar. Ausgehend von physikalisch motivierten Forderungen an die lokale S-Matrix (Kausalität, Unitarität, Poincaré-Invarianz) lassen sich ihre Bausteine – die zeitgeordneten Produkte – in einem induktiven Verfahren bis auf gewisse Normierungsfreiheiten konstruieren. Es ist ein wesentliches Merkmal dieser Konstruktion, dass keine Ultraviolett-Divergenzen auftreten. Die verbleibenden Normierungsfreiheiten zeitgeordneter Produkte können in gewissen Fällen dazu verwendet werden, weitere Forderungen (z.B. Symmetrieeigenschaften) an die lokale S-Matrix zu erfüllen. Schließlich lassen sich aus der lokalen S-Matrix mit Hilfe der Formel von Bogoliubov wechselwirkende Felder bezüglich der im Trägergebiet von g lokalisierten Wechselwirkung konstruieren, die bei geeigneter Normierung der zeitgeordneten Produkte die Feldgleichungen der wechselwirkenden Theorie erfüllen.

Die kausale Störungstheorie eignet sich nicht nur durch ihren expliziten Operatorcharakter für die Konstruktion lokaler wechselwirkender Observablenalgebren. Wie Brunetti und Fredenhagen in [13] bewiesen, hängen die algebraischen Eigenschaften der wechselwirkenden Felder, lokalisiert in einem gewissen Raumzeitgebiet, nur von der Form der Wechselwirkung in einem etwas größeren Raumzeitgebiet ab. Damit ist für die Konstruktion der lokalen wechselwirkenden Observablenalgebren die Durchführung eines Grenzprozesses $g \to 1$ nicht nötig (algebraischer adiabatischer Limes). Überdies eignet sich die kausale Störungstheorie – als ein Renormierungsverfahren, das ausschließlich im Ortsraum arbeitet – besonders für die Konstruktion von Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten [13, 14].

Die Bestimmung der lokalen Observablenalgebren einer Eichtheorie erfordert ein konsistentes Verfahren zur Eliminierung der nichteichinvarianten Feldausdrücke. Hierfür eignet sich der auf Kugo und Ojima [15] zurückgehende und von Dütsch und Fredenhagen [16] weiterentwickelte Operator-BRST-Formalismus, der als eine Verallgemeinerung der aus der Quantenelektrodynamik bekannten Gupta-Bleuler-Methode auf allgemeinere Eichtheorien angesehen werden kann. Die Algebra der Observablen wird dabei konstruiert als die Kohomologie der nilpotenten BRST-Transformation in der Algebra aller Felder. Ausgehend von einer Darstellung der gesamten Feldalgebra auf einem linearen Raum mit indefinitem inneren Produkt, kann eine Hilbert-Raum-Darstellung der so definierten Observablenalgebra explizit konstruiert werden. Dieser Hilbert-Raum wird dann als der Raum der physikalischen Zustände interpretiert.

Die Wohldefiniertheit der lokalen S-Matrix auf dem Raum der physikalischen Zustände erfordert die Invarianz der zeitgeordneten Produkte der Wechselwirkungsterme unter BRST-Transformation. Im Fall von Theorien mit massiven Teilchen kann der Generator Q der BRST-Transformation (BRST-Ladung) mit der einlaufenden (freien) BRST-Ladung Q_0 identifiziert werden. Dies motiviert die Formulierung einer allgemeinen Normierungsbedingung an die zeitgeordneten Produkte (perturbative Eichinvarianz [17]), die im adiabatischen Limes die Definiertheit der S-Matrix auf dem Raum der physikalischen Zustände garantiert. Die Erfüllbarkeit der perturbativen Eichinvarianz konnte in Modellen mit zusätzlichen Skalarfeldern (interpretierbar als Higgs-Felder) explizit bewiesen werden [18, 19]. Eine Übertragung dieses Verfahrens auf masselose Theorien scheint jedoch hinsichtlich eines nichtexistenten adiabatischen Limes problematisch.

Eine konsistente Konstruktion der lokalen Observablenalgebren kann jedoch im allgemeinen auch ohne die Existenz eines adiabatischen Limes unter Verwendung der wechselwirkenden BRST-Ladung Q als Generator der BRST-Transformation der wechselwirkenden Felder durchgeführt werden. Im Gegensatz zur freien BRST-Ladung Q_0 ist Q jedoch selbst ein wechselwirkendes Feld – und damit von der gewählten Normierung abhängig – und die erforderlichen Normierungsbedingungen an die zeitgeordneten Produkte, welche die Erhaltung und Nilpotenz von Q garantieren, sind nicht offensichtlich. Im Fall der Quantenelektrodynamik konnten Dütsch und Fredenhagen dieses Programm jedoch explizit durchführen und die Erfüllbarkeit der entsprechenden Normierungsbedingungen zeigen [20].

Eine universelle Normierungsbedingung an die zeitgeordneten Produkte, genannt Master-Ward-Identität (MWI), welche alle Symmetrien der zugrundeliegenden klassischen Theorie ausdrückt, wurde in [1] vorgeschlagen. Die Anwendung der MWI auf die BRST-Invarianz einer nichtabelschen Eichtheorie liefert eine Identität (Master-BRST-Identität), welche die nötige Information für die Konstruktion der lokalen Observablenalgebren enthält [1]. Ein allgemeiner Beweis für die Erfüllbarkeit der Master-BRST-Identität steht jedoch nicht zu Verfügung.

In [21] wurde die MWI im Rahmen einer algebraischen Beschreibung der klassischen perturbativen Feldtheorie mit Hilfe retardierter Produkte formuliert und damit ihre allgemeine Gültigkeit in der klassischen Theorie gezeigt. Ausgehend von grundlegenden Eigenschaften klassischer retardierter Produkte wurde dann in [22] eine Variante der kausalen Störungstheorie mit Hilfe retardierter Produkte, die traditionell als Entwicklungskoeffizienten der wechselwirkenden Felder auftraten, durchgeführt. Der wesentliche Unterschied zu den üblichen Ansätzen der kausalen Störungstheorie besteht in der Verwendung eines konsistenten off-shell-Formalismus, in dem die Einträge der retardierten Produkte klassische Felder sind, welche keinen Feldgleichungen genügen.

Die zentrale Fragestellung der vorliegenden Arbeit ist es, konkrete Obstruktionen für die Erfüllbarkeit der MWI zu finden. Dazu wurde eine in der Quantenfeldtheorie allgemeingültige Identität für retardierte Produkte gefunden, durch welche die Verletzungen (Anomalien) der MWI konkret zum Ausdruck kommen. Durch die Entwicklung eines effektiven Feldformalismus, dem die Beschreibung einer perturbativen Quantenfeldtheorie durch eine klassische Theorie zu nichtlokalen Wechselwirkungen zugrundeliegt, wurde eine Beziehung zwischen der gefundenen Identität und dem Quantenwirkungsprinzip aus [8] hergestellt. Angesichts dieses Resultates besteht die Hoffnung, dass sich die Methoden der algebraischen Renormierung aus [8] auf die kausale Störungstheorie übertragen lassen, um schließlich zu konkreten Obstruktionen für die Erfüllbarkeit gewisser Fälle der MWI, die insbesondere im Rahmen der Eichtheorien von Interesse sind, zu gelangen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Abschnitte:

Das folgende Kapitel dient der Einführung in die algebraische Beschreibung der perturbativen klassischen Feldtheorie und basiert überwiegend auf [21]. In Hinblick auf die Entwicklung eines effektiven Feldformalismus in Kapitel 4 führen wir den in [22] verwendeten verallgemeinerten off-shell-Formalismus bereits in der klassischen Theorie ein.

Kapitel 3 beschäftigt sich zunächst auf der Grundlage von [23, 10] mit der Quantisierung freier klassischer Feldtheorien im Rahmen der Deformationsquantisierung, womit die algebraische Grundlage für die perturbative Beschreibung wechselwirkender Quantenfeldtheorien geschaffen wird. Die strukturellen Eigenschaften der klassischen wechselwirkenden Felder werden dann als Ausgangspunkt für den Aufbau einer kausalen Störungstheorie in Form retardierter Produkte verwendet. Wir notieren die wesentlichen Schritte des induktiven Konstruktionsverfahrens retardierter Produkte, wie es ausführlich in [22] entwickelt wurde.

In Kapitel 4 führen wir gemäß [21] die MWI in der klassischen Feldtheorie ein und formulieren diese im verallgemeinerten off-shell-Formalismus. Anschließend beweisen wir eine in der Quantenfeldtheorie allgemeingültige Identität, die die Anomalien der MWI konkret zum Ausdruck bringt. Die Übertragung dieser Identität in einen effektiven Feldformalismus ermöglicht den Vergleich mit dem Quantenwirkungsprinzip aus [8].

Kapitel 5 behandelt Eichtheorien als eine Anwendung des in den vorhergehenden Kapiteln beschriebenen Formalismus. Nach der Einführung freier Eichtheorien beschreiben wir den Operator-BRST-Formalismus zur Konstruktion der lokalen Observablenalgebren, wie dieser in [16] entwickelt wurde. Schließlich diskutieren wir eine von Dütsch und Fredenhagen in [21] vorgeschlagene Anwendung der MWI, die auf konkrete Bedingungen an Wechselwirkungen führt, welche die Existenz einer BRST-Symmetrie für die wechselwirkenden Theorie garantieren. Wir bestimmen unter Verwendung kohomologischer Methoden eine Klasse von Lösungen dieser Bedingungen und zeigen ihre Übereinstimmung mit den bekannten Wechselwirkungstermen der nichtabelschen Yang-Mills-Theorien.

Kapitel 2

Klassische Feldtheorie

Dieses Kapitel stellt eine Einführung in die algebraische und störungstheoretische Beschreibung einer klassischen Feldtheorie dar. Wir richten dabei unser besonderes Augenmerk auf Konzepte und Formulierungen, die einerseits eine gewisse Allgemeingültigkeit besitzen und andererseits sinnvoll in den Rahmen der Quantenfeldtheorie übertragen werden können. In diesem Sinn besitzt das Folgende auch wegweisenden Charakter für die Quantisierung klassischer Feldtheorien in Kapitel 3.

Wir folgen überwiegend den Darstellungen in [21] mit dem einzigen Unterschied, dass der in [22] vorgeschlagene verallgemeinerte off-shell Formalismus auch bereits in der klassischen Theorie konsistent eingeführt wird. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns vorwiegend auf den Fall eines reellen Skalarfeldes φ auf dem d-dimensionalen Minkowski-Raum $\mathbb{M}$ für $d > 2$. Die Anwendung der entwickelten Methoden auf Yang-Mills-Theorien wird in Kapitel 5 diskutiert.

Nach der Einführung des mathematischen Rahmens für die Beschreibung einer klassischen Feldtheorie im Lagrange-Formalismus in Abschnitt 2.1 werden wechselwirkende Felder zunächst abstrakt anhand der Wellenoperatoren definiert und anschließend im Rahmen der Störungstheorie als formale Potenzreihen in einer Kopplungskonstante der Wechselwirkung formuliert. Die Bausteine dieser Störungsreihe – die retardierten Produkte – werden in Abschnitt 2.3 eingeführt. Wir geben anschließend explizite Formeln zu ihrer Berechnung an und notieren in Hinblick auf die Quantisierung ihre grundlegenden Eigenschaften. Schließlich führen wir in Abschnitt 2.4 die Peierls-Klammer als Äquivalent der aus dem Hamilton-Formalismus bekannten Poisson-Klammer ein und diskutieren kurz ihre Eigenschaften.

2.1 Algebraische Formulierung der klassischen Feldtheorie

Die Dynamik einer klassischen Feldtheorie wird im Lagrange-Formalismus gewöhnlich mit Hilfe eines *Wirkungsfunktionals* S beschrieben. *Lokale* Wirkungsfunktionale lassen sich gemäß[1] $S = \int dx\, \mathcal{L}(x)$ durch eine von den Feldern und partiellen Ableitungen der Felder (jeweils am Raumpunkt x betrachtet) abhängige Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, ...)$ ausdrücken. Die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) erhält man durch Variation der Wirkung S (Prinzip der kleinsten Wirkung). Es ergeben sich im Fall einer Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$, die nur von den Feldern φ und deren ersten partiellen Ableitungen abhängt, die bekannten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0 \tag{2.1}$$

mit der Funktionalableitung $\frac{\delta}{\delta\varphi}$. Lösungen der Feldgleichungen sind damit stationäre Punkte des zugehörigen Wirkungsfunktionals.

Sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ der Raum der reellwertigen glatten Funktionen (”Feldgeschichten”) auf dem Minkowski-Raum und $\mathcal{C}_S \subset \mathcal{C}$ der Unterraum der glatten[2] Lösungen der Bewegungsgleichungen zur Wirkung S. In der algebraischen Formulierung der klassischen Feldtheorie wird das Feld $\varphi(x)$ als Auswertungsfunktional an der Stelle $x \in \mathbb{M}$ auf dem Raum $\mathcal{C}$ aller Feldgeschichten interpretiert:

$$\begin{aligned} \varphi(x) : \mathcal{C} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ f \quad &\longmapsto \quad \varphi(x)(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Damit verstehen wir das Feld φ als einen Schnitt in dem Bündel $\mathbb{M} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathbb{M}$, mit dem Dualraum $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{C}$. Partielle Ableitungen des Feldes φ lassen sich ebenfalls als Schnitte in $\mathbb{M} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathbb{M}$ interpretieren und werden definiert durch

$$\partial^a \varphi(x)(f) \stackrel{\text{def}}{=} \partial^a f(x) \quad , \quad a \in \mathbb{N}_0^d \tag{2.3}$$

mit der Notation $\partial^a = (\partial^0)^{a_0} \cdots (\partial^{d-1})^{a_{d-1}}$ zu $a = (a_0, \ldots, a_{d-1}) \in \mathbb{N}_0^d$.

Im folgenden werden nur solche Wirkungsfunktionale S betrachtet, für die das Anfangswertproblem (Cauchy-Problem) der zugehörigen Feldgleichungen eindeutig ist. Damit ist gemeint, dass sich alle Lösungen der Feldgleichungen eindeutig durch ihre Anfangswerte (Cauchy-Daten) auf einer raumartigen Hyperfläche des Minkowski-Raumes (Cauchy-Fläche) charakterisieren lassen. Diese Forderung, die für den gesamten folgenden Formalismus von zentraler Bedeutung ist, wird uns bei der Betrachtung von Eichtheorien in Kapitel 5 unmittelbar auf die Notwendigkeit einer Eichfixierung führen.

---

[1] Integrale ohne Angabe eines Integrationsbereiches sind stets über ganz $\mathbb{M}$ zu verstehen.

[2] Wir beschränken uns auf glatte Lösungen der klassischen Feldgleichungen. Wie aus der klassischen Störungstheorie in Abschnitt 2.3 folgt, existieren glatte Lösungen zu nichtlinearen Feldgleichungen zumindest perturbativ.

Es bezeichne $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee\{\partial^a\varphi, a \in \mathbb{N}_0^d\}$ die kommutative Algebra der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, die von dem Feld φ und seinen partiellen Ableitungen $\partial^a\varphi$ erzeugt wird. Das Produkt in $\mathcal{P}$ wird definiert durch das punktweise Produkt in $\mathcal{C}$:

$$(AB)(x)(f) \equiv (A(x)B(x))(f) \stackrel{\text{def}}{=} A(x)(f)\, B(x)(f) \qquad \forall A, B \in \mathcal{P} \quad , \quad f \in \mathcal{C}. \tag{2.4}$$

Weiter bezeichne $\mathcal{E}_S$ das Ideal in $\mathcal{P}$, das von den Feldgleichungen zur Wirkung S erzeugt wird:

$$\mathcal{E}_S \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ \sum_a A_a \partial^a \frac{\delta S}{\delta\varphi}, A_a \in \mathcal{P}, a \in \mathbb{N}_0^d \Big\} \tag{2.5}$$

In $\mathcal{P}$ gilt folgende Faktorisierungseigenschaft unter Restriktion auf den Raum der Lösungen $\mathcal{C}_S$

$$(AB)_S(x) = A_S(x)B_S(x) \qquad \forall A, B \in \mathcal{P} \tag{2.6}$$

mit $A_S \stackrel{\text{def}}{=} A|_{\mathcal{C}_S}$. Demnach gilt $A_S \equiv 0$ für alle $A \in \mathcal{E}_S$. Die Einschränkung φ_S erfüllt die Feldgleichung zur Wirkung S, d.h. das Funktional, das man durch formale Ersetzung von φ durch φ_S in der Feldgleichung erhält, ist identisch Null auf seinem Definitionsbereich $\mathcal{C}_S$.

In der Quantenfeldtheorie ist das punktweise Produkt von Feldern nicht wohldefiniert, so dass auch obige Faktorisierungseigenschaft für Quantenfelder ihren Sinn verliert. Dies führt unter anderem auch zu den bekannten Schwierigkeiten, die beim Versuch der direkten Übertragung von Symmetrien der klassischen Theorie in die Quantenfeldtheorie auftreten (siehe Kapitel 4).

Neben den punktweisen Auswertungsfunktionalen $A \in \mathcal{P}$, erhält man allgemeinere Funktionale auf $\mathcal{C}$ durch formale Integration. Es sei $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ die Menge aller Funktionale

$$F(\varphi) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.7}$$

$$f \longmapsto F(\varphi)(f) \stackrel{\text{def}}{=} F(f) \tag{2.8}$$

von der Form

$$F(\varphi) = t_0 + \sum_{n=1}^{N} \int dx_1 \cdots dx_n\, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) t_n(x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad N < \infty, \tag{2.9}$$

mit $t_0 \in \mathbb{R}$ und (unter Permutation der Variablen) symmetrischen kompakt getragenen Distributionen t_n, $n > 0$, definiert auf $\mathbb{M}^n$, deren Wellenfrontmenge leeren Durchschnitt mit $\mathbb{M}^n \times (\overline{V}_+^n \cup \overline{V}_-^n)$ besitzt[3]. $\overline{V}_+^n$ bzw. $\overline{V}_-^n$ bezeichnen dabei das n-fache direkte Produkt der abgeschlossenen Vorwärts- bzw. Rückwärtslichtkegel $\overline{V}_+$ bzw. $\overline{V}_-$ in $\mathbb{M}$. Wegen der Trägereigenschaft der Distributionen t_n ist der Ausdruck $F(f)$ für beliebige $f \in \mathcal{C}$ wohldefiniert. Die Einschränkung an die Wellenfrontmenge der Distributionen t_n wird bei der Quantisierung in Abschnitt 3.1 eine wichtige Rolle spielen.

Mit der Definition des Produktes[4] $(F_1F_2)(f) \stackrel{\text{def}}{=} F_1(f)F_2(f)$ für $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ und $f \in \mathcal{C}$ wird $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ zu einer kommutativen Algebra. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}(\mathcal{C}_S)$ die Algebra

[3] Zur Definition der Wellenfrontmenge und der Existenz des punktweisen Produkts von Distributionen siehe beispielsweise [10] und die darin enthaltenen Referenzen.

[4] Oft schreiben wir statt $F(\varphi)$ nur F.

der Funktionale von der Form (2.9) eingeschränkt auf den Raum der Lösungen $\mathcal{C}_S$. Es gilt $F(\varphi)_S = F(\varphi_S)$.

Eine wichtige Klasse von Funktionalen in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ sind die *lokalen* Funktionale. Sie sind von der allgemeinen Form

$$F(\varphi) = \int dx \sum_{i=1}^{N} A_i(x) h_i(x) \quad , \quad N < \infty \tag{2.10}$$

mit beliebigen Feldpolynomen $A_i \in \mathcal{P}$ und glatten, kompakt getragenen Testfunktionen $h_i \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ und ergeben sich aus der allgemeinen Form (2.9) mit der Wahl $t_0 = 0$ und $t_n = h(x_n)\delta^{d(n-1)}(x_n - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$, $h \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, bzw. partiellen Ableitungen dieser Distributionen. Die Algebra aller lokalen Funktionale in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_{\text{loc}}(\mathcal{C})$.

Funktionalableitungen in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ sind in gewöhnlicher Weise erklärt durch

$$\frac{\delta F(\varphi)}{\delta \varphi(x)} = \sum_{n=1}^{N} n \int dx_1 \cdots dx_{n-1}\, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{n-1}) t_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) \tag{2.11}$$

für $F(\varphi)$ von der Form (2.9). Für lokale Funktionale F gilt

$$\frac{\delta^2 F}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} = 0 \qquad \text{für} \quad x \neq y. \tag{2.12}$$

Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich solche Wirkungsfunktionale S, die sich als Summe eines freien (lokalen) Anteils S_0 und eines (variablen) Wechselwirkungsanteils S_{int} schreiben lassen. Der freie Anteil S_0 hänge höchstens quadratisch von den Feldern und partiellen Ableitungen dieser ab und wird im folgenden als fixiert angesehen. Im Fall eines reellen Skalarfeldes gilt $S_0 = \int dx\, \mathcal{L}_0(\varphi, \partial\varphi)$ mit

$$\mathcal{L}_0(\varphi, \partial\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2). \tag{2.13}$$

Man beachte, dass $S_0 \notin \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

In Hinblick auf die Vermeidung der Konsequenzen des Haagschen Theorems [24] bei der Quantisierung betrachten wir nur Wechselwirkungen S_{int} in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, d.h. solche die in einem kompakten Raumgebiet lokalisiert sind. Lokale Wechselwirkungen $S_{\text{int}} \in \mathcal{F}_{\text{loc}}(\mathcal{C})$ lassen sich durch eine Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_i g_i L_i$ mit $g_i \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ und $L_i \in \mathcal{P}$ beschreiben:

$$S_{\text{int}} = \int dx\, \mathcal{L}_{\text{int}} \tag{2.14}$$

Die Testfunktionen g_i werden dabei als raumzeitabhängige Kopplungskonstanten interpretiert.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir auch nichtlokale Wechselwirkungen $S_{\text{int}} \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ betrachten. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich weiterhin durch Variation der gesamten Wirkung S, enthalten aber in diesem Fall auch nichtlokale Anteile in Form von Integralen (Fernwirkungen). Entscheidend ist, dass auch im Fall nichtlokaler Wechselwirkungen die Wechselwirkung *lokalisiert* ist, d.h. nur in einem kompakten Raumzeitgebiet $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ eingeschaltet ist.

2.2 Retardierte Wellenoperatoren und wechselwirkende Felder

Die für die betrachtete Klasse von Wirkungsfunktionalen vorausgesetzte Eindeutigkeit der Lösungen des Cauchy-Problems erlaubt es, folgende Bijektion zwischen den Lösungsräumen zweier Wirkungen S_1 und S_2 von der obigen Form (zu gleicher freier Wirkung) zu definieren: Sei r_{S_1,S_2} die Abbildung

$$\begin{aligned} r_{S_1,S_2} : \mathcal{C}_{S_2} &\longrightarrow \mathcal{C}_{S_1} \\ f_2 &\longmapsto f_1, \end{aligned} \tag{2.15}$$

die jeder Lösung $f_2 \in \mathcal{C}_{S_2}$ eine eindeutige Lösung $f_1 \in \mathcal{C}_{S_1}$ zuordnet, die zu frühen Zeiten mit f_2 übereinstimmt. Im Fall lokaler Wirkungen S_1 und S_2 stimmen f_1 und f_2 außerhalb des Gebietes $\mathrm{supp}(\frac{\delta S_1}{\delta\varphi} - \frac{\delta S_2}{\delta\varphi}) + \overline{V}_+$ überein. r_{S_1,S_2} heißt *retardierter Wellenoperator*. Physikalisch betrachtet identifiziert der retardierte Wellenoperator gerade die Lösungen in $\mathcal{C}_{S_1}$ und $\mathcal{C}_{S_2}$, die gleiche einlaufende Feldgeschichten besitzen. In gleicher Weise lässt sich ein avancierter Wellenoperator a_{S_1,S_2} definieren durch die Identifikation von Lösungen mit gleichen auslaufenden Feldgeschichten.

In Hinblick auf den oben erwähnten verallgemeinerten off-shell-Formalismus suchen wir eine Fortsetzung der retardierten Wellenoperatoren (2.15) auf den Raum aller Feldgeschichten $\mathcal{C}$. Dabei bietet sich folgende natürliche Wahl an. Wir bezeichnen die Fortsetzung von r_{S_1,S_2} mit r^{S_1,S_2} und definieren diese als die Abbildung

$$\begin{aligned} r^{S_1,S_2} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ f_2 &\longmapsto f_1, \end{aligned} \tag{2.16}$$

die jedem f_2 eine Feldgeschichte f_1 zuordnet, derart dass f_2 und f_1 zu frühen Zeiten übereinstimmen und f_2 und f_1 die entsprechenden Feldgleichungen in gleicher Weise verletzen, d.h.

$$\frac{\delta S_1}{\delta\varphi}(f_1) = \frac{\delta S_2}{\delta\varphi}(f_2). \tag{2.17}$$

Im Falle lokaler Wirkungen S_1, S_2 gilt damit wieder

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \notin \mathrm{supp}\Big(\frac{\delta S_1}{\delta\varphi} - \frac{\delta S_2}{\delta\varphi}\Big) + \overline{V}_+. \tag{2.18}$$

Offensichtlich stimmt r^{S_1,S_2} auf $\mathcal{C}_{S_2}$ mit r_{S_1,S_2} überein. Die Existenz einer solchen Fortsetzung r^{S_1,S_2} von r_{S_1,S_2} geht aus der störungstheoretischen Formulierung im folgenden Abschnitt hervor[5].

Im allgemeinen ist der Raum der Lösungen der Feldgleichungen zu allgemeiner Wirkung $S = S_0 + S_{\mathrm{int}}$ nicht direkt zugänglich. Explizite Lösungen der i.a. nichtlinearen wechselwirkenden Feldgleichungen existieren im Gegensatz zu Lösungen der freien (linearen)

[5] Ein allgemeines Argument für die Existenz von r^{S_1,S_2} lässt sich eventuell mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Theorems über implizite Funktionen auf unendlichdimensionale Räume finden.

Feldgleichungen gewöhnlich nur in Form von Reihenentwicklungen. Der Ausgangspunkt für die algebraische Formulierung einer klassischen Störungstheorie besteht deshalb darin, wechselwirkende Felder, d.h. Feldpolynome $A \in \mathcal{P}$ bzw. Feldfunktionale $F(\varphi) \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ eingeschränkt auf den Raum der wechselwirkenden Lösungen $\mathcal{C}_{S_0+S_{\text{int}}}$, durch Funktionale auf dem Raum der freien Lösungen $\mathcal{C}_{S_0}$ zu beschreiben[6]. Mit Hilfe des retardierten Wellenoperators definieren wir das *retardierte on-shell Feld* $A^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}}$ zu $A \in \mathcal{P}$ als pullback von $A_{S_0+S_{\text{int}}}$ unter $r_{S_0+S_{\text{int}},S_0}$:

$$A^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(x) \circ r_{S_0+S_{\text{int}},S_0} : \mathcal{C}_{S_0} \to \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Das retardierte Feld $\varphi^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}}$ löst die Bewegungsgleichungen zur Wirkung $S_0 + S_{\text{int}}$ im Sinne von Auswertungsfunktionalen, ist aber im Gegensatz zu $\varphi_{S_0+S_{\text{int}}}$ ein Funktional auf dem Raum der freien Lösungen $\mathcal{C}_{S_0}$. Partielle Ableitungen des retardierten Feldes $\partial_\mu(\varphi^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}})$ sind identisch mit den entsprechenden retardierten Feldern der partiellen Ableitungen $(\partial_\mu\varphi)^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}}$, und die Faktorisierungseigenschaft (2.6) gilt weiterhin auch für die retardierten Felder

$$(AB)^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}}(x) = A^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}}(x) B^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}}(x) \quad \text{für} \quad A, B \in \mathcal{P}. \tag{2.20}$$

Retardierte Feldfunktionale zu allgemeinen Funktionalen $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ sind dann in der Weise definiert, dass gilt

$$F(\varphi)^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}} = F(\varphi^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}}) \tag{2.21}$$

und damit auch

$$(F(\varphi)G(\varphi))^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}} = F(\varphi)^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}} G(\varphi)^{\text{ret}}_{S_0,S_{\text{int}}} \tag{2.22}$$

für alle $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Mit Hilfe der fortgesetzten retardierten Wellenoperatoren r^{S_1,S_2} lassen sich die retardierten Felder (2.19) bzw. (2.21) auch auf den Raum aller Feldgeschichten fortsetzen. Wir definieren *retardierte off-shell Felder* $A^{S_0,S_{\text{int}}}_{\text{ret}}$ zu $A \in \mathcal{P}$ durch

$$A^{S_0,S_{\text{int}}}_{\text{ret}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(x) \circ r^{S_0+S_{\text{int}},S_0} : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \tag{2.23}$$

bzw.

$$F(\varphi)^{S_0,S_{\text{int}}}_{\text{ret}} = F(\varphi^{S_0,S_{\text{int}}}_{\text{ret}}). \tag{2.24}$$

Es gelten für die off-shell Felder die Eigenschaften (2.20) und (2.22) in analoger Weise. Einschränken der retardierten off-shell Felder (2.19) auf den Raum der freien Lösungen $\mathcal{C}_{S_0}$ führt wieder zu den retardierten on-shell Feldern (2.19). In dieser Arbeit verwenden wir überwiegend den off-shell Formalismus.

[6]Dieses Vorgehen führt bei der Quantisierung in Kapitel 3 unmittelbar zu dem üblichen Vorgehen, als Grundlage für die Störungstheorie den Fock-Raum des freien Feldes zu verwenden

2.3 Störungstheorie und retardierte Produkte

Da die retardierten Wellenoperatoren im allgemeinen nicht in geschlossener Form angegeben werden können, versucht man, die retardierten Felder in Form formaler Potenzreihen in der Kopplungskonstante λ der Wechselwirkung $S_{\mathrm{int}} = \lambda F$ mit $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ zu bestimmen.

Sei $\mathrm{Sym}^n\mathcal{F}(\mathcal{C})$ das n-fache symmetrische Tensorprodukt von $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Sym}\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{Sym}^n\mathcal{F}(\mathcal{C})$ die symmetrische Tensoralgebra zu $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Wir definieren *retardierte Produkte* R^S (off-shell) bezüglich der Wirkung S als lineare Abbildung

$$R^S : \mathrm{Sym}\mathcal{F}(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{C}) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{F}(\mathcal{C}) \tag{2.25}$$

durch

$$F^{\otimes n} \otimes G \longmapsto R^S(F^{\otimes n}, G) \overset{\text{def}}{=} \frac{d^n}{d\lambda^n}\Big|_{\lambda=0} G \circ r^{S+\lambda F, S} \tag{2.26}$$

und setzen linear und mit der Polarisationsformel auf ganz $\mathrm{Sym}^n\mathcal{F}(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{C})$ fort. In gleicher Weise werden retardierte Produkte R_S (on-shell) als lineare Abbildungen

$$R_S : \mathrm{Sym}\mathcal{F}(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{C}) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{F}(\mathcal{C}_S) \tag{2.27}$$

definiert, so dass der Zusammenhang

$$R_S(F^{\otimes n}, G) = R^S(F^{\otimes n}, G)\big|_{\mathcal{C}_S} \tag{2.28}$$

gilt[7].

Damit erhalten wir folgende perturbative Entwicklung des retardierten off-shell-Feldes $G_{\mathrm{ret}}^{S_0,S_{\mathrm{int}}}$ im Sinne formaler Potenzreihen in der Kopplungskonstante

$$G_{\mathrm{ret}}^{S_0,S_{\mathrm{int}}} = G \circ r^{S_0+S_{\mathrm{int}},S_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} R^{S_0}(S_{\mathrm{int}}^{\otimes n}, G) = R^{S_0}(e_{\otimes}^{S_{\mathrm{int}}}, G) \tag{2.29}$$

mit der Notation $e_{\otimes}^{S} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S^{\otimes n}$. Eine analoge Entwicklung in Termen der retardierten on-shell Produkte erhalten wir für das entsprechende retardierte on-shell Feld. In gleicher Weise können mit Hilfe des avancierten Wellenoperators avancierte Produkte A^S bzw. A_S und avancierte Felder definiert werden.

Die Annahme, dass das Cauchy-Problem für die betrachteten Wirkungen S eindeutige Lösung besitzt, spiegelt sich unmittelbar in der Invertierbarkeit von $\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}$, interpretiert als Kern eines Integraloperators, wider. Wir bezeichnen mit Δ_S^{ret} die eindeutige retardierte Greensfunktion zur Wirkung S. Es gilt

$$\int dy\, \Delta_S^{\mathrm{ret}}(x,y) \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)} = \delta(x-z) = \int dy\, \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \Delta_S^{\mathrm{ret}}(y,z) \tag{2.30}$$

[7] Meist schreiben wir kurz R für die retardierten off-shell Produkte R^S.

und

$$\mathrm{supp}\Delta_S^{\mathrm{ret}} \subset \{(x,y)|x \in y + \overline{V}_+\} \tag{2.31}$$

falls S ein lokales Funktional ist.

Ist S die Summe eines freien Teils S_0 und eines Wechselwirkungsanteils $S_{\mathrm{int}} = \lambda H$, $H \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, so lässt sich die Greensfunktion zur gesamten Wirkung S in Form einer formalen Potenzreihe in λ aus der Greensfunktion der freien Wirkung S_0 gewinnen. Mit Hilfe der Beziehung[8] $(1-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ für einen linearen Operator A (geometrische Reihe) ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} &\Delta^{\mathrm{ret}}_{S_0+\lambda H}(x,y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n \int d(u_1,\ldots,u_n)d(v_1,\ldots,v_n)\Delta^{\mathrm{ret}}_{S_0}(x,u_1)\frac{\delta^2 H}{\delta\varphi(u_1)\delta\varphi(v_1)}\cdots \\ &\quad \Delta^{\mathrm{ret}}_{S_0}(v_{n-1},u_n)\frac{\delta^2 H}{\delta\varphi(u_n)\delta\varphi(v_n)}\Delta^{\mathrm{ret}}_{S_0}(v_n,y). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Anhand dieser Formel ist deutlich erkennbar, dass die Trägereigenschaft (2.31) für nichtlokale Wirkungen nicht gelten kann. Betrachtet man $\Delta^{\mathrm{ret}}_{S_0+\lambda H}$ jedoch nur bis zu einer endlichen Ordnung in λ, so existiert wegen der Kompaktheit des Trägers von H stets ein $t \in \mathbb{R}^d$, so dass gilt

$$\mathrm{supp}\Delta^{\mathrm{ret}}_{S_0+\lambda H} \subset \{(x,y)|x \in (y-t) + \overline{V}_+\}. \tag{2.33}$$

Für die in (2.25) definierten retardierten Produkte lassen sich mit Hilfe der retardierten Greensfunktionen explizite Ausdrücke finden. Wir betrachten zunächst den Fall $n=1$ in (2.26).

Satz 2.1. *Seien F, G und S_{int} beliebige Funktionale in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ und $S = S_0 + S_{\mathrm{int}}$. Dann gilt*

$$R^S(F,G) = -\int dx\, dy\, \frac{\delta G}{\delta\varphi(x)}\Delta_S^{\mathrm{ret}}(x,y)\frac{\delta F}{\delta\varphi(y)}. \tag{2.34}$$

Beweis. Nach Definition der retardierten Produkte erster Ordnung gilt für alle $f \in \mathcal{C}$

$$R^S(F,G)(f) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} G \circ r^{S+\lambda F,S}(f) = \int dx\, \frac{\delta G}{\delta\varphi(x)}(f)\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} r^{S+\lambda F,S}(f)(x). \tag{2.35}$$

Wir wählen zunächst $f \in \mathcal{C}_S$. Dann existiert nach Voraussetzung (Eindeutigkeit des Cauchy-Problems) ein eindeutiges $h \in \mathcal{C}$, so dass $r_{S+\lambda F,S}(f) = f + \lambda h + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Nach Definition von $r_{S+\lambda F,S}$ gilt

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)}(f) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\frac{\delta(S+\lambda F)}{\delta\varphi(y)}(f+\lambda h) = \frac{\delta F}{\delta\varphi(y)}(f) + \int dz\, \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)}(f)h(z). \tag{2.36}$$

[8] Die auftretenden unendlichen Summen konvergieren im Sinne formaler Potenzreihen.

Wegen (2.30) erhalten wir damit folgenden Ausdruck für h

$$R_S(F,\varphi(x))(f) \equiv h(x) = -\int dy\, \Delta_S^{\rm ret}(x,y)\frac{\delta F}{\delta\varphi(y)}(f). \tag{2.37}$$

Im Fall von $f \in \mathcal{C}$ definieren wir $\frac{d}{d\lambda}\big|_{\lambda=0} r^{S+\lambda F,S}(f)$ durch die rechte Seite von (2.37) und zeigen, dass Bedingung (2.17) für $S_1 = S$ und $S_2 = S+\lambda F$ zu erster Ordnung in λ erfüllt ist. Dazu müssen wir zeigen, dass

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\frac{\delta(S+\lambda F)}{\delta\varphi(x)}(f+\lambda h) = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}(f) \tag{2.38}$$

für h gegeben durch (2.37). Da $\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}(f)$ nicht von λ abhängt, muss gelten

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}\frac{\delta(S+\lambda F)}{\delta\varphi(x)}(f+\lambda h) = 0, \tag{2.39}$$

was man wie in (2.36) unmittelbar bestätigen kann. Damit erhalten wir zusammen mit (2.35) die Behauptung. □

Explizite Ausdrücke für retardierte Produkte höherer Ordnung lassen sich jetzt aus der Identität

$$\frac{d}{d\lambda}G\circ r^{S+\lambda F,S} = R^{S+\lambda F}(F,G)\circ r^{S+\lambda F,S} \tag{2.40}$$

gewinnen, die sich unmittelbar aus der Definition der retardierten Produkte und der Kompositionseigenschaft $r^{S_1,S_2}\circ r^{S_2,S_3} = r^{S_1,S_3}$ der Wellenoperatoren ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}G\circ r^{S+\lambda F,S} &= \frac{d}{d\mu}\Big|_{\mu=0} G\circ r^{S+(\lambda+\mu)F,S}\\ &= \frac{d}{d\mu}\Big|_{\mu=0} G\circ r^{S+\lambda F+\mu F,S+\lambda F}\circ r^{S+\lambda F,S}\\ &= R^{S+\lambda F}(F,G)\circ r^{S+\lambda F,S}.\end{aligned}$$

Die formale Potenzreihenentwicklung von (2.40) lautet

$$\frac{d}{d\lambda}R^S(e_\otimes^{\lambda F},G) = R^S(e_\otimes^{\lambda F},R^{S+\lambda F}(F,G)). \tag{2.41}$$

Wir definieren den Funktional-Differential-Operator 1. Ordnung $\mathcal{D}_{S,F}(\lambda)$ durch

$$\mathcal{D}_{S,F}(\lambda) \overset{\rm def}{=} -\int dx\,dy\,\Delta^{\rm ret}_{S+\lambda F}(x,y)\frac{\delta F}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}, \tag{2.42}$$

so dass nach Satz 2.1 gilt

$$R^{S+\lambda F}(F,G) = \mathcal{D}_{S,F}(\lambda)G. \tag{2.43}$$

Aus (2.41) erhalten wir die Rekursionsrelation

$$R^S(e_\otimes^F, G) = G + \int_0^1 d\lambda \, \frac{d}{d\lambda} R^S(e_\otimes^{\lambda F}, G) = G + \int_0^1 d\lambda \, R^S(e_\otimes^{\lambda F}, \mathcal{D}_{S,F}(\lambda)G), \tag{2.44}$$

woraus sich durch Iteration die Lösung

$$R^S(e_\otimes^F, G) = G + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \ldots \int_0^{\lambda_{n-1}} d\lambda_n \, \mathcal{D}_{S,F}(\lambda_n) \ldots \mathcal{D}_{S,F}(\lambda_1) G \tag{2.45}$$

im Sinne formaler Potenzreihen ergibt. Für das retardierte off-shell Feld (2.29) erhalten wir damit folgende störungstheoretische Entwicklung

$$R^{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, G) = G + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \ldots \int_0^{\lambda_{n-1}} d\lambda_n \, \mathcal{D}_{S_0,S_{\text{int}}}(\lambda_n) \ldots \mathcal{D}_{S_0,S_{\text{int}}}(\lambda_1) G. \tag{2.46}$$

Damit ist die Existenz der retardierten off-shell Wellenoperatoren im Sinne formaler Potenzreihen gezeigt.

Eine Rekursionsrelation für die retardierten Produkte höherer Ordnung ergibt sich aus (2.41) durch n-maliges Differenzieren nach λ an der Stelle $\lambda = 0$

$$R^S(F^{\otimes n+1}, G) = -\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} R^S(F^{\otimes l}, \mathcal{D}_{S,F}^{(n-l)} G) \tag{2.47}$$

mit der Bezeichnung

$$\mathcal{D}_{S,F}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} -\int dx \, dy \, \frac{d^k}{d\lambda^k}\Big|_{\lambda=0} \Delta_{S+\lambda F}^{\text{ret}}(x,y) \frac{\delta F}{\delta\varphi(y)} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \tag{2.48}$$

und einer zu (2.32) analogen Entwicklung von $\Delta_{S+\lambda F}^{\text{ret}}$.

Auf dem Raum der lokalen Funktionale lässt sich eine geschlossene Formel für die retardierten Produkte höherer Ordnung angeben. Wie in [21] gezeigt wurde, gilt für lokale Funktionale $F, G \in \mathcal{F}_{\text{loc}}(\mathcal{C})$

$$R_S(F^{\otimes n}, G) = n! \int_{x_1^0 \leq \cdots \leq x_n^0} dx_1 \ldots dx_n \, \big(\mathcal{R}(x_1) \cdots \mathcal{R}(x_n) G\big)_S \tag{2.49}$$

mit dem Funktional-Differential-Operator

$$\mathcal{R}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int dy \, \frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta_S^{\text{ret}}(y,x) \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}. \tag{2.50}$$

Die natürliche Fortsetzung dieser Identität auf den Raum $\mathcal{C}$ lautet

$$R^S(F^{\otimes n}, G) = n! \int_{x_1^0 \leq \cdots \leq x_n^0} dx_1 \ldots dx_n \, \mathcal{R}(x_1) \cdots \mathcal{R}(x_n) G, \tag{2.51}$$

und das dadurch gegebene retardierte off-shell Feld erfüllt, wie man analog zum Beweis von (2.49) (siehe [21]) findet, die Bedingungen (2.18) und (2.17).

2.4 Die Peierls-Klammer

Die Dynamik eines physikalischen Systems wird im kanonischen Formalismus üblicherweise mit Hilfe der Poisson-Klammer ausgedrückt. Der Übergang vom Lagrange-Formalismus zum Hamilton-Formalismus einer relativistischen Feldtheorie erfordert eine willkürliche Zerlegung des Minkowski-Raums in Raum und Zeit, um zu den Feldern konjugierte Impulse definieren zu können. Dabei verliert man die im Lagrange-Formalismus explizit ausgedrückte Kovarianz. Einen im Lagrange-Formalismus definierten, äquivalenten Ausdruck für die Poisson-Klammer fand Peierls in [25] (*Peierls-Klammer*). Damit wurde es möglich, einen explizit kovarianten kanonischen Formalismus im Rahmen des Lagrange-Formalismus zu formulieren.

Die Peierls-Klammer ist – neben dem über die Auswertung auf $\mathcal{C}$ definierten (punktweisen) Produkt – ein weiteres Produkt auf dem Raum der Funktionale $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Sie lässt sich mit Hilfe der oben eingeführten retardierten Produkte leicht ausdrücken:

Definition 2.2. Die *off-shell Peierls-Klammer* einer klassischen Feldtheorie zur Wirkung S ist eine lineare Abbildung definiert durch

$$\begin{aligned} \{\cdot,\cdot\}^S : \mathcal{F}(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{C}) \;&\longrightarrow\; \mathcal{F}(\mathcal{C}) \\ F \otimes G \;&\longmapsto\; \{F,G\}^S \stackrel{\text{def}}{=} R^S(F,G) - R^S(G,F) \equiv R^S(F,G) - A^S(F,G). \end{aligned} \tag{2.52}$$

In gleicher Weise ist die on-shell Peierls-Klammer $\{\cdot,\cdot\}_S$ mit Hilfe der retardierten on-shell Produkte definiert. Wie in [21] gezeigt wurde, hängt $\{\cdot,\cdot\}_S$ – im Gegensatz zu den retardierten on-shell Produkten R_S – nur von den Einschränkungen der Einträge auf den Raum der Lösungen $\mathcal{C}_S$ ab. Es existiert also eine wohldefinierte Restriktion von $\{\cdot,\cdot\}_S$ auf $\mathcal{F}(\mathcal{C}_S) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{C}_S)$.

Wir werden in dieser Arbeit überwiegend die Peierls-Klammer $\{\cdot,\cdot\}^{S_0}$ zur freien Wirkung S_0 betrachten. Mit der avancierten Greensfunktion $\Delta^{\text{av}}_{S_0}(x,y) \equiv \Delta^{\text{ret}}_{S_0}(y,x)$ und der üblichen Definition der (freien) Kommutatorfunktion $\Delta_{S_0}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{\text{av}}_{S_0}(x,y) - \Delta^{\text{ret}}_{S_0}(x,y)$ ergibt sich für die Peierls-Klammer bezüglich der freien Wirkung S_0 der Ausdruck

$$\{F,G\}^{S_0} = \int dx\, dy\, \frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} \Delta_{S_0}(x,y) \frac{\delta G}{\delta\varphi(y)}. \tag{2.53}$$

In dieser Form ist die Äquivalenz zu der üblichen Poisson-Klammer für das freie skalare Feld erkennbar. Ein entscheidender Vorteil der Peierls-Klammer gegenüber der Poisson-Klammer ist – neben der erwähnten expliziten Kovarianz – ihre Wohldefiniertheit im Fall von Wechselwirkungen, die Ableitungen der Felder enthalten und einen direkten Übergang zum Hamilton-Formalismus erschweren.

Die Peierls-Klammer besitzt die üblichen Eigenschaften einer Poisson-Klammer: Linearität, Antisymmetrie und die Gültigkeit der Leibniz-Regel folgen unmittelbar aus der Definition 2.2 und Satz 2.1. Die Gültigkeit der Jakobi-Identität ergibt sich aus der Tatsache, dass retardierte bzw. avancierte Wellenoperatoren kanonische Transformationen (bezüglich der Peierls-Klammer) sind:

$$\{F \circ r^{S_2,S_1}, G \circ r^{S_2,S_1}\}^{S_1} = \{F,G\}^{S_2} \circ r^{S_2,S_1}, \tag{2.54}$$

bzw.

$$\{F \circ a^{S_2,S_1}, G \circ a^{S_2,S_1}\}^{S_1} = \{F,G\}^{S_2} \circ a^{S_2,S_1}, \tag{2.55}$$

für $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ und Wirkungen S_1, S_2. Zum Beweis von (2.54) bzw. (2.55) genügt es, die entsprechenden infinitesimalen Versionen zu zeigen, die sich aus (2.54) bzw. (2.55) durch die Ersetzungen $S_1 = S$ und $S_2 = S + \lambda H$ und anschließende Differentation nach λ an der Stelle Null ergeben:

$$\{R^S(H,F),G\}^S + \{F, R^S(H,G)\}^S = R^S(H, \{F,G\}^S) + \tfrac{d}{d\lambda}|_{\lambda=0}(R^{S+\lambda H}(F,G) - R^{S+\lambda H}(G,F)) \tag{2.56}$$

bzw.

$$\{A^S(H,F),G\}^S + \{F, A^S(H,G)\}^S = A^S(H, \{F,G\}^S) + \tfrac{d}{d\lambda}|_{\lambda=0}(R^{S+\lambda H}(F,G) - R^{S+\lambda H}(G,F)) \tag{2.57}$$

Tatsächlich gilt mit der Bezeichnung $\mathfrak{R}(S_2,S_1) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \circ r^{S_2,S_1}, G \circ r^{S_2,S_1}\}^{S_1} - \{F,G\}^{S_2} \circ r^{S_2,S_1}$ unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und der Identität $\mathfrak{R}(S_1,S_1) = 0$ der Schluss

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(S_2,S_1) &= \mathfrak{R}(S_1 + \underbrace{(S_2 - S_1)}_{\stackrel{\text{def}}{=} H}, S_1) \\
&= \int_0^1 d\mu \, \frac{d}{d\mu} \mathfrak{R}(S_1 + \mu H, S_1) \\
&= \int_0^1 d\mu \, \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathfrak{R}(S_1 + (\lambda+\mu)H, S_1) \\
&= \int_0^1 d\mu \, \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathfrak{R}(S_1 + \mu H + \lambda H, S_1 + \mu H) \circ r^{S_1+\mu H, S_1} \stackrel{(2.56)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für den avancierten Fall.

Unter Verwendung von Satz 2.1 (und einer analogen Aussage für das avancierte Produkt) sowie der Identitäten

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \Delta_S^{\text{ret}}(u-v) = -\int dw\, dz\, \Delta_S^{\text{ret}}(u-z) \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(w)\delta\varphi(x)} \Delta_S^{\text{ret}}(w-v) \tag{2.58}$$

und

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \Delta_{S+\lambda H}^{\text{ret}}(x-y) = -\int dv\, dw\, \Delta_S^{\text{ret}}(x-v) \frac{\delta^2 H}{\delta\varphi(v)\delta\varphi(w)} \Delta^{\text{ret}}(w-y) \tag{2.59}$$

(analog für Δ_S^{av}), die unmittelbar aus (2.30) bzw. (2.32) folgen, kann die Gültigkeit von (2.56) bzw. (2.57) gezeigt werden. Die Differenz von (2.56) und (2.57) liefert schließlich die Jakobi-Identität

$$\{F, \{H,G\}\} + \{G, \{F,H\}\} + \{H, \{G,F\}\} = 0. \tag{2.60}$$

Eine weitere wichtige Folge der Invarianz (2.54) der Poisson-Klammer unter den retardierten Wellenoperatoren ist folgender fundamentaler Zusammenhang zwischen den retardierten Produkten höherer Ordnung:

Satz 2.3 (GLZ-Relation). *Seien F, G und $(H_i)_{i=1,\ldots,n}$ Funktionale in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Dann gilt*

$$\sum_{I\subset \underline{n}}\{R^{S_0}(\otimes_{i\in I}H_i,F),R^{S_0}(\otimes_{j\in I^c}H_j,G)\}^{S_0}=R^{S_0}(\otimes_{i\in \underline{n}}H_i\otimes F,G)-R^{S_0}(\otimes_{i\in \underline{n}}H_j\otimes G,F) \tag{2.61}$$

mit den Bezeichnungen $\underline{n}=\{1,\ldots,n\}$ *und* $I^c=\underline{n}\backslash I$.

Beweis. Wir wählen in (2.54) $S_1=S_0$ und $S_2=S_0+\lambda H$ und erhalten mit der Definition der retardierten Produkte und der Peierls-Klammer, sowie der Kompositionseigenschaft der Wellenoperatoren

$$\begin{aligned}
&\{F\circ r^{S_0+\lambda H,S_0},G\circ r^{S_0+\lambda H,S_0}\}^{S_0}=\{F,G\}^{S_0+\lambda H}\circ r^{S_0+\lambda H,S_0}\\
&=\ (R^{S_0+\lambda H}(F,G)-R^{S_0+\lambda H}(G,F))\circ r^{S_0+\lambda H,S_0}\\
&=\ \frac{d}{d\mu}\Big|_{\mu=0}(G\circ r^{S_0+\lambda H+\mu F,S_0+\lambda H}-F\circ r^{S_0+\lambda H+\mu G,S_0+\lambda H})\circ r^{S_0+\lambda H,S_0}\\
&=\ \frac{d}{d\mu}\Big|_{\mu=0}(G\circ r^{S_0+\lambda H+\mu F,S_0}-F\circ r^{S_0+\lambda H+\mu G,S_0}).
\end{aligned}$$

n-faches Differenzieren der gefundenen Gleichung nach λ an der Stelle $\lambda=0$ liefert dann die Identität

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{R^{S_0}(H^{\otimes k},F),R^{S_0}(H^{\otimes n-k},G)\}^{S_0}=R^{S_0}(H^{\otimes n}\otimes F,G)-R^{S_0}(H^{\otimes n}\otimes G,F), \tag{2.62}$$

aus der sich durch Polarisation unmittelbar die Behauptung (2.61) ergibt. □

Relation (2.61) ist die klassische Version der *GLZ-Relation*, die bei der Konstruktion retardierter Produkte in der Quantenfeldtheorie eine entscheidende Rolle spielt. Sie wurde von Glaser, Lehmann und Zimmermann im Rahmen der nichtstörungstheoretischen Quantenfeldtheorie gefunden [26].

2.5 Grundlegende Eigenschaften der retardierten Produkte

In (2.25) wurden die retardierten Produkte als multilineare Abbildungen auf dem Raum $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ aller Funktionale definiert. Beschränken wir uns auf den Raum der lokalen Funktionale, so lassen sich die retardierten Produkte auch durch $\mathcal{F}(\mathcal{C})$-wertige Distributionen beschreiben[9].

Sei dazu $\mathcal{D}'(\mathbb{M}^{n+1},\mathcal{F}(\mathcal{C}))$ der Raum der $\mathcal{F}(\mathcal{C})$-wertigen Distributionen auf $\mathbb{M}^{n+1}$. Wir definieren lineare Abbildungen

$$\begin{aligned}
R_{n,1}:\mathrm{Sym}^n\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}\ &\longrightarrow\ \mathcal{D}'(\mathbb{M}^{n+1},\mathcal{F}(\mathcal{C}))\\
A_1\otimes\cdots\otimes A_n\otimes B\ &\longmapsto\ R_{n,1}(A_1\otimes\cdots\otimes A_n,B)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

[9] Wir beziehen im folgenden alle retardierten Produkte auf die freie Wirkung S_0, ohne dies jeweils explizit zu notieren.

durch

$$\begin{aligned}
&R_{n,1}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n, B)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \otimes g) \\
&\equiv \int d(x_1,\ldots,x_n,y)\, R_{n,1}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n, B)(x_1,\ldots,x_n,y) f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) g(y) \\
&\equiv \int d(x_1,\ldots,x_n,y)\, R_{n,1}(A_1(x_1) \otimes \cdots \otimes A_n(x_n), B(y)) f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) g(y) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} R(A_1(f_1) \otimes \cdots \otimes A_n(f_n), B(g))
\end{aligned} \tag{2.64}$$

mit $f_1,\ldots,f_n,g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ und der Notation: $A(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int dx\, A(x)g(x) \in \mathcal{F}_{\text{loc}}(\mathcal{C})$. Gelegentlich betrachten wir $R_{n,1}$ auch als $\mathcal{F}(\mathcal{C})$-wertige Distribution auf dem Raum der $\text{Sym}^n\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$-wertigen Testfunktionen auf $\mathbb{M}^{n+1}$ und schreiben $R_{n,1}(A_1 f_1 \otimes \cdots \otimes A_n f_n, Bg) \stackrel{\text{def}}{=} R(A_1(f_1) \otimes \cdots \otimes A_n(f_n), B(g))$ mit denselben Bezeichnungen wie oben.

Analog können wir die Peierls-Klammer für lokale Funktionale auffassen als lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{M}^2, \mathcal{F}(\mathcal{C})) \\
A \otimes B &\longmapsto \{A, B\}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

definiert durch

$$\{A,B\} \stackrel{\text{def}}{=} R_{1,1}(A,B) - R_{1,1}(B,A). \tag{2.66}$$

In Hinblick auf die Konstruktion retardierter Produkte in der Quantenfeldtheorie notieren wir grundlegende Eigenschaften der klassischen retardierten Produkte (2.63), die später als definierende Eigenschaften für quantenfeldtheoretische retardierte Produkte dienen werden.

Kausalität: Aus der Eigenschaft (2.18) der retardierten Wellenoperatoren folgt unmittelbar

$$B_{\text{ret}}^{S_0,A(f)}(x) = B(x) \quad \text{falls} \quad \text{supp} f \cap (x + \overline{V}_-) = \varnothing \tag{2.67}$$

für alle $A, B \in \mathcal{P}$. Anschaulich bedeutet dies, dass sich nur solche Wechselwirkungen in $x \in \mathbb{M}$ bemerkbar machen, deren Trägergebiet einen nichtleeren Schnitt mit $x+\overline{V}_-$ besitzen, was dem Prinzip der endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen entspricht. Diese Kausalitätseigenschaft der retardierten Felder spiegelt sich in deren Bausteinen, den retardierten Produkten (2.63), in Form eines kausalen Trägers wider:

$$\text{supp} R_{n,1}(A(x_1) \otimes \cdots \otimes A(x_n), B(x)) \subset \{(x_1,\ldots,x_n,x) \in \mathbb{M}^{n+1} | x_i \in x + \overline{V}_-, \forall i \in \underline{n}\} \tag{2.68}$$

GLZ-Relation: Die GLZ-Relation (2.61) übersetzt sich im Fall lokaler Funktionale unmittelbar in die Relation

$$\begin{aligned}
&\sum_{I \subset \underline{n}} \{R_{|I|,1}(\otimes_{i\in I} H_i(x_i), F(x)), R_{|I^c|,1}(\otimes_{j \in I^c} H_j(x_j), G(y))\} \\
&\quad = R_{n+1,1}(\otimes_{i\in\underline{n}} H_i(x_i) \otimes F(x), G(y)) - R_{n+1,1}(\otimes_{i\in\underline{n}} H_i(x_i) \otimes G(y), F(x))
\end{aligned} \tag{2.69}$$

für $F, G, H_i \in \mathcal{P}$, $i = 1,\ldots,n$.

Action-Ward-Identität: Aus der Definition (2.64) folgt für alle $f_1, \ldots, f_n, g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ und $i \in \underline{n}$

$$\begin{aligned}
&\int d(x,y)\, R_{n,1}(A_1(x_1) \otimes \cdots \otimes \partial^\mu A_i(x_i) \otimes \cdots A_n(x_n), B(y)) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) g(y) \\
&= R(A_1(f_1) \otimes \cdots \otimes (\partial^\mu A_i)(f_i) \otimes \cdots \otimes A_n(f_n), B(g)) \\
&= -R(A_1(f_1) \otimes \cdots \otimes A_i(\partial^\mu f_i) \otimes \cdots \otimes A_n(f_n), B(g)) \\
&= -\int d(x,y)\, R_{n,1}(A_1(x_1) \otimes \cdots \otimes A_n(x_n), B(y)) f_1(x_1) \cdots \partial^\mu f_i(x_i) \cdots f_n(x_n) g(y) \\
&= \int d(x,y)\, \partial^\mu_{x_i} R_{n,1}(A_1(x_1) \otimes \cdots \otimes A_n(x_n), B(y)) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) g(y)
\end{aligned}$$

und analog für partielle Ableitung nach y. Daraus folgt die Vertauschbarkeit von $R_{n,1}$ mit partiellen Ableitungen. Diese Eigenschaft der retardierten Produkte $R_{n,1}$ ist hier eine Folge der ursprünglichen Definition (2.25) auf dem Raum der Funktionale $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Sie ist umgekehrt notwendig, um ausgehend von einer (von (2.25) unabhängigen) Definition von retardierten Produkten $R_{n,1}$ als lineare Abbildungen (2.63) retardierte Produkte R auf den lokalen Funktionalen gemäß (2.64) zu definieren. (Ohne die Vertauschbarkeit von $R_{n,1}$ mit partiellen Ableitungen wäre eine solche Definition von der Wahl der jeweiligen Darstellung der lokalen Funktionale abhängig.)

Physikalisch gesehen besagt die Vertauschbarkeit von $R_{n,1}$ mit partiellen Ableitungen, dass die wechselwirkenden Felder nur von dem Wechselwirkungsfunktional S_{int} und nicht von der speziellen Wahl einer zugehörigen Lagrange-Dichte abhängen. Dies motiviert die auf Stora zurückgehende Bezeichnung *Action-Ward-Identität* [27]. Während die Action-Ward-Identität in der klassischen Theorie durch die Definition retardierter Produkte über retardierte Wellenoperatoren auf den Funktionalen unmittelbar implementiert wird, stellt sie in der Quantenfeldtheorie eine nichttriviale Forderung dar, deren Erfüllbarkeit explizit gezeigt werden muss.

Feldunabhängigkeit: Hängt die freie Wirkung S_0 höchstens quadratisch von den Feldern ab, so sind $\frac{\delta^2 S_0}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}$ und damit auch $\Delta^{\mathrm{ret}}_{S_0}(x,y)$ feldunabhängig. Aus (2.49) folgt dann, dass R (eingeschränkt auf den Raum der lokalen Funktionale) mit Funktionalableitungen vertauscht, d.h. die Abbildung R ist feldunabhängig. Seien $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{C})$ lokale Funktionale, dann lautet die Taylor-Entwicklung von $R(F_1 \otimes \cdots \otimes F_{n-1}, F_n)$ bezüglich des Feldes φ

$$\begin{aligned}
R(F_1 \otimes \cdots \otimes F_{n-1}, F_n) = \sum_{l_1,\ldots,l_n} \frac{1}{l_1! \cdots l_n!} \int dx_{11} \cdots dx_{1l_1} \cdots dx_{n1} \cdots dx_{nl_n} \\
\int d(x_1,\ldots,x_n)\, R_{n-1,1}\Big(\frac{\delta^{l_1} A_1(x_1)}{\delta\varphi(x_{11}) \cdots \delta\varphi(x_{1l_1})} \otimes \cdots, \frac{\delta^{l_n} A_n(x_n)}{\delta\varphi(x_{n1}) \cdots \delta\varphi(x_{nl_n})}\Big)\Big|_{\varphi\equiv 0} \\
h(x_1) \cdots h(x_n) \varphi(x_{11}) \cdots \varphi(x_{1l_1}) \cdots \varphi(x_{n1}) \cdots \varphi(x_{nl_n})
\end{aligned} \tag{2.70}$$

mit $F_i = \int dx\, A_i(x) h_i(x)$, $A_i \in \mathcal{P}$ und $h_i \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$. Dabei sind die Funktionalableitungen $\frac{\delta^{l_i} A_i(x_i)}{\delta\varphi(x_{i1})\cdots\delta\varphi(x_{il_i})}$ Distributionen mit Träger auf der totalen Diagonale $\mathbb{D}_{l_i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i, x_{i1} \ldots, x_{il_i}) \in \mathbb{M}^{l_i+1}, x_i = x_{i1} = \ldots = x_{il_i}\}$, d.h. sie lassen sich schreiben als eine Summe von Produkten aus Elementen in $\mathcal{P}$ und δ-Funktionen bzw. Ableitungen der δ-Funktionen abhängig von den Relativkoordinaten. Die Ausintegration dieser δ-Funktionen liefert das Resultat

$$\begin{aligned} &R(F_1 \otimes \cdots \otimes F_{n-1}, F_n) = \\ &\sum_{l_1,\ldots,l_n} \frac{1}{l_1! \cdots l_n!} \int d(x_1, \ldots, x_n)\, R_{n-1,1}\Big(\cdots \sum_{a_{i1} \ldots a_{il_i}} \frac{\partial^{l_i} A_i}{\partial(\partial^{a_{i1}}\varphi) \cdots \partial(\partial^{a_{il_i}}\varphi)}(x_i) \cdots \Big)\Big|_{\varphi\equiv 0} \\ &\qquad \times \prod_{i=1}^{n} h_i(x_i) \prod_{j_i=1}^{l_i} \partial^{a_{ij_i}}\varphi(x_i) \end{aligned} \tag{2.71}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &R_{n-1,1}(A_1(x_1) \otimes \cdots A_{n-1}(x_{n-1}), A_n(x_n)) = \\ &\quad \sum_{l_1,\ldots,l_n} \frac{1}{l_1! \cdots l_n!} R_{n-1,1}\Big(\cdots \sum_{a_{i1} \ldots a_{il_i}} \frac{\partial^{l_i} A_i}{\partial(\partial^{a_{i1}}\varphi) \cdots \partial(\partial^{a_{il_i}}\varphi)}(x_i) \cdots \Big)\Big|_{\varphi\equiv 0} \prod_{j_i=1}^{l_i} \partial^{a_{ij_i}}\varphi(x_i) \end{aligned} \tag{2.72}$$

für Multiindizes $a_{ij_i} \in \mathbb{N}_0^d$. Die Polynome $\frac{\partial^{l_i} A_i}{\partial(\partial^{a_{i1}}\varphi)\cdots\partial(\partial^{a_{il_i}}\varphi)}$ werden als *Subpolynome* von A_i bezeichnet.

Diese Entwicklung der retardierten Produkte nach den Feldern wird bei der Konstruktion der retardierten Produkte in Abschnitt 3.2.2 eine entscheidende Rolle spielen.

Kovarianz: Sei U eine unitäre Darstellung der eigentlichen orthochronen Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ (bzw. ihrer universellen Überlagerung im Fall von Feldern mit halbzahligem Spin) auf dem Raum der klassischen Feldgeschichten $\mathcal{C}$. Im Fall des reellen Skalarfeldes wählen wir

$$\mathcal{P}_+^\uparrow \ni (\Lambda, a) \longmapsto U(\Lambda, a), \tag{2.73}$$

definiert durch

$$(U(\Lambda, a)f)(x) \equiv f_{(\Lambda,a)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\Lambda^{-1}(x - a)), \tag{2.74}$$

wobei $\Lambda \in L_+^\uparrow$ (eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe), $a \in \mathbb{R}^4$ und $f \in \mathcal{C}$. U induziert in natürlicher Weise eine Wirkung von $\mathcal{P}_+^\uparrow$ auf dem Feld φ, definiert durch

$$\varphi_{(\Lambda,a)}(x)(f) = \varphi(x)(f_{(\Lambda,a)^{-1}}), \tag{2.75}$$

d.h. $\varphi_{(\Lambda,a)}(x) = \varphi(\Lambda x + a)$. Damit erhalten wir Automorphismen $\beta_{(\Lambda,a)}$ bzw. $\alpha_{(\Lambda,a)}$ ($\forall (\Lambda, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$) auf den Feldfunktionalen $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ bzw. den Feldpolynomen $\mathcal{P}$ durch

$$\beta_{(\Lambda,a)} F(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} F(\varphi_{(\Lambda,a)}) \qquad \forall F(\varphi) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}) \tag{2.76}$$

und

$$\begin{aligned}
\alpha_{(\Lambda,a)}\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{(\Lambda,a)}\,, &(2.77)\\
\alpha_{(\Lambda,a)}(AB) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{(\Lambda,a)}A\alpha_{(\Lambda,a)}B \quad , \quad A,B\in\mathcal{P}\,,\\
\alpha_{(\Lambda,a)}\partial^\mu A &\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^\mu_\nu\partial^\nu\alpha_{(\Lambda,a)}A. &(2.78)
\end{aligned}$$

Die natürlichen Fortsetzungen auf die Räume $\mathrm{Sym}^n\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{D}'(\mathbb{M}^{n+1},\mathcal{F}(\mathcal{C}))\simeq\mathcal{D}'(\mathbb{M}^{n+1})\otimes\mathcal{F}(\mathcal{C})$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\alpha_{(\Lambda,a)}$ bzw. $\beta_{(\Lambda,a)}$. Nach der Definition der retardierten Produkte und der Kovarianz von S_0 gilt

$$\beta_{(\Lambda,a)}R(F^{\otimes n},G)=R((\beta_{(\Lambda,a)}F)^{\otimes n},\beta_{(\Lambda,a)}G). \tag{2.79}$$

Damit gilt für die retardierten Produkte $R_{n,1}$

$$R_{n,1}\circ\alpha_{(\Lambda,a)}=\beta_{(\Lambda,a)}\circ R_{n,1}. \tag{2.80}$$

Kapitel 3

Algebraische Formulierung der perturbativen Quantenfeldtheorie

Nachdem in Kapitel 2 die wesentlichen Aspekte einer algebraischen Beschreibung der perturbativen klassischen Feldtheorie vorgestellt wurden, ist das Ziel dieses Kapitels, eine konsistente Quantisierungsmethode anzugeben, die einer klassischen Feldtheorie eine algebraisch formulierte perturbative Quantenfeldtheorie zuordnet. Dabei wird sich zeigen, dass ein großer Teil der algebraischen Struktur der klassischen Feldtheorie nicht nur aufrecht erhalten werden kann, sondern sogar wegweisenden Charakter bei der Definition einer konsistenten perturbativen Quantenfeldtheorie übernimmt.

Das grundlegende Objekt einer algebraischen Quantenfeldtheorie ist das Netz der lokalen Observablenalgebren $\mathcal{O} \longmapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O})$, das die sogenannten *Haag-Kastler-Axiome* erfüllt (siehe z.B. [24]). $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ bezeichnet dabei die Algebra der Observablen, die innerhalb des offenen Raumzeitgebietes $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ gemessen werden können. Eine Hilbert-Raum-Beschreibung der jeweiligen Quantenfeldtheorie ergibt sich durch eine geeignete Darstellung der Observablenalgebra $\mathfrak{A}$ (= induktiver Limes des Netzes der lokalen Observablenalgebren, formal $\mathfrak{A} = \bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$) durch Operatoren auf einem Hilbert-Raum. Während dies in Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden als eine äquivalente Beschreibung der Theorie angesehen werden kann, verliert man in einer Quantenfeldtheorie durch die Beschränkung auf eine spezielle Hilbert-Raum-Darstellung der Observablenalgebra wesentliche Einsichten in die Struktur der Theorie. Die algebraische Quantenfeldtheorie betrachtet deshalb die lokalen Observablenalgebren als die primären Objekte und versucht grundlegende Eigenschaften der Theorie aus deren Struktur und gegenseitigen Beziehung abzuleiten.

Die direkte Konstruktion lokaler Observablenalgebren einer Quantenfeldtheorie kann für freie Feldtheorien explizit durchgeführt werden (siehe beispielsweise [10]), erweist sich aber im Fall wechselwirkender Theorien als äußerst schwierig. Ausgehend von dieser Problemstellung wandten Dütsch und Fredenhagen in [10] den Formalismus der algebraischen Quantenfeldtheorie erfolgreich auf die störungstheoretische Behandlung wechselwirkender Quantenfeldtheorien an. Den Rahmen für eine solche algebraische perturbative Beschreibung einer Quantenfeldtheorie liefert die Observablenalgebra der zugehörigen freien Theorie.

Ausgehend von der algebraischen Beschreibung der klassischen Feldtheorie in Kapitel 2 bietet sich zur Konstruktion der lokalen Observablenalgebren einer zugehörigen Quantenfeldtheorie die Methode der *Deformationsquantisierung* (siehe beispielsweise [28]) an. Die grundlegende Idee dieser Quantisierungsvorschrift besteht darin, die kommutative Observablenalgebra der klassischen Theorie durch die Einführung eines nichtkommutativen Produktes (*Sternprodukt*), derart zu deformieren, dass die neue Algebra in konsistenter Weise als die quantenfeldtheoretische Observablenalgebra des zugrundliegenden klassischen Modells interpretiert werden kann. Das Sternprodukt wird definiert als eine Familie[1] $\star_\hbar$ von assoziativen Produkten auf einer vorgegebenen Poisson-Algebra[2] $\mathfrak{P}$, die folgende definierende Eigenschaften erfüllt:

$$\lim_{\hbar\to 0} F \star_\hbar G = FG \tag{3.1}$$

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{i\hbar}[F,G]_{\star_\hbar} = \{F,G\} \tag{3.2}$$

für alle $F, G \in \mathfrak{P}$ und $[F,G]_{\star_\hbar} \equiv F\star_\hbar G - G\star_\hbar F$. FG meint dabei das kommutative Produkt und $\{\cdot,\cdot\}$ die Poisson-Klammer der Poisson-Algebra $\mathfrak{P}$.

In unserem Fall wählen wir für $\mathfrak{P}$ das Netz der lokalen klassischen Observablenalgebren $\mathcal{O} \longmapsto \mathcal{F}_\mathcal{O}(\mathcal{C})$ zusammen mit der in Abschnitt 2.4 definierten Peierls-Klammer (eingeschränkt auf $\mathcal{F}_\mathcal{O}(\mathcal{C})$) als Poisson-Klammer und dem über die Auswertung auf $\mathcal{C}$ definierten kommutativen Produkt (siehe Abschnitt 2.1). Dabei bezeichnet $\mathcal{F}_\mathcal{O}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{C})$ die Algebra der (klassischen) Observablen[3] $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, die in dem offenen Raumzeitgebiet $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ lokalisiert sind

$$\mathcal{F}_\mathcal{O}(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}), \operatorname{supp}\tfrac{\delta F}{\delta\varphi} \subset \mathcal{O}\}. \tag{3.3}$$

Wie in Kapitel 2 wählen wir als Grundlage einer störungstheoretischen Konstruktion einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie die Observablenalgebra einer freien Quantenfeldtheorie und beschreiben wechselwirkende Felder darin als formale Potenzreihen einer Kopplungskonstanten. Dieses Vorgehen entspricht dem Wechselwirkungsbild der üblichen Störungstheorie im Fockraum der freien Felder. Dementsprechend betrachten wir zunächst die Quantisierung einer freien klassischen Feldtheorie und wenden uns anschließend der perturbativen Beschreibung einer wechselwirkenden Theorie zu.

[1] $\hbar \geq 0$ wird hier als ein Deformationsparameter aufgefasst.

[2] Eine Poisson-Algebra ist eine kommutative und assoziative Algebra mit einem zusätzlichen Produkt (Poisson-Klammer), das die Eigenschaften Antisymmetrie, Leibniz-Regel und Jakobi-Identität besitzt.

[3] Wir gehen hier davon aus, dass der Raum der klassischen Observablen mit dem Raum der Feldfunktionale $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ übereinstimmt. Dies ist für Theorien mit gewissen inneren bzw. Eichsymmetrien sicher nicht der Fall. Zur algebraischen Konstruktion der lokalen Observablenalgebren im Fall von Eichtheorien siehe Abschnitt 5.2

3.1 Quantisierung einer freien Feldtheorie

Zur Quantisierung einer freien klassischen Feldtheorie im Rahmen der Deformationsquantisierung ist die explizite Angabe eines Sternprodukts nötig. Im Gegensatz zur Quantisierung endlich dimensionaler Systeme ist die Wahl eines wohldefinierten Sternproduktes in der Quantenfeldtheorie wesentlich durch den singulären Charakter der Quantenfelder eingeschränkt. Wie Dütsch und Fredenhagen in [23] bewiesen, ist folgendes Sternprodukt – interpretiert als formale Potenzreihe in $\hbar$ – auf der Observablenalgebra $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ des freien Skalarfeldes ausgezeichnet:

$$\begin{aligned} F \star_\hbar G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_n \, & \frac{\delta^n F}{\delta\varphi(x_1) \cdots \delta\varphi(x_n)} \\ & \times \prod_{i=1}^{n} \Delta_+(x_i - y_i) \frac{\delta^n G}{\delta\varphi(y_1) \cdots \delta\varphi(y_n)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

für alle $F, G \in \mathcal{F}_\mathcal{O}(\mathcal{C})$ und mit der 2-Punkt-Funktion des freien skalaren Feldes Δ_+. Die geforderte Wellenfrontmengeneigenschaft der Distributionen t_n in (3.5) garantiert dabei die Wohldefiniertheit des punktweisen Produkts der jeweiligen Distributionen in (3.4), und führt dazu, dass $F \star_\hbar G$ selbst wieder ein Funktional in $\mathcal{F}_\mathcal{O}(\mathcal{C})$ ist, mit dem einzigen Unterschied, dass die Distributionen t_n nun in den Raum $\mathbb{C}[[\hbar]]$ der formalen Potenzreihen in $\hbar$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ abbilden (siehe [10]).

Entsprechend definieren wir $\mathcal{F}$ wie in Kapitel 2 als die Algebra der Funktionale F von der Form

$$F = \sum_{n=0}^{N} \int dx_1 \dots dx_n \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) t_n(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad N < \infty \tag{3.5}$$

mit $t_0 \in \mathbb{C}[[\hbar]]$ und $\mathbb{C}[[\hbar]]$-wertigen kompakt getragenen Distributionen $t_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{M}, \mathbb{C}[[\hbar]])$, $n > 0$, deren Wellenfrontmenge leeren Durchschnitt mit $\mathbb{M}^n \times (\overline{V}_+^n \cup \overline{V}_-^n)$ besitzt, zusammen mit dem über die Auswertung auf $\mathcal{C}$ definierten klassischen Produkt. Die Unteralgebren der im Raumzeitgebiet $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ lokalisierten Funktionale $F \in \mathcal{F}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(\mathcal{O})$:

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathcal{F}, \operatorname{supp} \tfrac{\delta F}{\delta \varphi} \subset \mathcal{O}\}. \tag{3.6}$$

(3.4) definiert damit auf den lokalen (Poisson-) Algebren $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ ein Sternprodukt

$$\star_\hbar : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \times \mathcal{F}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}), \tag{3.7}$$

das die Forderungen (3.1) und (3.2) (unter Verwendung der Identität $\Delta(x) = 2\mathrm{Im}\Delta_+(x)$) erfüllt.

Um den Zusammenhang mit der üblichen Quantisierung des freien skalaren Feldes im Fock-Raum herzustellen, betrachten wir folgende Darstellung ρ von $\mathcal{F}$ durch Operatoren auf dem freien Fock-Raum, gegeben durch

$$\rho(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \frac{\delta^n F}{\delta\varphi(x_1) \cdots \delta\varphi(x_n)}\Big|_{\varphi=0} : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) : \qquad \forall F \in \mathcal{F} \tag{3.8}$$

mit der bekannten Wick-Ordnung $:\cdots:$ im freien Fock-Raum, erklärt durch Ordnen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Dass ρ tatsächlich eine Darstellung ist (d.h. es gilt $\rho(F\star_\hbar G) = \rho(F)\rho(G)$ mit dem Operator-Produkt im Fock-Raum auf der rechten Seite) ist eine Folge des Wick-Theorems (siehe beispielsweise [11]). Der Kern der Darstellung ρ ist gerade das Ideal $\mathcal{J}^{S_0}$, das von den freien Feldgleichungen erzeugt wird, d.h.

$$\mathcal{J}^{S_0} = \left\{F \in \mathcal{F}, F = \sum_{n=1}^{N} \int dx_1 \ldots dx_n \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{n-1}) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x_n)} t_n(x_1, \ldots .x_n)\right\} \tag{3.9}$$

(zum Beweis siehe Theorem 4.1 in [23]). Folglich induziert (3.8) zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{J}^{S_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_0$ gemäß $\rho_0 \circ \pi = \rho$ eine treue Darstellung ρ_0 der Algebra der freien Felder $\mathcal{F}_0$ im Fock-Raum des freien Skalarfeldes.

Während das freie Feld $\pi(\varphi(h)) \in \mathcal{F}_0$, $h \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, bzw. das zugehörige freie Feld $\rho(\varphi(h))$ auf dem Fock-Raum die freien Feldgleichung erfüllt (d.h. es gilt $\pi(\varphi(h)) \equiv 0$ bzw. $\rho(\varphi(h)) \equiv 0$ für alle $h = (\Box + m^2)g$ mit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$), gilt dies für das Basisfeld $\varphi(h) \in \mathcal{F}$ nicht. Für die perturbative Beschreibung einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie hat sich die Algebra $\mathcal{F}$ gegenüber der Algebra $\mathcal{F}_0$ gerade in Zusammenhang mit der Charakterisierung der endlichen Renormierungsfreiheiten der wechselwirkenden Felder als wesentlich geeigneter erwiesen.

Aus der obigen Form der Darstellung ρ ist unmittelbar ersichtlich, dass dem Vakuum-Zustand im freien Fock-Raum folgendes lineare Funktional auf der Algebra $\mathcal{F}$ entspricht

$$\begin{aligned} \omega_0 : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{C}[[\hbar]] \\ F &\mapsto F|_{\varphi=0} = t_0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

mit F gegeben durch (3.5). Damit finden wir in der Entwicklung (2.71) die bekannte Wick-Entwicklung auf der algebraischen Ebene wieder.

3.2 Kausale Störungstheorie für lokale Wechselwirkungen

Nach der Behandlung der Quantisierung einer freien klassischen Feldtheorie wenden wir uns nun wechselwirkenden Theorien zu. Wie in Kapitel 2 beschränken wir uns auf lokalisierte Wechselwirkungen und definieren wechselwirkende Felder als formale Potenzreihen in einer Kopplungskonstante in der deformierten Algebra $(\mathcal{F}, \star_\hbar)$ der freien Feldfunktionale. Im Gegensatz zur Definition klassischer retardierter wechselwirkender Felder mit Hilfe retardierter Wellenoperatoren, werden in der Quantenfeldtheorie zunächst retardierte Produkte als $\mathcal{F}$-wertige Distributionen auf dem Raum der $\mathcal{P}^{\otimes n}$-wertigen Testfunktionen anhand der grundlegenden Eigenschaften der klassischen retardierten Produkte (siehe Abschnitt 2.5) definiert. Retardierte wechselwirkende Quantenfelder lassen sich dann ausgehend von den retardierten Produkten analog zu der Potenzreihenentwicklung (2.29) definieren. Diese Konstruktion einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie wurde in [22] auf der Grundlage der Arbeiten von Steinmann [29, 30] ausführlich beschrieben. Wie sich dabei zeigt, sind quantenfeldtheoretische retardierte Produkte im Gegensatz zu den klassischen retardierten

Produkten nicht eindeutig durch die geforderten Eigenschaften festgelegt. Diese Tatsache spiegelt sich unmittelbar in den bekannten endlichen Renormierungsfreiheiten einer Quantenfeldtheorie wider (siehe Abschnitt 3.2.3).

Der folgende Abschnitt behandelt die axiomatische Definition retardierter Produkte, welche den Grundbaustein für die Definition wechselwirkender Quantenfelder liefern. Anschließend werden die wesentlichen Aspekte der induktiven Konstruktion retardierter Produkte anhand der geforderten Eigenschaften in Abschnitt 3.2.2 beschrieben. Abschnitt 3.2.3 fasst die Charakterisierung der endlichen Renormierungsfreiheiten durch das Umdefinieren der Wechselwirkung und Feldfunktionale kurz zusammen.

3.2.1 Retardierte Produkte und wechselwirkende Felder

Motiviert durch die perturbative Behandlung der klassischen Feldtheorie definieren wir retardierte wechselwirkende Quantenfelder zu $B \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ und lokalisierten Wechselwirkungen $\lambda S \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ als formale Potenzreihen in einer Kopplungskonstante λ im Raum der freien Feldfunktionale $\mathcal{F}$ gemäß

$$B^{\lambda S} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} R(S^{\otimes n}, B) \equiv R(e_{\otimes}^{\lambda S}, B) \tag{3.11}$$

mit quantenfeldtheoretischen retardierten Produkten[4] R als "Entwicklungskoeffizienten". Diese führen wir wie in Abschnitt 2.5 zurück auf die Familie der linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} R_{n,1} : \mathrm{Sym}^n \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{M}^{n+1}, \mathcal{F}) \\ A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \otimes B &\longmapsto R_{n,1}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n, B), \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit der formalen Schreibweise

$$\begin{aligned} R_{n,1}(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n, B)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \otimes g) \equiv \int d(x,y) R_{n,1}(A_1(x_1) \otimes \cdots \otimes A_n(x_n), B(y)) \\ \times f_1(x_1) \cdots g(y) \end{aligned}$$

für $f_1, \ldots, f_n, g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$. Die Familie $(R_{n,1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ wird definiert anhand folgender Eigenschaften:

Anfangsbedingung:

$$R_{0,1}(A(x)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A(x) \quad \forall A \in \mathcal{P} \tag{3.13}$$

Kausalität:

$$\mathrm{supp} R_{n,1}(A(x_1) \otimes \cdots \otimes A(x_n), B(x)) \subset \{(x_1, \ldots, x_n, x) \in \mathbb{M}^{n+1} | x_i \in x + \overline{V}_-, \forall i \in \underline{n}\} \tag{3.14}$$

[4]Im folgenden bezeichnen wir klassische retardierte Produkte mit R_{cl}.

GLZ-Relation:

$$\sum_{I\subset\underline{n}}\{R_{|I|,1}(\otimes_{i\in I}H_i(x_i),F(x)),R_{|I^c|,1}(\otimes_{j\in I^c}H_j(x_j),G(y))\} \tag{3.15}$$
$$= R_{n+1,1}(\otimes_{i\in\underline{n}}H_i(x_i)\otimes F(x),G(y)) - R_{n+1,1}(\otimes_{i\in\underline{n}}H_i(x_i)\otimes G(y),F(x))$$

für $F,G,H_i\in\mathcal{P}$, $i\in\underline{n}$.

$\{\cdot,\cdot\}$ bezeichnet hier die quantenfeldtheoretische Poisson-Klammer definiert durch

$$\{F,G\} = \frac{1}{i\hbar}[F,G]_{\star_\hbar} \tag{3.16}$$

mit dem Sternprodukt (3.4) der freien Theorie. Zur deutlichen Unterscheidung bezeichnen wir im folgenden die klassische Peierls-Klammer mit $\{\cdot,\cdot,\}_{\text{cl}}$. Wegen (3.2) gilt $\lim_{\hbar\to 0}\{\cdot,\cdot\} = \{\cdot,\cdot\}_{\text{cl}}$.

Das entscheidende Merkmal der GLZ-Relation liegt darin, dass die linke Seite von (3.15) nur retardierte Produkte von geringerer Ordnung enthält als die rechte Seite. Dies ermöglicht zusammen mit der Anfangsbedingung von oben eine induktive Konstruktion retardierter Produkte.

Action-Ward-Identität: Wir wollen die Definition der retardierten Produkte auf den Raum der lokalen Funktionale $\mathcal{F}_{\text{loc}}$ ausweiten. Dazu fordern wir die Vertauschbarkeit von $R_{n,1}$ mit partiellen Ableitungen, d.h.

$$R_{n,1}(A_1(x_1)\otimes\cdots\partial^\mu A_i(x_i)\cdots\otimes A_n(x_n),B(y)) = \partial^\mu_{x_i}R_{n,1}(A_1(x_1)\otimes\cdots\otimes A_n(x_n),B(y)), \tag{3.17}$$

und analog für ∂^μ_y.

Bezeichne $\kappa:\mathcal{P}\otimes\mathcal{D}(\mathbb{M})\longrightarrow\mathcal{F}_{\text{loc}}$ die lineare Abbildung definiert durch $\kappa(A\otimes g)\stackrel{\text{def}}{=} A(g)\equiv\int dx\,A(x)g(x)$. Der Kern $\mathcal{K}$ der Abbildung κ wird aufgespannt von Elementen der Form $A\otimes\partial^\mu g+\partial^\mu A\otimes g$ für beliebige $A\in\mathcal{P}$ und $g\in\mathcal{D}(\mathbb{M})$. Wir bezeichnen die natürliche Fortsetzung von κ auf $(\text{Sym}^n\mathcal{P}\otimes\mathcal{P})\otimes\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})\simeq\text{Sym}^n(\mathcal{P}\otimes\mathcal{D}(\mathbb{M}))\otimes(\mathcal{P}\otimes\mathcal{D}(\mathbb{M})$ mit $\kappa_{n,1}$ und ihren Kern mit $\mathcal{K}_{n,1}$. $R_{n,1}$ – aufgefasst als $\mathcal{F}$-wertige Distribution auf den $\text{Sym}^n\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$-wertigen Testfunktionen auf $\mathbb{M}^{n+1}$ – verschwindet wegen der geforderten Action-Ward-Identität (3.17) identisch auf $\mathcal{K}_{n,1}$. Damit können retardierte Produkte R auf dem Raum $\text{Sym}^n\mathcal{F}_{\text{loc}}\otimes\mathcal{F}_{\text{loc}}$ implizit durch $R_{n,1}=R\circ\kappa_{n,1}$ definiert werden.

Explizit heißt das: Sind $F=\int dx\,A(x)g(x)$ und $G=\int dx\,B(x)h(x)$ mit $A,B\in\mathcal{P}$ und $g,h\in\mathcal{D}(\mathbb{M})$ lokale Funktionale, so werden retardierte Produkte auf der Algebra der lokalen Funktionale $\mathcal{F}_{\text{loc}}$ als lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} R:\text{Sym}^n\mathcal{F}_{\text{loc}}\otimes\mathcal{F}_{\text{loc}} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ F^{\otimes n}\otimes G &\longmapsto R(F^{\otimes n},G) \end{aligned} \tag{3.18}$$

durch

$$R(F^{\otimes n}, G) \stackrel{\text{def}}{=} \int d(x,y)\, R_{n,1}(A(x_1) \otimes \cdots \otimes A(x_n), B(y)) g(x_1) \cdots g(x_n) h(y)$$

definiert.

Kovarianz: Wir fordern die Kovarianz der retardierten Produkte $R_{n,1}$, d.h. es gelte mit den in Abschnitt 3.2.1 definierten Automorphismen $\alpha_{(\Lambda,a)}$ und $\beta_{(\Lambda,a)}$

$$R_{n,1} \circ \alpha_{(\Lambda,a)} = \beta_{(\Lambda,a)} \circ R_{n,1} \tag{3.19}$$

für alle $(\Lambda, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$.

Feldunabhängigkeit: Wir beschränken uns auf Wirkungen S_0 der zugrundeliegenden freien Theorie, die höchstens quadratisch von den Feldern abhängen und fordern die Unabhängigkeit der retardierten Produkte von den Feldern, d.h. $R_{n,1}$ vertausche mit Funktionalableitungen $\frac{\delta}{\delta\varphi}$. Damit kann der distributionelle Anteil eines retardierten Produktes $R_{n,1}(A_1(x_1) \otimes \cdots \otimes A_n(x_n), B(y))$ mit Hilfe der Wick-Entwicklung (2.72) auf skalare Distributionen (Vakuumserwartungswerte der retardierten Produkte von Subpolynomen der $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{P}$) zurückgeführt werden.

Unitarität: Besitzt die Algebra der Feldfunktionale $\mathcal{F}$ (bzw. die Algebra der Feldpolynome $\mathcal{P}$) eine *-Struktur (beispielsweise für eine komplexes skalares Feld), so fordern wir für alle $F_1, \ldots, F_n, G \in \mathcal{F}_{\text{loc}}$

$$R(F_1 \otimes \cdots \otimes F_n, G)^* = R(F_1^* \otimes \cdots \otimes F_n^*, G^*) \tag{3.20}$$

und analog für $R_{n,1}$. Diese Forderung führt im Fall einer hermiteschen Wechselwirkung $S_{\text{int}}^* = S_{\text{int}}$ zu einer formal unitären S-Matrix[5] und wechselwirkenden Feldern, die sich unter der *-Struktur wie die zugrundeliegenden Feldfunktionale verhalten: $(G^S)^* = (G^*)^S$.

Feldgleichung: Wir fordern die Yang-Feldman-Gleichung in der off-shell-Version

$$\varphi^G(x) = \varphi(x) - \int dy\, \Delta^{\text{ret}}(x-y) \Big(\frac{\delta G}{\delta \varphi(y)} \Big)^G \qquad \forall G \in \mathcal{F}_{\text{loc}} \tag{3.21}$$

mit der (eindeutigen) retardierten Greensfunktion der freien Wirkung S_0. Damit erfüllt das wechselwirkende Feld $\varphi^S(x)$ die wechselwirkende off-shell Feldgleichung

$$(\Box + m^2)\varphi^S(x) + R\Big(e_\otimes^S, \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\Big) = \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)}. \tag{3.22}$$

[5]Zur Definition der S-Matrix in der kausalen Störungstheorie siehe Anhang A.

Die Definition quantenfeldtheoretischer retardierter Produkte anhand dieser Eigenschaften wird vornehmlich motiviert durch die entsprechenden Eigenschaften der klassischen retardierten Produkte. Der einzige Unterschied zu den in Abschnitt 2.5 aufgezählten Eigenschaften liegt in der Ersetzung der Peierls-Klammer in der GLZ-Relation (3.15) durch die deformierte Poisson-Klammer $\{\cdot,\cdot\} = \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]_{\star_\hbar}$. Daraus folgt unter Beachtung von (3.2) unmittelbar, dass quantenfeldtheoretische retardierte Produkte zu unterster Ordnung in $\hbar$ mit den klassischen retardierten Produkten R^{cl} übereinstimmen[6]. Formal gilt also

$$\lim_{\hbar\to 0} R_{n,1} = R^{\mathrm{cl}}_{n,1}. \tag{3.23}$$

Wie aus dem nächsten Abschnitt hervorgeht, sind quantenfeldtheoretische retardierte Produkte durch die obigen Forderungen bereits weitgehend festgelegt. Die verbleibende Freiheit in ihrer Festlegung kann in gewissen Fällen dazu dienen, weitere Normierungseigenschaften an die retardierten Produkte (z.B. Symmetrieeigenschaften der zugrundeliegenden klassischen Theorie, siehe Kapitel 4) zu erfüllen[7].

3.2.2 Induktive Konstruktion der retardierten Produkte

Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über das in [22] ausführlich behandelte Vorgehen zur induktiven Konstruktion retardierter Produkte anhand der im vorhergehenden Abschnitt geforderten Eigenschaften.

Bezeichne $\mathcal{P}'$ den Dualraum von $\mathcal{P}$. Mit Hilfe der Isomorphie $\mathcal{D}'(\mathbb{M}^{n+1},\mathcal{F}) \simeq \mathcal{D}'(\mathbb{M}^{n+1})\otimes\mathcal{F}$ interpretieren wir $R_{n,1}$ (3.12) als $(\mathrm{Sym}^n\mathcal{P}'\otimes\mathcal{P}')\otimes\mathcal{F}$ -wertige, in den ersten n Variablen symmetrische Distribution auf $\mathbb{M}^{n+1}$ und schreiben formal $R_{n,1}(x_1,\ldots,x_n,y)$. Nach Einsetzen von $A_1\otimes\cdots\otimes A_n\otimes B \in \mathrm{Sym}^n\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$ erhalten wir daraus die $\mathcal{F}$-wertige Distribution $R_{n,1}(A_1(x_1)\otimes\cdots\otimes A_n(x_n),B(y))$ zurück.

Die Konstruktion der retardierten Produkte $R_{n,1}$ erfolgt induktiv über die Ordnung n. Zu unterster Ordnung ist $R_{0,1}$ durch (3.13) festgelegt (**Anfangsbedingung**). Entscheidend ist jetzt, dass retardierte Produkte zu höheren Ordnungen $n > 0$ durch die retardierten Produkte zu niedrigeren Ordnungen bereits weitgehend festgelegt sind:

Satz 3.1. *Seien retardierte Produkte $R_{k,1}$ für alle $k < n$ derart konstruiert, dass sie die geforderten Bedingungen in Abschnitt 3.2.1 erfüllen. Dann existiert eine eindeutige $(\mathrm{Sym}^n\mathcal{P}'\otimes\mathcal{P}')\otimes\mathcal{F}$ -wertige Distribution $R^\circ_{n,1}$ auf $\mathbb{M}^{n+1}-\mathbb{D}_{n+1}\equiv\mathbb{M}^{n+1}-\{(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{M}^{n+1}, x_1=\cdots=x_n=y\}$, die ebenfalls die Forderungen an $R_{n,1}$ aus 3.2.1 erfüllt.*

Der Beweis beruht auf den Forderungen **Kausalität** und **GLZ-Relation** sowie der Symmetrie von $R_{n,1}$ in den ersten n Einträgen und ist in vollständiger Form in [22], p.21ff, zu finden. Hier soll nur die Idee des Beweises skizziert werden:

[6] In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, dass in [22] eine andere Konvention gewählt wurde.

[7] In [22] werden überdies Glattheit in der Masse und "fast homogenes" Transformationsverhalten unter Skalentransformationen von den retardierten Produkten gefordert. Diese Eigenschaften nehmen keinen Einfluss auf die Betrachtungen dieser Arbeit und werden deshalb nicht in die obige Liste der definierenden Eigenschaften aufgenommen.

Zunächst folgt aus der Kausalität (3.14), dass $R^\circ_{n,1}(x_1,\ldots,x_n,y)$ verschwindet, falls mindestens ein x_k außerhalb von $y+\overline{V}_-$ liegt. In den übrigen Fällen existiert zu $(x_1,\ldots,x_n, y)\notin\mathbb{D}_{n+1}$ mindestens ein x_k das sich von y unterscheidet und in $y+\overline{V}_-$ liegt. Aus der GLZ-Relation (3.15) folgt dann

$$R^\circ_{n,1}(x_1,\ldots,x_n,y) = \sum_{I\subset\underline{n}\backslash\{k\}} \{R_{|I|,1}(x_i, i\in I, x_k), R_{|I^c|,1}(x_j, j\in I^c, y)\}. \tag{3.24}$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite dieser Gleichung bekannt. Es bleibt zu zeigen, dass diese Festlegung von $R^\circ_{n,1}(x_1,\ldots,x_n,y)$ im Fall eines zweiten $x_{k'}$ mit $x_{k'}\neq y$ und $x_{k'}\in y+\overline{V}_-$ auf keinen Widerspruch führt und dass die so außerhalb von $\mathbb{D}_{n+1}$ definierte Distribution $R^\circ_{n,1}$ die geforderten Eigenschaften erfüllt (siehe [22]).

Eine weitere Folge der GLZ-Relation ist die Tatsache, dass nur der vollständig symmetrische Anteil S_{n+1} des retardierten Produktes $R_{n,1}$

$$S_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} R_{n,1}(x_{k+1},\ldots,x_n,y,x_1,\ldots,x_k) + R(x_1,\ldots,x_n,y)\Big)$$

durch die retardierten Produkte zu niedrigeren Ordnungen unbestimmt ist. Tatsächlich erhält man unter Verwendung von (3.15)

$$\begin{aligned} R_{n,1}(x_1,\ldots,x_n,y) &= S_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,y) \\ &\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{I\subset\underline{n}\backslash\{k\}} \big\{R_{|I|,1}(x_i, i\in I, x_k), R_{|I^c|,1}(x_j, j\in I_c, y)\big\}. \end{aligned}$$

Der wesentliche Schritt in der Konstruktion von $R_{n,1}$ besteht jetzt in der Fortsetzung des symmetrischen Anteils S°_{n+1} von $R^\circ_{n,1}$ auf ganz $\mathbb{M}^{n+1}$, d.h. auf den Raum aller Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$. Dabei spielen die übrigen in Abschnitt 3.2.1 geforderten Eigenschaften eine tragende Rolle. Mit Hilfe der **Feldunabhängigkeit** lässt sich die Fortsetzung der Distributionen $S^\circ_{n+1}(A_1(x_1)\otimes\cdots\otimes A_n(x_n)\otimes B(y))$ zu beliebigen $A_1,\ldots,A_n,B\in\mathcal{P}$ auf die Fortsetzung gewisser skalarer Distributionen zurückführen (siehe die Entwicklung (2.72)). Genauer handelt es sich dabei um vollständig symmetrisierte Vakuumserwartungswerte $s^\circ_{n+1}(\tilde{A}_1(x_1)\otimes\cdots\otimes\tilde{A}_n(x_n)\otimes\tilde{B}(y)) \equiv S^\circ_{n+1}(\tilde{A}_1(x_1)\otimes\cdots\otimes\tilde{A}_n(x_n)\otimes\tilde{B}(y))\big|_{\varphi=0}$ von retardierten Produkten mit Subpolynomen $\tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_n,\tilde{B}\in\mathcal{P}$ der ursprünglichen Feldpolynome $A_1,\ldots,A_n,B\in\mathcal{P}$ als Einträge. Wegen der geforderten **Kovarianz** bezüglich $(\mathbb{1},a)\in\mathcal{P}_+^\uparrow$ für alle $a\in\mathbb{R}^4$ hängen diese Distributionen nur von den relativen Koordinaten $(y-x_1,\ldots,y-x_n)$ ab und das Problem reduziert sich damit auf die Fortsetzung gewisser skalarer Distributionen, definiert auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, nach ganz $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. In den typischen auftretenden Fällen ist dies stets möglich, allerdings ist die Fortsetzung im allgemeinen nicht eindeutig. Dies ist der Ursprung der *endlichen Renormierungsfreiheiten* einer perturbativen Quantenfeldtheorie.

Die Existenz und Eindeutigkeit der Fortsetzung einer Distribution $t^\circ\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ zu einer Distribution $t\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ lässt sich durch den von Steinmann eingeführten *Skalengrad* charakterisieren [29]:

Definition 3.2. Sei $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Der Skalengrad $\mathrm{sd}(t)$ von t ist definiert durch

$$\mathrm{sd}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\delta \in \mathbb{R} | \lim_{\rho \searrow 0} \rho^\delta t(\rho x) = 0\}. \tag{3.25}$$

Bemerkung 3.3. Der Skalengrad einer Distribution $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ lässt sich in gleicher Weise definieren und stimmt mit dem Skalengrad der zugehörigen auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ eingeschränkten Distribution überein.

Wir schränken die Freiheit in der Fortsetzung von s°_{n+1} weiter ein durch die Forderung, dass der Skalengrad der fortgesetzten Distribution s_{n+1} nicht größer ist als derjenige von s°_{n+1}.

Es gilt nun folgendes Theorem:

Theorem 3.1. *Sei $t^\circ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Dann gilt:*

- *Ist* $\mathrm{sd}(t^\circ) < n$, *so existiert eine eindeutige Fortsetzung* $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\mathrm{sd}(t) = \mathrm{sd}(t^\circ)$.
- *Ist* $n \leq \mathrm{sd}(t^\circ) < \infty$, *so existiert stets eine Fortsetzung* $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\mathrm{sd}(t) = \mathrm{sd}(t^\circ)$, *diese ist jedoch nicht eindeutig. Sei t_0 eine spezielle Fortsetzung, so lautet die allgemeinste Fortsetzung*

$$t = t_0 + \sum_{|a| \leq \mathrm{sd}(t^\circ) - n} C_a \partial^a \delta^{(n)} \tag{3.26}$$

  mit beliebigen Konstanten $C_a \in \mathbb{C}$ und der Delta-Distribution $\delta^{(n)}$ auf $\mathbb{R}^n$.

- *Ist* $\mathrm{sd}(t^\circ) = \infty$, *dann existiert keine Fortsetzung* $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Ein Beweis dieses Theorems findet sich beispielsweise in [22, 13].

Die Fortsetzung der skalaren Distributionen $s^\circ_{n+1}(\tilde{A}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{A}_n, \tilde{B})(y - x_1, \ldots, y - x_n)$ unterliegt schließlich noch den beiden verbleibenden Bedingungen **Action-Ward-Identität** und **Feldgleichung**. Dütsch und Fredenhagen konnten in [22] zeigen, dass diese Forderungen stets erfüllt werden können. Im Rahmen dieser Arbeit genügt es, die wesentlichen Schritte des Beweises der Action-Ward-Identität kurz zu erläutern:

Wegen der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen mit Funktionalableitungen in der Entwicklung (2.72) spiegelt sich die Gültigkeit der Action-Ward-Identität für $R_{n,1}$ in der Vertauschbarkeit der skalaren Distributionen $r_{n,1}$ mit partiellen Ableitungen wider. Nach Voraussetzung gilt dies bereits für die skalaren Distributionen $r^\circ_{n,1}$ bzw. s°_{n+1}, da $R^\circ_{n,1}$ aus retardierten Produkten niedriger Ordnung konstruiert wurde. Sei zu $A \in \mathcal{P}$ eine Fortsetzung $s_{n+1}(\ldots, A(x), \ldots)$ von $s^\circ_{n+1}(\ldots, A(x), \ldots)$ vorgegeben. Dann ist $\partial^\mu_x s_{n+1}(\ldots, A(x), \ldots)$ eine Fortsetzung von $\partial^\mu_x s^\circ_{n+1}(\ldots, A(x), \ldots) = s^\circ_{n+1}(\ldots, \partial^\mu A(x), \ldots)$. Man definiert die Fortsetzung von $s^\circ_{n+1}(\ldots, \partial^\mu A(x), \ldots)$ nun durch $s_{n+1}(\ldots, \partial^\mu A(x), \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} \partial^\mu_x s_{n+1}(\ldots, A(x), \ldots)$. Die Hauptschwierigkeit besteht jetzt darin, zu beweisen, dass dieses Vorgehen auf keine Widersprüche führt. Dazu lässt sich zeigen, dass in $\mathcal{P}$ ein Unterraum $\mathcal{P}_{\mathrm{bal}}$ existiert, derart dass sich jedes Feldpolynom in $\mathcal{P}$ schreiben lässt als die Anwendung eines Polynoms in den partiellen Ableitungen ∂^μ auf ein Element in $\mathcal{P}_{\text{bal}}$, dies jedoch für kein Element in $\mathcal{P}_{\text{bal}}$ gilt. Die Feldpolynome in $\mathcal{P}_{\text{bal}}$ heißen *balancierte Felder*. Mit diesem Resultat lässt sich dann die Action-Ward-Identität erfüllen, indem man zunächst die skalaren Distributionen $s^\circ_{n+1}(A_1,\ldots,A_n,B)$ für $A_1,\ldots,A_n,B \in \mathcal{P}_{\text{bal}}$ unabhängig fortsetzt und anschließend die Fortsetzungen der Distributionen s°_{n+1} mit Einträgen aus $\mathcal{P}-\mathcal{P}_{\text{bal}}$ als Linearkombinationen von partiellen Ableitungen dieser Fortsetzungen definiert.

3.2.3 Normierungsfreiheit der retardierten Produkte

Im vorhergehenden Abschnitt wurde skizziert, wie sich retardierte Produkte (3.12) prinzipiell konstruieren lassen, so dass diese alle Forderungen in Abschnitt 3.2.1 erfüllen. Es ist wesentliches Merkmal der Konstruktion, dass die retardierten Produkte jedoch dadurch im allgemeinen noch nicht eindeutig festgelegt werden (siehe Theorem 3.1). Dies bedingt die *endliche Renormierungsfreiheit* der perturbativen Quantenfeldtheorie, die auch in anderen Renormierungsschemata auftritt und Ursprung der Einführung und Untersuchung von Renormierungsgruppen ist. Ein zentrales Ergebnis der Renormierungstheorie ist die Tatsache, dass die endlichen Renormierungsfreiheiten durch eine Umdefinition der physikalischen Parameter ausgedrückt werden können. Im Rahmen der kausalen Störungstheorie mittels retardierter Produkte kann das folgendermaßen ausgedrückt werden [22]:

Theorem 3.2. *Gegeben seien retardierte Produkte* $R,\hat{R} : \mathrm{Sym}\mathcal{F}_{\text{loc}} \otimes \mathcal{F}_{\text{loc}} \longrightarrow \mathcal{F}$ *mit den Eigenschaften* Anfangsbedingung*,* Kausalität*,* Kovarianz*,* GLZ-Relation*,* Unitarität*,* Feldunabhängigkeit *und* Feldgleichung*. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung*

$$D : \mathrm{Sym}\mathcal{F}_{\text{loc}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\text{loc}} \tag{3.27}$$

mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&(i) && D(\mathbb{1}) = 0\\
&(ii) && D(F) = F, \quad \forall F \in \mathcal{F}_{\text{loc}}\\
&(iii) && \mathrm{supp}\Big(\frac{\delta D(F_1\otimes\cdots\otimes F_n)}{\delta\varphi}\Big) \subset \bigcap_{i\in\underline{n}} \mathrm{supp}\Big(\frac{\delta F_i}{\delta\varphi}\Big), \quad F_i \in \mathcal{F}_{\text{loc}}\\
&(iv) && \frac{\delta D(e^F_\otimes)}{\delta\varphi} = D\Big(e^F_\otimes \otimes \frac{\delta F}{\delta\varphi}\Big)\\
&(v) && D(e^F_\otimes \otimes \varphi(h)) = \varphi(h), \quad \forall F \in \mathcal{F}_{\text{loc}}\\
&(vi) && D(F^{\otimes n})^* = D((F^*)^{\otimes n})\\
&(vii) && \beta_{(\Lambda,a)} D(F^{\otimes n}) = D((\beta_{(\Lambda,a)}F)^{\otimes n}), \quad \forall (\Lambda,a) \in \mathcal{P}^\uparrow_+
\end{aligned} \tag{3.28}$$

und den Automorphismen $\beta_{(\Lambda,a)}$ *(2.76), so dass folgende Relation zwischen* R *und* $\hat{R}$ *gilt*

$$\hat{R}(e^S_\otimes, F) = R\big(e_\otimes^{D(e^S_\otimes)}, D(e^S_\otimes \otimes F)\big) \qquad \forall S,F \in \mathcal{F}_{\text{loc}}. \tag{3.29}$$

Umgekehrt erhält man zu gegebenem retardierten Produkt R *(mit den geforderten Eigenschaften von oben) und einer Abbildung* D *mit den Eigenschaften (i) bis (vii) via (3.29) ein neues retardiertes Produkt* $\hat{R}$*, das wieder die oben geforderten Eigenschaften besitzt.*

Ein Beweis dieses Theorems findet sich in der Orginalarbeit [22].

Die wesentliche Aussage dieses Theorems liegt darin, dass sich endliche Renormierungen der wechselwirkenden Felder zum Feldfunktional F und der Wechselwirkung S, denen die Wahl verschiedener Fortsetzungen der jeweiligen Distributionen auf die totale Diagonale bei der Konstruktion retardierter Produkte zugrundeliegen, durch eine Umdefinition der Wechselwirkung $S \longmapsto D(e_{\otimes}^{S})$ und des Feldfunktionals $F \longmapsto D(e_{\otimes}^{S} \otimes F)$ ausdrücken lassen. Da die klassischen retardierten Produkte eindeutig sind, gilt für die Abbildung D stets

$$D(e_{\otimes}^{S}) = S + \mathcal{O}(\hbar) \quad \text{und} \quad D(e_{\otimes}^{S} \otimes F) = F + \mathcal{O}(\hbar). \tag{3.30}$$

Kapitel 4

Die Master-Ward-Identität

Ein zentrales Problem der Quantenfeldtheorie lautet: Welche Symmetrien der zugrundeliegenden klassischen Feldtheorie können bei der Quantisierung aufrecht erhalten werden und welche lassen sich nicht in konsistenter Weise in die Quantentheorie übertragen? In der klassischen Feldtheorie treten kontinuierliche Symmetrien gemäß des Noether-Theorems stets gemeinsam mit erhalten Strömen auf, aus denen durch Integration gewisse Erhaltungsgrößen gewonnen werden können. Der Beweis des Noether-Theorems in der klassischen Feldtheorie ist wegen des singulären Charakters der wechselwirkenden Quantenfelder jedoch nicht in die Quantenfeldtheorie übertragbar.

Im Rahmen der in Kapitel 3 beschriebenen kausalen Störungstheorie kann es beim zentralen Punkt der Konstruktion retardierter Produkte – der Fortsetzung auf die totale Diagonale – zu Verletzungen gewisser Symmetrien kommen. Die entscheidende Frage lautet damit, in welchen Fällen eine Fortsetzung der jeweiligen skalaren Distributionen $t^\circ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k \backslash \{0\})$ zu $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$ existiert, so dass die Symmetrien der Distributionen t° auch für die Fortsetzung t gelten. Diese Fragestellung wurde in [22] auf ein kohomologisches Problem in der zugrundliegenden Symmetriegruppe zurückgeführt. Die Anwendung dieses Resultats auf die Poincaré-Symmetrie ergibt unmittelbar die Existenz retardierter Produkte, die die in Abschnitt 3.2.1 geforderte Kovarianz erfüllen. Eine explizite Konstruktion kovarianter Fortsetzungen wurde bereits in den früheren Arbeiten [31] und [32] gefunden.

In der Quantenfeldtheorie wird die Erhaltung gewisser Ströme, die klassisch erhaltenen Strömen entsprechen, gewöhnlich in Form sogenannter *Ward-Identitäten* ausgedrückt. Die Gültigkeit der Ward-Identitäten ist im allgemeinen nicht zwangsläufig garantiert, selbst wenn die jeweilige Symmetrie bei der Konstruktion der retardierten Produkte respektiert werden kann. Ein Beispiel dafür ist die bekannte Axial-Anomalie der masselosen Quantenelektrodynamik: Nach dem oben erwähnten Resultat aus [22] kann die Gültigkeit der beiden Symmetrien $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ und $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)\gamma^5}\psi(x)$ in der Konstruktion retardierter Produkte aufrecht erhalten werden. Andererseits ist aber bekannt, dass die gleichzeitige Erhaltung der zugehörigen Ströme $j_V^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ (Vektor-Strom) und $j_A^\mu = -\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ (Axial-Strom) in der wechselwirkenden Quantenfeldtheorie nicht erreicht werden kann (siehe beispielsweise [33]). Dieses Beispiel zeigt explizit, dass in einer perturbativen Quantenfeldtheorie gewisse kontinuierliche Symmetrien nicht zwangsläufig mit erhaltenen Strömen einhergehen.

Im Rahmen der kausalen Störungstheorie (Kapitel 3) stellen Ward-Identitäten zusätzliche Normierungsbedingungen dar, die die Freiheit in der Konstruktion retardierter Produkte weiter einschränken. Es existiert kein allgemeines Argument dafür, welche Ward-Identitäten in der Quantenfeldtheorie durch eine geeignete Konstruktion retardierter Produkte erfüllt werden können. Die Erfüllbarkeit der Ward-Identität, die die Erhaltung des wechselwirkenden Materiestroms in der wechselwirkenden QED ausdrückt, wurde in [20] explizit gezeigt.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer sehr allgemeinen Normierungsbedingung, der sogenannten *Master-Ward-Identität* (MWI), die in speziellen Beispielen auf die bekannten Ward-Identitäten führt. Die MWI wurde ursprünglich in [1] im Rahmen der kausalen Störungstheorie mit Hilfe zeitgeordneter Produkte formuliert und anschließend in der klassischen Feldtheorie durch klassische retardierte Produkte ausgedrückt [21]. Dabei stellte sich heraus, dass die MWI in der klassischen Theorie als die allgemeinste Identität angesehen werden kann, die aus den freien Feldgleichungen folgt.

Wir beschreiben in Abschnitt 4.1 die wesentlichen Schritte der Ableitung der MWI in der klassischen Feldtheorie. Während die MWI klassisch stets erfüllt ist, stellt sie in der Quantenfeldtheorie eine hochgradig nichttriviale Normierungsbedingung an die retardierten Produkte dar, die aufgrund der bekannten Anomalien sicher nicht immer erfüllt werden kann. Es stellt sich damit die Frage, inwiefern die endlichen Normierungsfreiheiten der – gemäß den Forderungen in Abschnitt 3.2.1 – konstruierten retardierten Produkte ausreichen, um spezielle Fälle der MWI zu erfüllen. Im Hinblick auf diese Frage wird in Abschnitt 4.2 eine in der Quantenfeldtheorie allgemein gültige Identität abgeleitet, die die allgemeine Verletzung der MWI in der Quantenfeldtheorie in Form lokaler Terme (*Anomalien*[1]) ausdrückt. Durch die Einführung eines effektiven Feldformalismus in Abschnitt 4.3 werden gewisse Ähnlichkeiten dieser Identität mit der Form des Quantenwirkungsprinzips in [8] aufgezeigt. Schließlich werden in Abschnitt 4.4 Ansätze zu ihrer Anwendung in Zusammenhang mit der Frage der Erfüllbarkeit der MWI diskutiert.

4.1 Die Master-Ward-Identität in der klassischen Feldtheorie

Dieser Abschnitt folgt im wesentlichen den Darstellungen in [21] und beschäftigt sich mit der Ableitung der MWI in der klassischen Feldtheorie. In Hinblick auf die anschließende Übertragung in die Quantenfeldtheorie wird eine explizite Form der MWI im off-shell-Formalismus gefunden.

Der klassischen MWI liegt die Faktorisierungseigenschaft (2.6) klassischer Felder unter Einschränkung auf den Raum der Lösungen der Feldgleichung zugrunde. Sei S die Wirkung einer klassischen Feldtheorie und $\mathcal{J}^S$ das Ideal in $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, das von den Feldgleichungen zur

[1]Wir verwenden den Begriff "Anomalie" hier auch im Fall von Verletzungen gewisser Ward-Identitäten, die sich durch eine endliche Renormierung beheben lassen.

Wirkung S erzeugt wird, d.h.

$$\mathcal{J}^S \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{F(\varphi) = \sum_{n=1}^{N} \int dx_1 \dots dx_n \, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{n-1}) \frac{\delta S}{\delta \varphi(x_n)} t_n(x_1, \dots, x_n), N < \infty \Big\} \tag{4.1}$$

mit den gleichen Einschränkungen an die Distributionen t_n wie in (2.9). Dann gilt nach (2.6) die allgemeine Identität

$$A_S \equiv A|_{\mathcal{C}(S)} = 0 \qquad \forall A \in \mathcal{J}^S. \tag{4.2}$$

Wir betrachten jetzt wieder Wirkungen der Form $S = S_0 + S_{\text{int}}$ mit fixierter freier Wirkung S_0 und beliebiger Wechselwirkung $S_{\text{int}} \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, und notieren eine perturbative Version der Identität (4.2). Sei dazu

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \int dx \, Q(x) \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(x)} \tag{4.3}$$

mit

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{N} \int dx_1 \dots dx_n \, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) t_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x) \tag{4.4}$$

ein Element des Ideals $\mathcal{J}^{S_0}$. Wir definieren zu Elementen A dieser Form eine Derivation δ_A auf $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ durch

$$\delta_A \stackrel{\text{def}}{=} \int dx \, Q(x) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)}. \tag{4.5}$$

Die perturbative Version der Identität

$$\big(A + \delta_A S_{\text{int}}\big)_{S_0 + S_{\text{int}}} \equiv \int dx \, Q(x)_{S_0 + S_{\text{int}}} \Big(\frac{\delta(S_0 + S_{\text{int}})}{\delta \varphi(x)} \Big)_{S_0 + S_{\text{int}}} = 0 \tag{4.6}$$

lautet dann im on-shell-Formalismus

$$R^{\text{cl}}_{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, A + \delta_A S_{\text{int}}) = 0 \qquad \forall S_{\text{int}} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}). \tag{4.7}$$

Gleichung (4.7) ist die *Master-Ward-Identität* (MWI), wie sie in [21] formuliert wurde. Sie kann als die allgemeinste Identität der perturbativen klassischen Feldtheorie angesehen werden, die aus den klassischen Feldgleichungen folgt. Unter Verwendung der (klassischen) GLZ-Relation kann (4.7) verallgemeinert werden zu

$$R^{\text{cl}}_{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}} \otimes (A + \delta_A S_{\text{int}}), B) + R^{\text{cl}}_{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, \delta_A B) = 0 \qquad \forall B, S_{\text{int}} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}). \tag{4.8}$$

Wir benötigen für das spätere Vorgehen eine explizite Form der MWI im off-shell-Formalismus. Analog zu

$$\frac{\delta(S_0 + S_{\text{int}})}{\delta \varphi(x)} \circ r_{S_0 + S_{\text{int}}, S_0} \equiv 0 \tag{4.9}$$

erhalten wir aus der off-shell-Definition der Wellenoperatoren (siehe (2.17))

$$\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta(S_0 + S_{\text{int}})}{\delta\varphi(x)} \circ r^{S_0+S_{\text{int}},S_0} \tag{4.10}$$

für alle $f \in \mathcal{C}$ und alle $x \in \mathbb{M}$ die Identität

$$R_{\text{cl}}^{S_0}\big(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, \frac{\delta(S_0 + S_{\text{int}})}{\delta\varphi(x)}\big) = \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}. \tag{4.11}$$

Das ist die Feldgleichung der wechselwirkenden Theorie im off-shell-Formalismus (siehe (3.22)). Eine explizite off-shell-Version der MWI ergibt sich jetzt aus der Faktorisierungseigenschaft klassischer wechselwirkender Felder. Zusammen mit (4.10) finden wir

$$\begin{aligned}(A + \delta_A S_{\text{int}}) \circ r^{S_0+S_{\text{int}},S_0} &= \int dx\, Q(x) \circ r^{S_0+S_{\text{int}},S_0} \frac{\delta(S_0 + S_{\text{int}})}{\delta\varphi(x)} \circ r^{S_0+S_{\text{int}},S_0} \\ &= \int dx\, Q(x) \circ r^{S_0+S_{\text{int}},S_0} \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Insgesamt erhalten wir die MWI im off-shell Formalismus:

Satz 4.1. *Sei $A = \int dx\, Q(x) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}$ ein beliebiges Funktional in $\mathcal{J}^{S_0}$ mit $Q(x) \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ (4.4) und S_0 die freie Wirkung einer klassischen Feldtheorie. Dann gilt für alle $S_{\text{int}} \in \mathcal{F}$ die Identität*

$$R_{\text{cl}}^{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, A + \delta_A S_{\text{int}}) = \int dx\, R_{\text{cl}}^{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, Q(x)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)} \in \mathcal{J}^{S_0}. \tag{4.13}$$

Die MWI führt in konkreten Modellen auf die bekannten Ward-Identitäten. Zur Verdeutlichung betrachten wir folgendes Beispiel:

Beispiel 4.2. Die freie Wirkung des komplexen Skalarfeldes zur Masse m lautet

$$S_0 = \int dx\, (\partial^\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi^*(x) - m^2\varphi(x)\varphi^*(x)). \tag{4.14}$$

S_0 ist invariant unter globalen Symmetrieoperationen der Form

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\longrightarrow e^{i\alpha}\varphi(x) \\ \varphi^*(x) &\longrightarrow e^{-i\alpha}\varphi^*(x) \quad , \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

und der zugehörige Strom

$$j_\mu = i(\varphi\partial_\mu\varphi^* - \varphi^*\partial_\mu\varphi) \tag{4.15}$$

ist erhalten, d.h. das Auswertungsfunktional $\partial^\mu j_\mu$ verschwindet identisch auf dem Raum der freien Lösungen $\mathcal{C}(S_0)$. Wir verschmieren $\partial^\mu j_\mu$ mit einer Testfunktion $g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ wobei $g \equiv 1$ in $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ und erhalten

$$A \stackrel{\text{def}}{=} i \int dx\, g(x)\Big(\varphi(x)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)} - \varphi^*(x)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi^*(x)}\Big) \in \mathcal{J}^{S_0} \tag{4.16}$$

sowie

$$\delta_A \stackrel{\mathrm{def}}{=} i \int dx\, g(x) \Big(\varphi(x) \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} - \varphi^*(x) \frac{\delta}{\delta\varphi^*(x)} \Big). \tag{4.17}$$

δ_A ist die infinitesimale Version obiger Symmetrietransformation auf $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$. Die MWI lautet im betrachteten Fall für beliebiges $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$

$$\int dx\, g(x) \partial^\mu R^{\mathrm{cl}}_{S_0}(e^F_\otimes, j_\mu(x)) = -R^{\mathrm{cl}}_{S_0}(e^F_\otimes, \delta_A F) \tag{4.18}$$

und stimmt nach der formalen Ersetzung der klassischen retardierten Produkte durch quantenfeldtheoretische retardierte Produkte mit den bekannten Ward-Identitäten überein (siehe beispielsweise [34]). Betrachten wir eine unter der Symmetrietransformation δ_A invariante Wechselwirkung (beispielsweise $S_{\mathrm{int}} = \int dx\, h(x)(\varphi(x)\varphi^*(x))^2$ mit $h \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$) dann drückt (4.18) für $F = S_{\mathrm{int}}$ gerade die Erhaltung des wechselwirkenden Stroms $R(e^{S_{\mathrm{int}}}_\otimes, j_\mu)$ in dem Gebiet $\mathcal{O}$ aus.

4.2 Anomalien der Master-Ward-Identität in der Quantenfeldtheorie

Die MWI in der Form (4.13) kann für lokale Einträge $A \in \mathcal{J}^{S_0}_{\mathrm{loc}}$, d.h. $Q \in \mathcal{P} \otimes \mathcal{D}(\mathbb{M})$, und $S_{\mathrm{int}} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ formal durch die Ersetzung von R_{cl} durch R in die Quantenfeldtheorie übertragen werden und stellt dort eine zusätzliche Normierungsbedingung für die quantenfeldtheoretischen retardierten Produkte dar. Im allgemeinen garantiert das in Abschnitt 3.2.2 beschriebene induktive Verfahren zur Konstruktion der retardierten Produkte nicht die Gültigkeit der MWI. Wegen der bekannten Anomalien in der Quantenfeldtheorie kann die MWI sicher nicht für alle $A \in \mathcal{J}^{S_0}_{\mathrm{loc}}$ erfüllt werden. Von allgemeinem Interesse ist daher die Frage, für welche $A \in \mathcal{J}^{S_0}_{\mathrm{loc}}$ die Gültigkeit der MWI bei geeigneter Wahl der retardierten Produkte erreicht werden kann.

In diesem Abschnitt wird eine der MWI ähnliche Identität abgeleitet, die für allgemeine retardierte Produkte, welche die in Abschnitt 3.2.1 genannten definierenden Eigenschaften besitzen, stets erfüllt ist, und die Verletzung der MWI in der Quantenfeldtheorie konkret in Form lokaler Anomalie-Terme ausdrückt. Motivation für unsere Suche nach einer solchen Identität war das *Quantenwirkungsprinzip*, das in anderen Renormierungsschemata (z.B. dimensionale Renormierung [35], BPHZ-Verfahren [7, 6]) bewiesen wurde und dazu verwendet werden kann, die Erfüllbarkeit gewisser Ward-Identitäten zu zeigen bzw. auf gewisse kohomologische Probleme zurückzuführen (siehe Anhang B).

Der folgende Satz enthält die Kernaussage dieser Arbeit und bildet den Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung der Frage nach der Erfüllbarkeit der MWI in der Quantenfeldtheorie:

Satz 4.3. *Seien induktiv konstruierte retardierte Produkte*[2] *R mit den Eigenschaften aus Abschnitt (3.2.1) gegeben. Dann existiert eine lineare und lokale Abbildung*

$$\begin{aligned} \Delta : \mathrm{Sym}\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \otimes \mathcal{J}_{\mathrm{loc}}^{S_0} &\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \\ F^{\otimes n} \otimes A &\longmapsto \Delta_A(F^{\otimes n}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

mit $\Delta_A(\mathbb{1}) = 0$ für alle $A \in \mathcal{J}_{\mathrm{loc}}^{S_0}$, so dass mit der Notation[3] *$A = \int dy\, g(y) Q(y) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}$ gilt*

$$R\big(e_\otimes^S, A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S)\big) = \int dy\, g(y) R(e_\otimes^S, Q(y)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \in \mathcal{J}^{S_0}. \tag{4.20}$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes erfolgt induktiv und beruht wesentlich auf der GLZ-Relation und der Trägereigenschaft der retardierten Produkte. Zu nullter Ordnung in S ist (4.20) wegen $R(\mathbb{1}, A) = A$ offensichtlich erfüllt. Wir nehmen jetzt an, dass (4.20) für eine trunkierte Abbildung $\Delta = \Delta^{n-1}$, $n > 0$, mit $\Delta^{n-1}\big|_{\mathrm{Sym}^k \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \otimes \mathcal{J}_{\mathrm{loc}}^{S_0}} = 0$ für $k \geq n$ bis zu $(n-1)$-ter Ordnung in S erfüllt ist und zeigen, dass (4.20) dann zu n-ter Ordnung in S nur lokal verletzt wird.

Die dem linken Ausdruck in (4.20) (mit $\Delta = \Delta^{n-1}$) zugrunde liegende $\mathcal{F}$-wertige Distribution lautet zu n-ter Ordnung in S mit den Bezeichnungen $S = \int dx\, h(x) L(x)$ und $A = \int dx\, g(x) G(x) = \int dx\, g(x) Q(x) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}$ mit $g, h \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, $Q, L \in \mathcal{P}$ und $G = Q \frac{\delta S_0}{\delta\varphi}$

$$\begin{aligned} M_{n,1}(x_1, \dots, x_n, y) \;&\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; R(\otimes_{i \in \underline{n}} L(x_i), G(y)) + \sum_{k=1}^{n} R\left(\otimes_{i \in \underline{n} \setminus \{k\}} L(x_i), \delta_{G(y)} L(x_k)\right) \\ &\quad + \sum_{I \sqcup J = \underline{n}} R\big(\otimes_{i \in I} L(x_i), \Delta_{G(y)}^{n-1}(\otimes_{j \in J} L(x_j))\big) \end{aligned}$$

wobei $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$, $\delta_{G(y)} = Q(y) \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}$ und $I \sqcup J$ für die disjunkte Vereinigung von I und J. Die Distribution $M_{n,1}$ hat retardierten Träger

$$\mathrm{supp} M_{n,1} \subset \{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{M}^{n+1}; x_1, \dots, x_n \in y + \overline{V}_-\} \tag{4.21}$$

und ist symmetrisch in den ersten n Variablen. Betrachten wir $M_{n,1}(x_1, \dots, x_n, y)$ außerhalb der totalen Diagonalen $\mathbb{D}_{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{M}^{n+1}, x_1 = \dots = x_{n+1}\}$, dann genügt es also den Fall $x_n \in y + \overline{V}_- \setminus \{y\}$ zu diskutieren. In diesem Fall gilt nach der Lokalität von Δ^{n-1}, d.h. $\mathrm{supp}\Big(\Delta_{G(y)}^{n-1}(\otimes_{j \in J} L(x_j))\Big) \subset \mathbb{D}_{|J|+1}$,

$$\begin{aligned} M_{n,1}(x_1, \dots, x_n, y) \;&=\; R(\otimes_{i \in \underline{n-1}} L(x_i) \otimes L(x_n), G(y)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} R\left(\otimes_{i \in \underline{n} \setminus \{k\}} L(x_i) \otimes L(x_n), \delta_{G(y)} L(x_k)\right) \\ &\quad + \sum_{I \sqcup J = \underline{n-1}} R\big(\otimes_{i \in I} L(x_i) \otimes L(x_n), \Delta_{G(y)}^{n-1}(\otimes_{j \in J} L(x_j))\big) \end{aligned}$$

[2] Alle retardierten Produkte beziehen sich im folgenden auf die freie Wirkung S_0.

[3] Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf solche $A \in \mathcal{J}_{\mathrm{loc}}^{S_0}$, für die die Zuordnung $A \longrightarrow \delta_A$ eindeutig ist (siehe dazu die Diskussion in [21]).

und wir erhalten nach Anwendung der GLZ-Relation und Berücksichtigung der Trägereigenschaft der retardierten Produkte

$$\begin{aligned} M_{n,1}(x_1,\ldots,x_n,y) &= \sum_{I\sqcup J=\underline{n-1}} \Big\{R(\otimes_{i\in I}L(x_i),L(x_n)),R(\otimes_{j\in J}L(x_j),G(y))\Big\} \\ &+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{I\sqcup J\sqcup\{k\}=\underline{n-1}} \Big\{R(\otimes_{i\in I}L(x_i),L(x_n)),R(\otimes_{j\in J}L(x_j),\delta_{G(y)}L(x_k))\Big\} \\ &+\sum_{I\sqcup J=\underline{n-1}}\sum_{K\sqcup L=I} \Big\{R\left(\otimes_{i\in K}L(x_i),L(x_n)\right),R\big(\otimes_{l\in L}L(x_l),\Delta^{n-1}_{G(y)}(\otimes_{j\in J}L(x_j))\big)\Big\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Wir verwenden die Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \sum_{L\sqcup J=H} R(\otimes_{l\in L}L(x_l),\Delta^{n-1}_{G(y)}(\otimes_{j\in J}L(x_j))) &= R(\otimes_{i\in H}L(x_i),Q(y))\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \\ &-R(\otimes_{i\in H}L(x_i),G(y))-\sum_{j\in H}R(\otimes_{i\in H\setminus\{j\}}L(x_i),\delta_{G(y)}L(x_j))) \end{aligned}$$

für $H\subset\underline{n-1}$, und erhalten für den dritten Term in (4.22) nach Umordnung der Summen

$$\begin{aligned} \sum_{K\sqcup H=\underline{n-1}} \Big\{R\left(\otimes_{i\in K}L(x_i),L(x_n)\right), -R(\otimes_{i\in H}L(x_i),G(y))+R(\otimes_{i\in H}L(x_i),Q(y))\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \\ -\sum_{j\in H}R(\otimes_{i\in H\setminus\{j\}}L(x_i),\delta_{G(y)}L(x_j))\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =& -\sum_{I\sqcup J=\underline{n-1}} \Big\{R(\otimes_{i\in I}L(x_i),L(x_n)),R(\otimes_{j\in J}L(x_j),G(y))\Big\} \\ &-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{I\sqcup J\sqcup\{k\}=\underline{n-1}} \Big\{R(\otimes_{i\in I}L(x_i),L(x_n)),R(\otimes_{j\in J}L(x_j),\delta_{G(y)}L(x_k))\Big\} \\ &+\sum_{I\sqcup J=\underline{n-1}} \Big\{R(\otimes_{i\in I}L(x_i),L(x_n)),R(\otimes_{j\in J}L(x_j),Q(y))\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Der letzte Term in diesem Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Identität

$$\{F,P(x)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}\}=\{F,P(x)\}\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}\,, \tag{4.24}$$

gültig für alle $F, P \in \mathcal{F}$, und der GLZ-Relation vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\sum_{I \sqcup J = \underline{n-1}} &\Big\{R(\otimes_{i\in I} L(x_i), L(x_n)), R(\otimes_{j\in J} L(x_j), Q(y))\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}\Big\} \\ &= \sum_{I \sqcup J = \underline{n-1}} \big\{R(\otimes_{i\in I} L(x_i), L(x_n)), R(\otimes_{j\in J} L(x_j), Q(y))\big\}\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \\ &= R(L(x_1)\otimes\cdots\otimes L(x_n), Q(y))\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}.\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme in (4.23) entsprechen gerade den ersten beiden Termen in (4.22). Insgesamt ergibt sich damit das gewünschte Resultat

$$M_{n,1}(x_1,\ldots,x_n,y) = R(L(x_1)\otimes\cdots\otimes L(x_n), Q(y))\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \qquad \text{falls}\,(x_1,\ldots,x_n,y)\notin \mathbb{D}_{n+1}. \tag{4.25}$$

Folglich kann die Abbildung Δ^{n-1} derart zu einer Abbildung Δ^n fortgesetzt werden, dass für beliebige $(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{M}^{n+1}$ gilt

$$\begin{aligned}M_{n,1}(x_1,\ldots,x_n,y) &= R(L(x_1)\otimes\cdots\otimes L(x_n), Q(y))\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \\ &\quad -\Delta^n_{G(y)}(L(x_1)\otimes\cdots\otimes L(x_n))\end{aligned} \tag{4.26}$$

mit $\mathrm{supp}\Delta^n_{G(y)}(L(x_1)\otimes\cdots\otimes L(x_n))\subset\mathbb{D}_{n+1}$. Nach Anwendung von (4.26) auf die Testfunktion $h(x_1)\cdots h(x_n)g(y)$ erhalten wir schließlich die Behauptung (4.20) mit $\Delta=\Delta^n$ zu n-ter Ordnung in S. Damit ist die Existenz der Abbildung Δ und die Gültigkeit von (4.20) gezeigt. □

Bemerkung 4.4. Da die MWI zu unterster Ordnung in $\hbar$ stets erfüllt ist (klassische MWI), gilt wegen $\lim_{\hbar\to 0} R = R_{\mathrm{cl}}$ für alle $A\in\mathcal{J}^{S_0}_{\mathrm{loc}}$ und $S\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$

$$\Delta_A(e_\otimes^S) = \mathcal{O}(\hbar). \tag{4.27}$$

Die MWI zu $A\in\mathcal{J}^{S_0}_{\mathrm{loc}}$ ist in der Quantenfeldtheorie offensichtlich dann erfüllt, wenn die retardierten Produkte derart normiert werden, dass die Abbildung $\Delta_A : \mathrm{Sym}\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}\to\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ identisch verschwindet:

$$\Delta_A\equiv 0 \quad\Rightarrow\quad R(e_\otimes^S, A+\delta_A S)\in\mathcal{J}^{S_0}. \tag{4.28}$$

Für den einfachsten Fall $A=\int dx\,g(x)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}$ zu beliebigem $g\in\mathcal{D}(\mathbb{M})$ erhalten wir aus der MWI die Feldgleichung der wechselwirkenden Theorie in der off-shell-Form (3.22). Da diese stets erfüllt werden kann (siehe Abschnitt 3.2.2) erhalten wir

$$\Delta_A\equiv 0 \qquad \forall\, A=\int dx\,g(x)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)},\quad g\in\mathcal{D}(\mathbb{M}). \tag{4.29}$$

4.3 Effektive Feldtheorie

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Beschreibung einer perturbativen Quantenfeldtheorie, wie sie in Kapitel 3 betrachtet wurde, mit Hilfe einer klassischen perturbativen Feldtheorie (effektive Feldtheorie) zu einer effektiven nichtlokalen Wechselwirkung, die als formale Potenzreihe in $\hbar$ angesehen wird und zu unterster Ordnung mit der ursprünglichen lokalen Wechselwirkung übereinstimmt. Diesem Vorgehen liegt die Zerlegung von zusammenhängenden Graphen in 1-Teilchen-irreduzible (1PI) Subgraphen zugrunde. Ein Graph heißt dabei 1PI, falls er nach Weglassen einer beliebigen Linie, die zwei Vertizes verbindet, immer noch zusammenhängend ist. Retardierte Produkte lassen sich durch zusammenhängende Graphen beschreiben, wobei der klassische Anteil gerade allen Baumgraphen entspricht. Zieht man nun in dem, einem beliebigen retardierten Produkt entsprechenden, Graphen alle 1PI-Subgraphen zu neuen Vertizes zusammen, so ergibt sich ein Baumgraph, der sich als klassisches retardiertes Produkt gewisser effektiver Feldfunktionale, die den neuen Vertizes entsprechen, beschreiben lässt.

Die Entwicklung dieses *effektiven Feldformalismus* erlaubt es, mit Hilfe der klassischen MWI eine *effektive Version der MWI* zu formulieren, die gewisse Ähnlichkeiten mit den Ward-Identitäten, wie sie im funktionalen Zugang zur Quantenfeldtheorie auftreten (siehe beispielsweise [8]), aufweist. In gleicher Weise steht die effektive Version von Satz 4.3 in formaler Analogie mit dem *Quantenwirkungsprinzip*, das eine entscheidende Rolle bei der Frage der Erfüllbarkeit gewisser Ward-Identitäten und der Charakterisierung eventueller Anomalien spielt.

Wir wählen im folgenden als Ausgangspunkt eine störungstheoretische Formulierung einer Quantenfeldtheorie mit Hilfe retardierter Produkte zur freien Wirkung S_0. Wie oben erwähnt, besteht die Idee des effektiven Feldformalismus darin, quantenfeldtheoretische wechselwirkende Felder als klassische wechselwirkende Felder aufzufassen, wobei an die Stelle der Wechselwirkung und der zugrundeliegenden Feldfunktionale eine effektive Wechselwirkung und effektive Feldfunktionale treten. Dazu definieren wir die beiden linearen Abbildungen

$$\Gamma \; : \; \mathrm{Sym}\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \longrightarrow \mathcal{F} \tag{4.30}$$

$$\Gamma_{\mathrm{ret}} \; : \; \mathrm{Sym}\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \longrightarrow \mathcal{F} \tag{4.31}$$

implizit durch die Bedingung[4]

$$R(e_\otimes^S, F) = R_{\mathrm{cl}}\Big(e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^S)}, \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, F)\Big). \tag{4.32}$$

Wir fordern für Γ und Γ_{ret} die Anfangsbedingungen $\Gamma(\mathbb{1}) = 0$ und $\Gamma_{\mathrm{ret}}(\mathbb{1}, F) = \Gamma_{\mathrm{ret}}(F)$ für $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$, sowie

$$\Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, \varphi(h)) = \varphi(h) \tag{4.33}$$

[4]Wir setzen die klassischen retardierten Produkte, ursprünglich definiert auf $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, linear auf ganz $\mathcal{F}$ fort.

für $h \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$, d.h. die lineare Abbildung $\Gamma_{\text{ret}}(e_\otimes^S, \cdot) : \mathcal{F}_{\text{loc}} \longrightarrow \mathcal{F}$ wirkt auf den Feldfunktionalen, die φ oder partielle Ableitungen von φ nur linear enthalten, wie die Identität.

Man beachte, dass die für eine Quantenfeldtheorie typischen nichtlokalen Effekte es erfordern, auch nichtlokale Funktionale als Bilder unter Γ und Γ_{ret} zuzulassen. Wir bezeichnen im folgenden $\Gamma(e_\otimes^S)$ als die *effektive Wechselwirkung* und $\Gamma_{\text{ret}}(e_\otimes^S, F)$ als das dem Feldfunktional $F \in \mathcal{F}_{\text{loc}}$ entsprechende *effektive retardierte Feldfunktional.*

Die Abbildungen Γ und Γ_{ret} sind nicht unabhängig voneinander. Aus der Feldgleichung der wechselwirkenden Theorie (4.11) bzw. (3.22)

$$R_{(\text{cl})}\left(e_\otimes^S, \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}\right) = \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)} - R_{(\text{cl})}\left(e_\otimes^S, \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\right), \tag{4.34}$$

und der Forderung (4.33) erhält man mit der Definition (4.32) folgenden Zusammenhang zwischen Γ und Γ_{ret}:

$$\frac{\delta\Gamma(e_\otimes^S)}{\delta\varphi(x)} = \Gamma_{\text{ret}}\left(e_\otimes^S, \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\right) \tag{4.35}$$

Dadurch ist die effektive Wechselwirkung $\Gamma(e_\otimes^S)$ bis auf einen physikalisch unwesentlichen, von den Feldern unabhängigen additiven Term durch das effektive Feld zu $\frac{\delta S}{\delta\varphi}$ festgelegt. Bei der Ableitung von (4.35) wurde folgende Schlussweise verwendet:

Lemma 4.5. *Sei $A \in \mathcal{F}$ mit*

$$R_{\text{cl}}(e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^S)}, A) = 0. \tag{4.36}$$

Dann gilt $A \equiv 0$.

Beweis. Wegen $R_{\text{cl}}(e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^S)}, A) \equiv A \circ r^{S_0+\Gamma(e_\otimes^S), S_0} = 0$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der Invertierbarkeit der retardierten Wellenoperatoren. □

Die explizite Bestimmung von Γ und Γ_{ret} in Abhängigkeit der retardierten Produkte (d.h. die Inversion von (4.32) im Sinne formaler Potenzreihen), erfolgt rekursiv durch Entwicklung von (4.32) nach Potenzen der Wechselwirkung S. Zu niedrigen Ordnungen erhalten wir:

$$\Gamma_{\text{ret}}(F) = R(F) \equiv F \tag{4.37a}$$

$$\Gamma_{\text{ret}}(S, F) = R(S, F) - R_{\text{cl}}(S, F) \tag{4.37b}$$

$$\Gamma_{\text{ret}}(S^{\otimes 2}, F) = R(S^{\otimes 2}, F) - R_{\text{cl}}(S^{\otimes 2}, F) - R_{\text{cl}}(\Gamma(S^{\otimes 2}), F) - 2R_{\text{cl}}(S, \Gamma_{\text{ret}}(S, F)) \tag{4.37c}$$

Aus der Entwicklung zu erster Ordnung in S erkennt man, dass $\Gamma_{\text{ret}}(\cdot,\cdot)$ nicht symmetrisch ist unter Vertauschung der Einträge, sondern sich vielmehr retardiert bzgl. des letzten Eintrages verhält. Bei der Entwicklung (4.37) wurde der Zusammenhang (4.35) zu niedrigster Ordnung ausgenutzt und $\Gamma(S) = S$ festgesetzt. Analog ergibt sich aus der Entwicklung von (4.35) zu zweiter Ordnung in S und (4.37b) der Term $\Gamma(S^{\otimes 2})$ in (4.37c) bis auf feldunabhängige Terme zu

$$\frac{\delta\Gamma(S^{\otimes 2})}{\delta\varphi(x)} = 2\Gamma_{\text{ret}}\left(S, \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\right) = 2R\left(S, \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\right) - 2R_{\text{cl}}\left(S, \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\right). \tag{4.38}$$

Seien nun $\Gamma(e_\otimes^S)$ und $\Gamma_{\rm ret}(e_\otimes^S, F)$ bis zu n-ter bzw. $(n-1)$-ter Ordnung in S bestimmt. Die Entwicklung von (4.32) in n-ter Ordnung Störungstheorie lautet

$$\Gamma_{\rm ret}(S^{\otimes n}, F) = R(S^{\otimes n}, F) - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} R_{\rm cl}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}\Big|_{\lambda=0} e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^{\lambda S})}, \Gamma_{\rm ret}(S^{\otimes n-k}, F)\right) =$$

$$= R(S^{\otimes n}, F) - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{l_1,\dots,l_j=1 \\ l_1+\dots+l_j=k}}^{k} \frac{1}{j! l_1! \cdots l_j!} R_{\rm cl}\left(\bigotimes_{i=1}^{j} \Gamma(S^{\otimes l_i}), \Gamma_{\rm ret}(S^{\otimes n-k}, F)\right). \quad (4.39)$$

Damit wird $\Gamma_{\rm ret}(S^{\otimes n}, F)$ durch die schon bestimmten Größen $\Gamma(S^{\otimes l})$ und $\Gamma_{\rm ret}(S^{\otimes l-1}, F)$ für $l \leq n$ festgelegt. Mit Hilfe (4.35) erhält man daraus wieder $\Gamma(S^{\otimes n+1})$ bis auf feldunabhängige Terme. Damit ist die Existenz von Γ und $\Gamma_{\rm ret}$ gezeigt.

Folgende Abhängigkeit von $\hbar$, die unmittelbar aus den Entwicklungen (4.39) und (4.37) folgt, wird im folgenden von Bedeutung sein:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{\rm ret}(e_\otimes^S, F) &= F + \mathcal{O}(\hbar) \\ \Gamma(e_\otimes^S) &= S + \mathcal{O}(\hbar) \end{aligned}\right\} \quad \text{falls} \quad F, S \sim \hbar^0. \quad (4.40)$$

Die Normierungsfreiheit der retardierten Produkte (siehe Abschnitt 3.2.3) spiegelt sich im effektiven Formalismus unmittelbar in einer Normierungsfreiheit von Γ und $\Gamma_{\rm ret}$ wider. Aus der Renormierungsvorschrift (Theorem 3.2)

$$\hat{R}(e_\otimes^S, F) = R(e_\otimes^{D(e_\otimes^S)}, D(e_\otimes^S \otimes F)) \quad (4.41)$$

und der definierenden Gleichung (4.32) ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\hat{\Gamma}(e_\otimes^S) = \Gamma(e_\otimes^{D(e_\otimes^S)}) \quad (4.42)$$

$$\hat{\Gamma}_{\rm ret}(e_\otimes^S, F) = \Gamma_{\rm ret}(e_\otimes^{D(e_\otimes^S)}, D(e_\otimes^S \otimes F)) \quad (4.43)$$

Wir formulieren jetzt Satz 4.3 im effektiven Feldformalismus:

Satz 4.6. *Gegeben eine effektive Formulierung einer perturbativen Quantenfeldtheorie mittels Abbildungen Γ (4.30) und $\Gamma_{\rm ret}$ (4.31) und dem Zusammenhang (4.32), dann existiert eine lineare und lokale Abbildung Δ (4.19), so dass gilt:*

$$\delta_{I_A(e_\otimes^S)}(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S)) = \Gamma_{\rm ret}\big(e_\otimes^S, A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S)\big) \quad (4.44)$$

mit der linearen Abbildung

$$I : \mathrm{Sym}\mathcal{F}_{\rm loc} \otimes \mathcal{J}_{\rm loc}^{S_0} \longrightarrow \mathcal{J}^{S_0} \quad (4.45)$$

gegeben durch

$$I_A(e_\otimes^S) \equiv I(e_\otimes^S \otimes A) = \int dy\, g(y) \Gamma_{\rm ret}(e_\otimes^S, Q(y)) \frac{\delta S_0}{\delta \varphi(y)}, \quad (4.46)$$

d.h.

$$\delta_{I_A(e_\otimes^S)} = \int dy\, g(y)\Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, Q(y))\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \tag{4.47}$$

für $A = \int dy\, g(y)Q(y)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \in \mathcal{J}_{\mathrm{loc}}^{S_0}$*,* $Q \in \mathcal{P}$ *und* $g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$*.*

Beweis. Wir gehen aus von Satz 4.3 und erhalten unter Verwendung von (4.32) die Beziehung

$$R_{\mathrm{cl}}\big(e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^S)}, \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S))\big) = \int dy\, g(y) R_{\mathrm{cl}}\big(e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^S)}, \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, Q(y))\big)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}.$$

Wir formen die rechte Seite mit Hilfe der klassischen MWI in der Form (4.13) um zu

$$\begin{aligned}\int dy\, g(y) R_{\mathrm{cl}}\big(e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^S)}, \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, Q(y))\big)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}& \\ = R_{\mathrm{cl}}\Big(e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^S)}, \int dy\, g(y)\Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, Q(y))\frac{\delta(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S))}{\delta\varphi(y)}\Big)&\end{aligned}$$

und erhalten mit der Definition (4.47) die Identität

$$R_{\mathrm{cl}}\Big(e_\otimes^{\Gamma(e_\otimes^S)}, \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S)) - \delta_{I_A(e_\otimes^S)}(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S))\Big) = 0$$

Mit Lemma 4.5 erhalten wir daraus die Behauptung. □

Aus Satz 4.6 und (4.28) erhalten wir unmittelbar folgende hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der MWI:

Satz 4.7 (effektive Form der MWI). *Seien retardierte Produkte R derart normiert, dass*

$$\delta_{I_A(e_\otimes^S)}(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S)) = \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A + \delta_A S) \tag{4.48}$$

mit $A \in \mathcal{J}_{\mathrm{loc}}^{S_0}$ *und der Abbildung* I *aus Satz 4.6, dann gilt auch*

$$R(e_\otimes^S, A + \delta_A S) \in \mathcal{J}^{S_0}. \tag{4.49}$$

Der restliche Teil dieses Abschnittes wird dazu verwendet, Analogien zwischen den gefundenen Aussagen und der Form des Quantenwirkungsprinzips in [8] aufzuzeigen[5].

Dazu übertragen wir zunächst Satz 4.3 in den mit Hilfe von T-Produkten formulierten effektiven Feldformalismus (siehe Anhang A). Mit der Formel von Bogoliubov (A.6) erhalten wir aus (4.20) unter Verwendung von $(F \star G)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi} = F \star (G\frac{\delta S_0}{\delta\varphi})$ die Identität

$$\begin{aligned}\overline{T}(e_\otimes^{-iS/\hbar}) \star T\big(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes (A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S))\big)& \\ = \int dy\, g(y)\Big(\overline{T}(e_\otimes^{-iS/\hbar}) \star T(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes Q(y))\Big)\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}& \\ = \overline{T}(e_\otimes^{-iS/\hbar}) \star \int dy\, g(y) T(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes Q(y))\frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}.&\end{aligned}$$

[5] Die wesentlichen Aussagen aus [8], auf die wir uns im folgenden beziehen, finden sich in Anhang B.

Multiplikation dieser Gleichung bezüglich des Sternproduktes mit $T(e_\otimes^{iS/\hbar})$ von links liefert wegen (A.5) die zu (4.20) analoge Identität

$$T\big(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes (A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S))\big) = \int dy\, g(y) T(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes Q(y)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}. \tag{4.50}$$

Schließlich drücken wir (4.50) im effektiven (zeitgeordneten) Formalismus aus. Anwendung von (A.13) auf beiden Seiten von (4.50) ergibt

$$\begin{aligned} T^c_{\text{tree}}\big(e_\otimes^{i\Gamma_T(e_\otimes^S)/\hbar} \otimes \Gamma_T(e_\otimes^S \otimes (A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S)))\big) \\ = \int dy\, g(y) T^c_{\text{tree}}\big(e_\otimes^{i\Gamma_T(e_\otimes^S)/\hbar} \otimes \Gamma_T(e_\otimes^S \otimes Q(y))\big) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung formen wir unter Verwendung von A.11 um zu

$$\cdots = T^c_{\text{tree}}\Big(e_\otimes^{i\Gamma_T(e_\otimes^S)/\hbar} \otimes \int dy\, g(y) \Gamma_T(e_\otimes^S \otimes Q(y)) \frac{\delta(S_0 + \Gamma_T(e_\otimes^S))}{\delta\varphi(y)}\Big), \tag{4.52}$$

so dass sich ingesamt die zu (4.44) analoge Identität

$$\int dy\, g(y) \Gamma_T(e_\otimes^S \otimes Q(y)) \frac{\delta(S_0 + \Gamma_T(e_\otimes^S))}{\delta\varphi(y)} = \Gamma_T\big(e_\otimes^S \otimes (A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S))\big) \tag{4.53}$$

ergibt.

Wir bezeichnen im folgenden $\Gamma_{\text{eff}}(S_{\text{ges}}) \stackrel{\text{def}}{=} S_0 + \Gamma_T(e_\otimes^S)$ als die effektive Wirkung zur klassischen Wirkung $S_{\text{ges}} \stackrel{\text{def}}{=} S_0 + S$. Γ_{eff} kann interpretiert werden als affine Abbildung zwischen den beiden affinen Räumen $S_0 + \mathcal{F}_{\text{loc}}$ und $S_0 + \mathcal{F}$. Sei $S'_{\text{ges}} \stackrel{\text{def}}{=} S_{\text{ges}} + \int dx \rho(x) Q(x)$ mit $Q \in \mathcal{P}$ und $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ ("äußeres Feld"). Dann gilt in Analogie zu (B.8)

$$\Gamma_T(e_\otimes^S \otimes Q(x)) = \frac{\delta}{\delta\rho(x)}\Big|_{\rho=0} \Gamma_{\text{eff}}(S'_{\text{ges}}) \tag{4.54}$$

und wir schreiben formal $Q(x) \cdot \Gamma_{\text{eff}}(S_{\text{ges}}) \equiv \Gamma_T(e_\otimes^S \otimes Q(x))$.

Aus (4.53) erhalten wird damit

$$\int dx\, g(x) \frac{\delta\Gamma_{\text{eff}}(S'_{\text{ges}})}{\delta\rho(x)}\Big|_{\rho=0} \frac{\delta\Gamma_{\text{eff}}(S_{\text{ges}})}{\delta\varphi(x)} = (A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S)) \cdot \Gamma_{\text{eff}}(S_{\text{ges}}) \tag{4.55}$$

was in enger Beziehung zu dem Quantenwirkungsprinzip in der Form (B.14) steht. Entwickeln wir die rechte Seite von (4.55) zu unterster Ordnung in $\hbar$, so finden wir analog zu (B.15)

$$\big(A + \delta_A S + \Delta_A(e_\otimes^S)\big) \cdot \Gamma_{\text{eff}}(S_{\text{ges}}) = A + \delta_A S + \mathcal{O}(\hbar) = \int dx\, g(x) \frac{\delta S'_{\text{ges}}}{\delta\rho(x)}\Big|_{\rho=0} \frac{\delta S_{\text{ges}}}{\delta\varphi(x)} + \mathcal{O}(\hbar).$$

4.4 Zur Frage der Erfüllbarkeit der Master-Ward-Identität

In diesem Abschnitt wenden wir uns dem Problem der Erfüllbarkeit der MWI in der Quantenfeldtheorie zu. Die Frage lautet also, ob quantenfeldtheoretische retardierte Produkte mit den in Abschnitt 3.2.1 geforderten Eigenschaften derart existieren, dass die MWI zu gegebenem $A \in \mathcal{J}_{\rm loc}^{S_0}$ erfüllt ist. Es ist im Rahmen dieser Arbeit nicht gelungen, eine allgemeine Antwort auf diese Frage zu finden. Jedoch besteht angesichts der gefundenen Identität (Satz 4.3), welche die allgemeine Verletzung der MWI in der Quantenfeldtheorie charakterisiert, und der oben erwähnten Analogien zum Quantenwirkungsprinzip aus [8] die Hoffnung, diese Frage – ähnlich wie in der Methode der algebraischen Renormierung – auf gewisse kohomologische Obstruktionen zurückzuführen. In diesem Sinne versuchen wir im folgenden – zunächst im Rahmen der retardierten Produkte und anschließend im effektiven Formalismus – unter Verwendung von Satz 4.3 konkrete Bedingungen abzuleiten, deren Gültigkeit die Erfüllbarkeit der MWI garantieren.

Aus der klassischen MWI und der Übereinstimmung quantenfeldtheoretischer retardierter Produkte mit den klassischen retardierten Produkten zu unterster Ordnung in $\hbar$ folgt, dass die quantenfeldtheoretische MWI zu nullter Ordnung in $\hbar$ stets erfüllt ist. Wir folgen der Methode der algebraischen Renormierung und versuchen die MWI rekursiv über die Ordnung von $\hbar$ durch jeweils geeignete endliche Renormierungen der retardierten Produkte zu erfüllen. Sei dazu für retardierte Produkte R die MWI zu gegebenem $A = \int dx\, g(x)Q(x) \in \mathcal{J}_{\rm loc}^{S_0}$ bis zur $(k-1)$-ten Ordnung $(k \geq 1)$ in $\hbar$ erfüllt:

$$R(e_\otimes^S, A + \delta_A S) + \mathcal{O}(\hbar^k) = \int dy\, g(y) R(e_\otimes^S, Q(y)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}. \tag{4.56}$$

Nach Satz 4.3 gilt damit für die Abbildung Δ (4.19)

$$\Delta_A(e_\otimes^S) = \Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) \tag{4.57}$$

mit $\Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S) \sim \hbar^k$. Wir suchen nach einer endlichen Renormierung der retardierten Produkte R, so dass die MWI für die neuen retardierten Produkte $\tilde{R}$ auch in k-ter Ordnung von $\hbar$ erfüllt ist. Für die Renormierungsabbildung D aus Theorem 3.2 wählen wir dazu den Ansatz

$$D(e_\otimes^S) = S + D^{(k)}(e_\otimes^S), \tag{4.58}$$

wobei $D^{(k)}(e_\otimes^S) \sim \hbar^k$. Aus der Forderung

$$\tilde{R}(e_\otimes^S, A + \delta_A S) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) = \int dy\, g(y) \tilde{R}(e_\otimes^S, Q(y)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \tag{4.59}$$

erhalten wir zusammen mit der Renormierungsvorschrift (3.29) die Identität

$$\begin{aligned}
&R(e_\otimes^S, A + \delta_A S) + R_{\rm cl}\big(e_\otimes^S, D^{(k)}(e_\otimes^S \otimes A + \delta_A S)\big) + R_{\rm cl}\big(e_\otimes^S \otimes D^{(k)}(e_\otimes^S), A + \delta_A S\big) \\
&= \int dy\, g(y) \bigg(R(e_\otimes^S, Q(y)) + R_{\rm cl}(e_\otimes^S, D^{(k)}(e_\otimes^S \otimes Q(y))) + R_{\rm cl}(e_\otimes^S \otimes D^{(k)}(e_\otimes^S), Q(y)) \bigg) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)}
\end{aligned}$$

bis auf Terme der Ordnung $\hbar^{k+1}$. Mit der Voraussetzung (4.56), der klassischen MWI (4.13) bzw. deren Verallgemeinerung zu

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{cl}}(e_\otimes^S \otimes D^{(k)}(e_\otimes^S), A + \delta_A S) &= -R_{\mathrm{cl}}(e_\otimes^S, \delta_A D^{(k)}(e_\otimes^S)) \\ &\quad + \int dy\, g(y) R_{\mathrm{cl}}(e_\otimes^S \otimes D^{(k)}(e_\otimes^S), Q(y)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(y)} \end{aligned}$$

finden wir schließlich folgende Forderung an die Renormierungsabbildung $D^{(k)}$

$$D^{(k)}(e_\otimes^S \otimes (A + \delta_A S)) - \int dyg(y)\, D^{(k)}(e_\otimes^S \otimes Q(y)) \frac{\delta(S_0 + S)}{\delta\varphi(y)} = \Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S) + \delta_A D^{(k)}(e_\otimes^S),$$

die sich unter Verwendung von (3.28,(v)) auch schreiben lässt als

$$\begin{aligned} \int dy\, g(y) \Big(D^{(k)}\big(e_\otimes^S \otimes Q(y) \tfrac{\delta(S_0+S)}{\delta\varphi(y)}\big) - Q(y) D^{(k)}\big(e_\otimes^S \otimes \tfrac{\delta(S_0+S)}{\delta\varphi(y)}\big) - D^{(k)}\big(e_\otimes^S \otimes Q(y)\big) \tfrac{\delta(S_0+S)}{\delta\varphi(y)} \Big) \\ = \Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S) \qquad (4.60) \end{aligned}$$

Die Frage der Erfüllbarkeit der MWI in k-ter Ordnung von $\hbar$ reduziert sich damit auf die Frage der Existenz einer Abbildung $D^{(k)} : \mathrm{Sym}\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ mit den Eigenschaften aus Theorem 3.2. Eine allgemeine Anwort auf diese Frage konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht gefunden werden. Die wesentliche Schwierigkeit scheint darin zu bestehen, zu erkennen, wie die unterschiedlichen auftretenden $D^{(k)}$-Terme miteinander zusammenhängen und welche konkrete Struktur die Anomalie-Terme $\Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S)$ besitzen.

Um einen direkteren Vergleich mit der in [8] beschriebenen Methode der algebraischen Renormierung zu ermöglichen, übertragen wir obiges Vorgehen in den effektiven Feldformalismus. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf das konkrete Beispiel 4.2 (siehe auch [8], p.27). Wegen (4.33) erhalten wir in diesem Fall folgende effektive Version der MWI

$$\delta_A(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S)) = \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A) \qquad (4.61)$$

zur invarianten Wechselwirkung $S = \int dx\, h(x)(\varphi(x)\varphi^*(x))^2$, d.h. $\delta_A S = 0$. Im formalen Limes $g \to 1$ lautet diese Gleichung wegen $A = \int dx\, g(x)\partial_\mu j^\mu(x) = -\int dx\, \partial_\mu g(x) j^\mu(x)$

$$\delta(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S)) = 0 \qquad (4.62)$$

mit der Bezeichnung

$$\delta = i \int dx\, \Big(\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} - \varphi^*(x)\frac{\delta}{\delta\varphi^*(x)}\Big). \qquad (4.63)$$

(4.62) stimmt formal mit der in [8] geforderten Ward-Identität überein (siehe Anhang B).

Wir gehen nun wieder aus von der Gültigkeit der MWI in der Form (4.61) bis auf Terme der Ordnung $\hbar^k$ für $k > 0$, d.h. es gelte

$$\delta_A(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S)) = \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A) + \mathcal{O}(\hbar^k). \qquad (4.64)$$

Nach Satz 4.6 gilt damit für $\Delta_A(e_\otimes^S)$

$$\Delta_A(e_\otimes^S) = \underbrace{\Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S)}_{\sim\hbar^k} + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) \tag{4.65}$$

und damit wegen $\Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, F) = F + \mathcal{O}(\hbar)$

$$\delta_A(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S)) = \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A) + \Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}). \tag{4.66}$$

Unter der Annahme, dass sich $\Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S)$ schreiben lässt als $\delta_A\hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S)$ mit $\hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S) \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ (vgl. [8]) erhalten wir nach Umnormierung von $\Gamma(e_\otimes^S)$ durch $D(e_\otimes^S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} S - \hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S)$

$$\begin{aligned}\delta_A(S_0 + \tilde{\Gamma}(e_\otimes^S)) &\equiv \delta_A(S_0 + \Gamma(e_\otimes^{D(e_\otimes^S)})) \\ &= \delta_A\big(S_0 + \Gamma(e_\otimes^S) - \hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S)\big) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) \\ &= \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}).\end{aligned} \tag{4.67}$$

Um die Gültigkeit der MWI zur nächst höheren Ordung in $\hbar$ zu erhalten, müssen wir diese Umnormierung auch für Γ_{ret} vornehmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A) &\equiv \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^{D(e_\otimes^S)}, D(e_\otimes^S \otimes A)) && (4.68)\\ &= \Gamma_{\mathrm{ret}}\big(e_\otimes^{S-\hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S)}, A - \hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S \otimes A)\big) = \\ &= \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A) - \Gamma_{\mathrm{ret}}\big(e_\otimes^S, \hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S \otimes A)\big) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) \\ &= \Gamma_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A) - \hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S \otimes A) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) && (4.69)\end{aligned}$$

und wir erhalten damit

$$\delta_A(S_0 + \tilde{\Gamma}(e_\otimes^S)) = \tilde{\Gamma}_{\mathrm{ret}}(e_\otimes^S, A) + \hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S \otimes A) + \mathcal{O}(\hbar^{k+1}) \tag{4.70}$$

was nur dann die Gültigkeit der MWI zur Ordnung $\hbar^k$ garantiert, falls der Term $\hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S \otimes A)$ verschwindet. Anhand dieser Ansätze wird deutlich, dass ein tieferer Einblick in die Struktur der Anomalie-Terme $\Delta_A(e_\otimes^S)$ vonnöten ist, um einerseits eine Antwort auf die Zulässigkeit obiger Annahme $\Delta_A^{(k)}(e_\otimes^S) = \delta_A\hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^S)$ zu finden und andererseits das eventuelle Verschwinden von $\hat{\Delta}^{(k)}(e_\otimes^F)$ entscheiden zu können.

Kapitel 5

Eichtheorien und BRST-Symmetrie

In diesem Kapitel wird die Methode der algebraischen Formulierung einer perturbativen Quantenfeldtheorie, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt wurde, auf Eichtheorien angewendet. Zunächst werden klassische freie Yang-Mills-Theorien vorgestellt und das Verfahren der Eichfixierung beschrieben, welches es ermöglicht, den kanonischen Formalismus aus Kapitel 2 anzuwenden. Durch die Einführung von Geistfeldern kann die ursprüngliche – durch die Eichfixierung gebrochene – lokale Eichsymmetrie in Form einer globalen Symmetrie – der BRST-Symmetrie – ausgedrückt werden. Die BRST-Symmetrie spielt bei der Konstruktion der Observablenalgebra – d.h. insbesondere der Eliminierung der unphysikalischen Felder – einer Eichtheorie und der Suche nach einer physikalischen Hilbert-Raum-Darstellung eine entscheidende Rolle. Anschließend betrachten wir die perturbative Beschreibung wechselwirkender Yang-Mills-Theorien. Ausgehend von der Forderung, dass die wechselwirkende Theorie invariant ist unter einer deformierten BRST-Symmetrie, wurden in [21] mit Hilfe der klassischen MWI Bedingungen an konsistente Wechselwirkungen abgeleitet. Mit Hilfe kohomologischer Methoden wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf der Grundlage von [36] eine wichtige Klasse von Lösungen dieser Bedingungen bestimmt und ihre Übereinstimmung mit den bekannten Wechselwirkungstermen der nichtabelschen Yang-Mills-Theorien gezeigt.

5.1 Freie Eichtheorien und BRST-Symmetrie

Wir beschränken uns im folgenden auf Yang-Mills-Theorien ohne fermionische Materiefelder (reine Yang-Mills-Theorien). Nichtabelsche Yang-Mills-Theorien zeigen stets eine Selbstwechselwirkung und können demnach nicht als Kandidaten für eine freie Eichtheorie dienen. Wie aus der Elektrodynamik bekannt ist, verschwindet die Selbstwechselwirkung jedoch für (abelsche) $U(1)$-Eichfelder. Demnach beschreiben wir allgemeine freie Yang-Mills-Theorien durch N untereinander nicht wechselwirkende $U(1)$-Eichfelder A^a, $a \in \underline{N}$. Sei $\mathcal{C}_A \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^1(\mathbb{M}, \mathbb{R}^N)$ der Raum der glatten 1-Formen auf $\mathbb{M}$ mit Werten in $\mathbb{R}^N$. Wir fassen die Felder $A^a(x) \equiv A^a_\mu(x)dx^\mu$ als Auswertungsfunktionale auf $\mathcal{C}_A$ bezüglich der a-ten Komponente von $\omega \in \mathcal{C}_A$ an der Stelle $x \in \mathbb{M}$ auf:

$$\begin{aligned} A^a(x) : \mathcal{C}_A &\longrightarrow T^*_x\mathbb{M} \\ \omega &\longmapsto A^a(x)(\omega) \overset{\text{def}}{=} \omega^a(x) = \omega^a_\mu(x)dx^\mu \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit der Notation $\mathcal{C}_A \ni \omega = (\omega^a)_{a\in\underline{N}} = (\omega^a_\mu)_{a\in\underline{N}}dx^\mu$ und dem Kotangentialraum $T^*_x\mathbb{M}$ von $\mathbb{M}$ an der Stelle x.

Äußere Ableitungen von $A^a(x)$ lassen sich über die Auswertung auf $\mathcal{C}_A$ definieren:

$$\begin{aligned} dA^a(x) : \mathcal{C}_A &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^2 T^*_x\mathbb{M} \\ \omega &\longmapsto dA^a(x)(\omega) \overset{\text{def}}{=} d\omega^a(x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Formal gilt $dA^a = \frac{1}{2}(\partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu)dx^\nu \wedge dx^\mu$. Analog lassen sich (punktweise) äußere Produkte von Auswertungsfunktionalen auf $\mathcal{C}_A$ über das äußere Produkt auf $\bigwedge T^*_x\mathbb{M}$ erklären.

Die freie Yang-Mills-Wirkung lautet $S_{\text{inv}} = \int dx\, \mathcal{L}_{\text{inv}}$ mit der freien Lagrange-Dichte[1]

$$\mathcal{L}_{\text{inv}} = -\frac{1}{4}F^{a,\mu\nu}F^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial^\mu A^{a,\nu}(\partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu) \tag{5.3}$$

mit den Feldstärken $F^a \overset{\text{def}}{=} dA^a$ bzw. $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu$.

Lokale Eichtransformationen auf $\mathcal{C}_A$ zu $\alpha \in \mathcal{G} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R}^N)$ sind definiert durch

$$\omega \longrightarrow \omega_{(\alpha)} \overset{\text{def}}{=} \omega + d\alpha \tag{5.4}$$

für alle $\omega \in \mathcal{C}_A$. Diese induzieren Eichtransformationen auf den Eichfeldern

$$A^a(x) \longrightarrow A^a_{(\alpha)}(x) \tag{5.5}$$

gegeben durch

$$A^a_{(\alpha)}(x)(\omega) \overset{\text{def}}{=} A^a(x)(\omega_{(\alpha)}) \quad , \quad \forall \omega \in \mathcal{C}_A. \tag{5.6}$$

Die freie Wirkung S_{inv}, interpretiert als Funktional auf $\mathcal{C}_A$, ist invariant unter Eichtransformationen, d.h. $(S_{\text{inv}})_{(\alpha)} = S_{\text{inv}}$ für alle $\alpha \in \mathcal{G}$.

Die freien Feldgleichungen ergeben sich durch Variation von S_{inv} zu

$$\frac{\delta S_{\text{inv}}}{\delta A^{a,\mu}} = \Box A^a_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^a_\nu = 0. \tag{5.7}$$

Ist $\omega \in \mathcal{C}_A$ eine Lösung der Feldgleichungen (5.7) zu vorgegebenen Cauchy-Daten bezüglich einer beliebigen Cauchy-Fläche Σ, so erhält man zu jedem $\alpha \in \mathcal{G}$ mit $\text{supp}(d\alpha) \cap \Sigma = \varnothing$ nach der Eichinvarianz der freien Wirkung eine weitere Lösung $\omega_{(\alpha)}$ zu den gleichen Cauchy-Daten. Dies zeigt unmittelbar, dass das Cauchy-Problem zu den Feldgleichungen (5.7) nicht eindeutig ist. Dies ist auch erkennbar an der Gestalt der zweifachen Funktionalableitung

[1] Im folgenden wird über doppelt auftretende Indizes $a \in \underline{N}$ summiert.

der freien Wirkung[2] $\frac{\delta S_{\text{inv}}}{\delta A^{a,\mu}(x)\delta A^{a,\nu}(y)} = (g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\delta(x-y)$. In der Impulsdarstellung lautet der entsprechende Ausdruck $M_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu$. Wegen $M_{\mu\nu}k^\mu = 0$ besitzt $M_{\mu\nu}$ einen Eigenwert Null und kann deshalb nicht invertiert werden. Es existiert demnach keine eindeutige retardierte Greens-Funktion zur Wirkung S_{inv}.

Um dennoch den in Kapitel 2 vorgestellten Formalismus anwenden zu können, wählt man folgenden Ausweg. Man addiert zur freien Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{inv}}$ einen eichfixierenden Term, derart dass die zugehörigen (eichfixierten) Feldgleichungen ein eindeutiges Cauchy-Problem besitzen. Wir verwenden dazu zusätzliche reellwertige Hilfsfelder $B^a(x)$ mit $a \in \underline{N}$ (*Lautrup-Nakanishi-Felder*) die als Lagrange-Multiplikatoren der geforderten Eichbedingung angesehen werden können, und als Auswertungsfunktionale auf $\mathcal{C}_B \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M}, \mathbb{R}^N)$ interpretiert werden.

$$\begin{aligned} B^a(x) : \mathcal{C}_B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \equiv (f^a)_{a\in\underline{N}} &\longmapsto B^a(x)(f) \stackrel{\text{def}}{=} f^a(x) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Wir addieren zu $\mathcal{L}_{\text{inv}}$ den eichfixierenden Term $\mathcal{L}_{\text{gf}} = B^a\big(\frac{1}{2}B^a - \partial^\mu A^a_\mu\big)$ und erhalten aus der neuen Wirkung $S_{\text{gf}} \stackrel{\text{def}}{=} \int dx\,(\mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{\text{gf}})$ die eichfixierten Feldgleichungen in der *Feynman-Eichung*

$$\frac{\delta S_{\text{gf}}}{\delta A^{a,\mu}} = \Box A^a_\mu - \partial_\mu\partial^\nu A^a_\nu + \partial_\mu B^a = 0 \tag{5.9}$$

$$\frac{\delta S_{\text{gf}}}{\delta B^a} = B^a - \partial^\mu A^a_\mu = 0. \tag{5.10}$$

In der gewählten Eichung gelten für die Eichfelder A^a also bei Gültigkeit der Feldgleichungen der Felder B^a jeweils die Feldgleichung des masselosen Skalarfeldes, für die das Cauchy-Problem bekanntlich eindeutig ist.

Der Preis, den man für die Eindeutigkeit des Cauchy-Problems der Feldgleichungen für A^a zahlt, ist die Eichinvarianz der ursprünglichen Wirkung S_{inv}: die eichfixierte Wirkung S_{gf} ist nicht mehr invariant unter Eichtransformationen der Form (5.5). Durch die Einführung sogenannter *Geistfelder* kann jedoch die Invarianz der gesamten Wirkung unter einer neuen globalen Symmetrie erreicht werden. Diese nach ihren Begründern Becchi, Rouet und Stora [3, 4] sowie Tyutin [5] benannte *BRST-Symmetrie* wirkt auf den Eichfeldern wie die Eichsymmetrie mit den Geistfeldern in der Rolle der beliebigen Funktionen $\alpha \in \mathcal{G}$. Insofern kann die BRST-Invarianz als Pendant der ursprünglichen Eichsymmetrie der Wirkung S_{inv} verstanden werden.

Sei dazu $\mathcal{C}_G$ die Menge der glatten Grassmann-wertigen Funktionen auf $\mathbb{M}$ und $\mathcal{C}_u \equiv \mathcal{C}_{\tilde{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \{c = (c^a)_{a\in\underline{N}}, c^a \in \mathcal{C}_G\}$. Wir führen Geistfelder $u^a(x)$ und Antigeistfelder $\tilde{u}^a(x)$ als Auswertungsfunktionale bezüglich der a-ten Komponente an der Stelle $x \in \mathbb{M}$ auf $\mathcal{C}_u$ bzw.

[2] Diese ist diagonal bezüglich der Indizes a, so dass wir uns auf ein spezielles Diagonalelement beschränken können.

$\mathcal{C}_{\tilde{u}}$ ein. Es gelten damit folgende Anti-Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} u^a(x)u^b(y) &= -u^b(y)u^a(x) \\ \tilde{u}^a(x)\tilde{u}^b(y) &= -\tilde{u}^b(y)\tilde{u}^a(x) \\ u^a(x)\tilde{u}^b(y) &= -\tilde{u}^b(y)u^a(x) \end{aligned} \tag{5.11}$$

mit dem Produkt $(u^a(x)u^b(y))(c) = c^a(x)c^b(y)$ usw. für alle $c \in \mathcal{C}_{u,\tilde{u}}$. Partielle Ableitungen der Geist- und Antigeistfelder werden wie oben über die Auswertung auf $\mathcal{C}_{u,\tilde{u}}$ definiert.

Durch Hinzufügen des Terms $\mathcal{L}_{\text{gh}} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \tilde{u}^a \partial^\mu u^a$ zur Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{\text{gf}}$ erhalten wir die gesamte freie Wirkung

$$\begin{aligned} S_0 &\stackrel{\text{def}}{=} S_{\text{inv}} + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} \\ &= \int dx \left(\tfrac{1}{2}\partial^\mu A^{a,\nu}(\partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu) + B^a\big(\tfrac{1}{2}B^a - \partial^\mu A^a_\mu\big) + \partial_\mu \tilde{u}^a \partial^\mu u^a \right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Die zugehörigen Feldgleichungen[3] lauten

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_0}{\delta A^{a,\mu}} &= \Box A^a_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^a_\nu + \partial_\mu B^a = 0 & \frac{\delta S_0}{\delta u^a} &= \Box \tilde{u}^a = 0 \\ \frac{\delta S_0}{\delta B^a} &= B^a - \partial^\mu A^a_\mu = 0 & \frac{\delta S_0}{\delta \tilde{u}^a} &= -\Box u^a = 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Die Feldalgebra $\mathcal{P}$ der durch die Wirkung S_0 beschriebenen Theorie wird erzeugt von den Feldern A^a_μ, B^a, u^a und $\tilde{u}^a$ sowie partiellen Ableitungen dieser Felder unter Berücksichtigung der Antivertauschungsrelationen (5.11) der Geist- und Antigeistfelder.

$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}(\mathcal{C}_A \times \mathcal{C}_B \times \mathcal{C}_u \times \mathcal{C}_{\tilde{u}})$ bezeichne die Algebra der Funktionale

$$\begin{aligned} F(A,B,u,\tilde{u}) : \mathcal{C}_A \times \mathcal{C}_B \times \mathcal{C}_u \times \mathcal{C}_{\tilde{u}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, f, c, \tilde{c}) &\longmapsto F(A,B,u,\tilde{u})(\omega,f,c,\tilde{c}) \stackrel{\text{def}}{=} F(\omega,f,c,\tilde{c}) \end{aligned} \tag{5.14}$$

von der Form

$$\begin{aligned} F(A,B,u,\tilde{u}) = \sum_{n_A,n_B,n_u,n_{\tilde{u}}} \int d(x,y,z,\tilde{z}) A^{a_1}_{\mu_1}(x_1)\cdots A^{a_{n_A}}_{\mu_{n_A}}(x_{n_A}) B^{b_1}(y_1)\cdots B^{b_{n_B}}(y_{n_B}) \\ u^{c_1}(z_1)\cdots u^{c_{n_u}}(z_{n_u}) \tilde{u}^{\tilde{c}_1}(\tilde{z}_1)\cdots \tilde{u}^{\tilde{c}_{n_{\tilde{u}}}}(\tilde{z}_{n_{\tilde{u}}}) t^{(\mu_1\dots\mu_{n_A})}_{(a_1\dots a_{n_A} b_1\dots b_{n_B} c_1\dots c_{n_u} \tilde{c}_1\dots\tilde{c}_{n_{\tilde{u}}})}(x,y,z,\tilde{z}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

mit den gleichen Einschränkungen an die Distributionen t wie in (2.9). Die Algebra der in $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ lokalisierten Funktionale bezeichnen wir wieder mit $\mathcal{F}(\mathcal{O})$.

$\mathcal{P}$ und $\mathcal{F}$ besitzen eine natürliche Graduierung gegeben durch die *Geistzahl* g. Die Geistzahl der Basisfelder in $\mathcal{P}$ ist definiert zu

$$g(u^a) = 1\ ,\ g(\tilde{u}^a) = -1\ ,\ g(A^a_\mu) = 0 = g(B^a) \tag{5.16}$$

[3]Zur Definition von Funktionalableitungen bezüglich antikommutierender Variablen siehe unten.

und wird gemäß $g(PQ) = g(P) + g(Q)$ auf alle Monome $P, Q \in \mathcal{P}$ fortgesetzt. Für beliebige Monome $P, Q \in \mathcal{P}$ gilt nach den Antivertauschungsrelationen der Geistfelder die Relation

$$PQ = (-1)^{g(P)g(Q)} QP. \tag{5.17}$$

$\mathcal{P}$ ist damit eine bezüglich der Geistzahl graduiert symmetrische Algebra.

In gleicher Weise wird die Geistzahl auf Funktionalen in $\mathcal{F}$ mit festen Werten von n_u und $n_{\tilde{u}}$ in (5.15) definiert, und es gilt ebenso

$$FG = (-1)^{g(F)g(G)} GF. \tag{5.18}$$

Ableitungen in $\mathcal{P}$ bezüglich der Basisfelder bzw. partiellen Ableitungen der Basisfelder werden als graduierte (Links-) Derivationen definiert:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(PQ) = \frac{\partial P}{\partial \varphi} Q + (-1)^{g(P)g(\varphi)} P \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \tag{5.19}$$

für $\varphi \in \{A^a_\mu, B^a, u^a, \tilde{u}^a, \partial_\nu A^a_\mu, \ldots\}$ und alle $P, Q \in \mathcal{P}$. Analog werden Funktionalableitungen $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}$ auf $\mathcal{F}$ definiert.

Die *BRST-Symmetrie* der Wirkung S_0 spiegelt sich in der Erhaltung des freien *BRST-Stroms*

$$j_0^\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} B^a(x)\partial^\mu u^a(x) - u^a(x)\partial^\mu B^a(x) \tag{5.20}$$

wider, d.h.

$$\partial_\mu j_0^\mu(x) = B^a(x)\Box u^a(x) - u^a(x)\Box B^a(x) = -B^a(x)\frac{\delta S_0}{\delta \tilde{u}^a(x)} - u^a(x)\partial_\mu \frac{\delta S_0}{\delta A^a_\mu(x)} \tag{5.21}$$

verschwindet auf dem Raum der Lösungen der Feldgleichungen (5.13). Die zugehörige Derivation gemäß (4.5) ist die *freie BRST-Transformation* $s_0 : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O})$ gegeben durch

$$s_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int dx\, h(x)\tilde{s}_0(x) \tag{5.22}$$

mit

$$\tilde{s}_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\partial j_0(x)} = -B^a(x)\frac{\delta}{\delta \tilde{u}^a(x)} - u^a(x)\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)} \tag{5.23}$$

wobei $h \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ und $h \equiv 1$ in $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$.

s_0 ist eine nilpotente graduierte Derivation, welche die Geistzahl um eins erhöht. Genauer gilt unter Beachtung der Antivertauschungsrelationen der Geistfelder ${s_0}^2 F = 0$ und $s_0(FG) = s_0(F)G + (-1)^{g(F)} F s_0(G)$, sowie $g(s_0 F) = g(F) + 1$ für alle $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$.

s_0 induziert auf $\mathcal{P}$ eine graduierte Derivation, die wir ebenfalls mit s_0 bezeichnen. Durch den formalen Grenzübergang $h \to 1$ in der Definition von s_0 erhalten wir folgende Wirkung auf den Basisfeldern:

$$s_0(A^a_\mu) = \partial_\mu u^a \ , \ s_0(B^a) = 0 \ , \ s_0(u^a) = 0 \ , \ s_0(\tilde{u}^a) = -B^a \tag{5.24}$$

für alle $a \in \underline{N}$. Wir setzen diese Transformation zu einer graduierten Derivation auf ganz $\mathcal{P}$ fort gemäß $s_0(PQ) \stackrel{\text{def}}{=} s_0(P)Q + (-1)^{g(P)}Ps_0(Q)$ und $s_0(\partial^\mu P) \stackrel{\text{def}}{=} \partial^\mu s_0(P)$ für alle $P, Q \in \mathcal{P}$. Die so definierte Derivation ist wieder nilpotent und erhöht die Geistzahl um eins.

Man beachte, dass sich die Ausdrücke $\tilde{s}_0(x) \int dy\, L(y)$ und $(s_0 L)(x)$ (für $L \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \otimes \mathcal{P}$ und der natürlichen Fortsetzung von s_0 nach $\mathcal{D}(\mathbb{M}) \otimes \mathcal{P}$ gemäß $s_0(g \otimes A) \stackrel{\text{def}}{=} g \otimes s_0 A)$ im allgemeinen um eine Summe totaler Divergenzen unterscheiden.

Die Tatsache, dass das Cauchy-Problem bezüglich der Wirkung S_0 wohldefiniert ist, spiegelt sich in der Invertierbarkeit von $\left(\frac{\delta^2 S_0}{\delta\varphi_i(x)\delta\varphi_j(y)}\right)_{i,j\in\{A_\mu^a, B^a, u^a, \tilde{u}^a\}}$ (mit der Bezeichnung $\varphi_{A_\mu^a} \stackrel{\text{def}}{=} A_\mu^a$ usw.) wider. Die gesamte retardierte Greensfunktion der freien Feldgleichungen lässt sich schreiben als eine Matrix $(\Delta_{ij}^{\text{ret}})_{i,j\in\{A_\mu^a, B^a, u^a, \tilde{u}^a\}}$, für die gilt

$$\int dy \sum_j \frac{\delta^2 S_0}{\delta\varphi_i(x)\delta\varphi_j(y)} \Delta_{jk}^{\text{ret}}(y-z) = \delta_{ik}\delta(x-z) = \int dy \sum_j \Delta_{ij}^{\text{ret}}(x-y) \frac{\delta^2 S_0}{\delta\varphi_j(y)\delta\varphi_k(z)}. \tag{5.25}$$

Wie aus der Struktur der freien Feldgleichungen (5.13) ersichtlich wird, sind $\Delta_{A_\mu^a A_\nu^a}^{\text{ret}}$, $\Delta_{A_\mu^a B^a}^{\text{ret}}$, $\Delta_{B^a B^a}^{\text{ret}}$ und $\Delta_{u^a \tilde{u}^a}^{\text{ret}}$ für alle $a \in \underline{N}$ die einzigen nichtverschwindenden Einträge in $(\Delta_{ij}^{\text{ret}})$.

Nun lassen sich klassische retardierte Produkte bezüglich der Wirkung S_0 in gleicher Weise wie in Kapitel 2 mit Hilfe der retardierten Wellenoperatoren definieren. Insbesondere erhalten wir analog zu Satz 2.1 für beliebige Funktionale $F, G \in \mathcal{F}$ die Formel

$$R(F,G) = -\int dxdy \sum_{a\in\underline{N}} \sum_{\substack{i,j\,\in\,\{A_\mu^a,\,B^a\} \\ i,j\,\in\,\{u^a,\,\tilde{u}^a\}}} \frac{\delta F}{\delta\varphi_i(x)} \Delta_{ij}^{\text{ret}}(y-x) \frac{\delta G}{\delta\varphi_j(y)}.$$

In der Definition der Peierls-Klammer berücksichtigen wir die Graduierung von $\mathcal{F}$ und setzen

$$\{F,G\} \stackrel{\text{def}}{=} R(F,G) - (-1)^{g(G)g(F)} R(G,F), \tag{5.26}$$

so dass gilt

$$\{F,G\} = (-1)^{g(F)g(G)}\{G,F\}. \tag{5.27}$$

Aus dem erhaltenen freien BRST-Strom j_0^μ bestimmt sich durch formale Integration die freie *BRST-Ladung* Q_0 gemäß

$$Q_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x^0=\text{const}} d^3x j^0(x). \tag{5.28}$$

Q_0 ist nilpotent, d.h. es gilt $Q_0^2 = 0$.

Die freie BRST-Ladung Q_0 induziert die freie BRST-Transformation $s_0 = \int dx\, h(x)\tilde{s}_0(x)$ auf den in einem Doppelkegel $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ lokalisierten Funktionalen (wobei $h|_{\mathcal{O}} \equiv 1$), d.h. es gilt

$$\{Q_0, F\}_{S_0} = (s_0 F)_{S_0}. \tag{5.29}$$

Zum Beweis wählen wir eine kausale Zerlegung von $\partial_\mu h$ derart dass $\partial_\mu h = b_\mu - a_\mu$ mit $\operatorname{supp} b_\mu \cap (\mathcal{O} + \overline{V}_+) = \varnothing$ und $\operatorname{supp} a_\mu \cap (\mathcal{O} + \overline{V}_-) = \varnothing$. Wir betrachten zu $F \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ den

Ausdruck $\{\langle j_0^\mu, b_\mu\rangle, F\}_{S_0}$ mit der Notation $\langle j_0^\mu, b_\mu\rangle \equiv \int dx\, j_0^\mu(x) b_\mu(x)$. Wegen der Kausalität der Peierls-Klammer trägt der Teil von b_μ im raumartigen Komplement von $\mathcal{O}$ nicht zu diesem Ausdruck bei. Wir wählen folgende explizite Form

$$b_\mu(x) = \partial_\mu h(x)\Big(1 - \int_{-\infty}^{e\cdot x} \theta(t)dt\Big) \tag{5.30}$$

mit einem geeigneten zeitartigen Einheitsvektor e und einer Testfunktion $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit genügend kleinem Träger und $\int dt\theta(t) = 1$, so dass die obigen Forderungen an b_μ erfüllt sind. Es gilt nach partieller Integration und der Stromerhaltung

$$\langle j_0^\mu, b_\mu\rangle_{S_0} = \int dx\, e_\mu j_{S_0}^\mu(x) h(x)\theta(e\cdot x) = \int dt\, \theta(t) \int_{e\cdot x = t} h(x) j_{S_0}^\mu(x) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\nu dx^\rho dx^\sigma. \tag{5.31}$$

In dem zu $\{\langle j_0^\mu, b_\mu\rangle, F\}_{S_0} \equiv \{\langle j_0^\mu, b_\mu\rangle_{S_0}, F_{S_0}\}_{S_0}$ beitragenden Anteil dieses Ausdrucks ist h gleich eins, d.h. $\{\int_{e\cdot x=t} h(x) j_{S_0}^\mu(x)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\nu dx^\rho dx^\sigma, F_{S_0}\}_{S_0}$ ist konstant in t. Zusammen mit $\int dt\theta(t) = 1$ finden wir damit

$$\{\langle j_0^\mu, b_\mu\rangle, F\}_{S_0} = \{Q_0, F\}_{S_0}. \tag{5.32}$$

Unter Verwendung von (5.26) und Beachtung der Trägereigenschaft der retardierten Produkte ergibt sich andererseits

$$\{\langle j_0^\mu, b_\mu\rangle, F\}_{S_0} = R_{S_0}(\langle j_0^\mu, b_\mu\rangle, F) = -R_{S_0}(\langle \partial_\mu j_0^\mu, h\rangle, F) \tag{5.33}$$

was unter Verwendung der MWI in der Form (4.8) auf das gewünschte Resultat (5.29) führt.

5.2 Konstruktion der lokalen Observablenalgebren einer Eichtheorie

Ein wesentliches Merkmal von quantisierten Eichtheorien ist das Auftreten von unphysikalischen Feldern in Form von Vektorpotentialen, Hilfsfeldern oder Geistfeldern. Die lokalen Observablenalgebren sollten jedoch nur physikalisch messbare Größen enthalten, insbesondere eichinvariante Ausdrücke in den Feldern. Damit stellt sich die Frage, wie aus den Algebren der in $\mathcal{O}$ lokalisierten (freien bzw. wechselwirkenden) Feldfunktionale die entsprechenden lokalen Observablenalgebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ gewonnen werden können. Eine Lösung dieses Problems liefert der von Kugo und Ojima [15] sowie Dütsch und Fredenhagen [23] entwickelte BRST-Operator-Formalismus. Im folgenden werden die wesentlichen Merkmale dieses Verfahrens skizziert.

Wir betrachten zunächst den Fall einer freien Eichtheorie und gehen aus von dem zugehörigen Netz der Algebren $\mathcal{O} \longmapsto \mathcal{F}(\mathcal{O})$ mit dem freien BRST-Differential $s_0 : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ und der freien erhaltenen BRST-Ladung Q_0 (siehe vorhergehender Abschnitt). Die BRST-Symmetrie drückt die ursprüngliche Eichsymmetrie im eichfixierten Formalismus aus. Deshalb fordern wir von physikalischen Observablen $F \in \mathcal{F}$ die Invarianz unter s_0 und identifizieren Funktionale, die sich nur um ein Element der Form $s_0 G$ mit $G \in \mathcal{F}$ unterscheiden.

Sei $\mathfrak{A}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Kern}(s_0) \subset \mathcal{F}$ der Kern und $\mathfrak{A}_{00} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Bild}(s_0) \subset \mathcal{F}$ das Bild von s_0. Wegen $s_0^2 = 0$ ist $\mathfrak{A}_{00}$ eine zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{A}_0$. Die Observablenalgebra der freien Eichtheorie wird jetzt definiert als die *Kohomologie* von s_0 in $\mathcal{F}$, d.h.

$$\mathfrak{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{A}_0}{\mathfrak{A}_{00}}. \tag{5.34}$$

Das Netz der lokalen Observablenalgebren ist gegeben durch

$$\mathcal{O} \longmapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{A}_0 \cap \mathcal{F}(\mathcal{O})}{\mathfrak{A}_{00} \cap \mathcal{F}(\mathcal{O})}. \tag{5.35}$$

Zentrale Schwierigkeit bei der Hilbert-Raum-Beschreibung von Eichtheorien ist die Tatsache, dass keine nichttriviale Darstellung der Feldalgebra $\mathcal{F}$ in einem Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ (mit positiv-definitem Skalarprodukt) zusammen mit einer nichttrivialen unitären Darstellung der Poincaré-Gruppe auf $\mathfrak{H}$ existiert. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Observablenalgebra $\mathfrak{A} \equiv \bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ unter gewissen Bedingungen eine nichttriviale Hilbert-Raum-Darstellung besitzt. Diese Darstellung kann, ausgehend von einer Darstellung von $\mathcal{F}$ auf einem linearen Raum $\mathfrak{K}$ mit indefinitem inneren Produkt $< \cdot, \cdot >$ und einer Implementierung von s_0 in $\mathfrak{H}$ mittels eines symmetrischen und nilpotenten Operators Q_0 gemäß $s_0(F) = Q_0 F - (-1)^{g(F)} F Q_0$ ähnlich wie die Observablenalgebra $\mathfrak{A}$ konstruiert werden. Sei dazu $\mathfrak{K}_0$ der Kern und $\mathfrak{K}_{00}$ das Bild das Operators Q_0. Wegen $Q_0^2 = 0$ gilt $\mathfrak{K}_{00} \subset \mathfrak{K}_0$. Der physikalische Prä-Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$ wird nun definiert als die Kohomologie von Q_0 in $\mathfrak{K}$, d.h.

$$\mathfrak{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathfrak{K}_0}{\mathfrak{K}_{00}}. \tag{5.36}$$

Unter den beiden Annahmen (*Positivität*)

$$\begin{array}{lll} (i) & < \phi, \phi > \geq 0 & \forall \phi \in \mathfrak{K}_0 \\ (ii) & \big(\phi \in \mathfrak{K}_0 \quad \wedge \quad < \phi, \phi >= 0\big) & \Rightarrow \quad \phi \in \mathfrak{K}_{00} \end{array} \tag{5.37}$$

besitzt $\mathfrak{H}$ dann ein wohldefiniertes positiv definites Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ gegeben durch

$$([\phi_1], [\phi_2]) \stackrel{\text{def}}{=} < \psi_1, \psi_2 > \quad \text{mit} \quad \psi_i \in [\phi_i] \equiv \phi_i + \mathfrak{K}_{00}. \tag{5.38}$$

Schließlich lässt sich durch

$$\pi([A])[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} [A\phi] \tag{5.39}$$

mit $A \in \mathfrak{A}_0$, $\phi \in \mathfrak{K}_0$ und $[A] \stackrel{\text{def}}{=} A + \mathfrak{A}_{00}$ eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{H}$ definieren [20]. Damit ist eine Hilbert-Raum-Darstellung der betrachteten freien Eichtheorie gefunden. Die Gültigkeit der Positivität (5.37), die der Konstruktion des physikalischen Hilbert-Raums wesentlich zugrundeliegt, muss in den betrachteten Modellen jeweils überprüft werden (siehe dazu [37]).

Wie in [16] gezeigt wurde, ist die oben beschriebene Konstruktion stabil unter Deformationen, wie sie beispielsweise durch das Einschalten einer Wechselwirkung auftreten. Die zu $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ entsprechenden wechselwirkenden Felder $\tilde{F}$ sind dann formale Potenzreihen in einer Kopplungskonstanten λ, d.h. $\tilde{F} = \sum_{n\geq 0} \lambda^n F_n$ mit $F_0 = F$ und $F_n \in \mathcal{F}$. Es existiere auf der Algebra der wechselwirkenden Felder $\tilde{\mathcal{F}}$ eine nilpotente wechselwirkende BRST-Transformation $\hat{s} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 0} \lambda^n \hat{s}_n : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ mit der freien BRST-Transformation $\hat{s}_0 \equiv s_0$ und graduierten Derivationen $\hat{s}_n$ auf $\tilde{\mathcal{F}}$. $\hat{s}$ induziert wie oben einen symmetrischen nilpotenten Operator $Q = \sum_{n\geq 0} \lambda^n Q_n$ in dem linearen Raum $\tilde{\mathfrak{K}}$ der formalen Potenzreihen in λ mit Koeffizienten in $\mathfrak{K}$. Der Raum $\tilde{\mathfrak{K}}$ erbt von $\mathfrak{K}$ ein indefinites Skalarprodukt mit Werten in dem Raum $\mathbb{C}[[\lambda]]$ der formalen Potenzreihen in λ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$. Die Observablenalgebra wird wieder definiert zu

$$\tilde{\mathfrak{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Kern}(\hat{s})}{\mathrm{Bild}(\hat{s})} \tag{5.40}$$

und das Netz der lokalen Observablenalgebren entsprechend als

$$\mathcal{O} \longmapsto \tilde{\mathfrak{A}}(\mathcal{O}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{Kern}(\hat{s}) \cap \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{O})}{\mathrm{Bild}(\hat{s}) \cap \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{O})}. \tag{5.41}$$

Seien $\tilde{\mathfrak{K}}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Kern}(Q)$ und $\tilde{\mathfrak{K}}_{00} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Bild}(Q)$. Der physikalische Hilbertraum $\tilde{\mathfrak{H}}$ wird wie oben definiert zu

$$\tilde{\mathfrak{H}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\mathfrak{K}}_0}{\tilde{\mathfrak{K}}_{00}} \tag{5.42}$$

und wir erhalten wieder analog zu (5.39) eine natürliche Darstellung von $\tilde{\mathfrak{A}}$ auf $\tilde{\mathfrak{H}}$. Dütsch und Fredenhagen bewiesen nun in [16], dass zusammen mit einer geeigneten Definition der Positivität in $\mathbb{C}[[\lambda]]$ unter Voraussetzung der Positivität (5.37) für den nichtdeformierten Fall bereits auf die entsprechenden Positivitätseigenschaften im deformierten Fall geschlossen werden kann. Damit besitzt $\tilde{\mathfrak{H}}$ unter Voraussetzung von (5.37) ein positiv definites Skalarprodukt und die Konstruktion erweist sich als stabil unter Deformationen.

5.3 Wechselwirkende Eichtheorien

Bei dem Versuch, wechselwirkende Eichtheorien, ausgehend von einer in Abschnitt 5.1 beschriebenen freien Yang-Mills-Theorie, im Rahmen der kausalen Störungstheorie zu beschreiben, stößt man zunächst auf das Problem, dass durch das Einschalten einer Wechselwirkung auch die Form der ursprünglichen freien Eichsymmetrie verändert wird. Dies wird unmittelbar ersichtlich, wenn man die bekannte Form der Eichtransformation einer nichtabelschen Yang-Mills-Theorie mit der Form der zugehörigen freien Theorie vergleicht. Auf der Ebene der eichfixierten Theorie spiegelt sich das in grundsätzlich verschiedenen Formen der BRST-Symmetrie wider. Wie aus Abschnitt 5.2 hervorgeht, benötigt man für die Konstruktion der lokalen Observablenalgebren einer wechselwirkenden Eichtheorie einen erhaltenen wechselwirkenden BRST-Strom, aus dem sich die wechselwirkende BRST-Transformation $\hat{s}$ ableitet. Im Rahmen der kausalen Störungstheorie wird der wechselwirkende BRST-Strom selbst durch eine formale Potenzreihe in der Kopplungskonstanten der

Wechselwirkung beschrieben und hängt damit von der gewählten Normierung der retardierten Produkten ab. Es stellt sich deshalb die Frage, welche Normierungsbedingungen an die retardierten Produkte gestellt werden sollen, so dass die Erhaltung des wechselwirkenden BRST-Stroms garantiert ist.

Eine mögliche Lösung dieses Problems wurde in [21] diskutiert. Ausgehend von einem allgemeinen Ansatz für die Wechselwirkung und der Forderung der Existenz eines deformierten BRST-Stroms, werden aus der Forderung der Stromerhaltung unter Verwendung der MWI gewisse Bedingungen an die Wechselwirkung abgeleitet, deren Lösungen dann unter Gültigkeit der verwendeten Versionen der MWI zu konsistenten wechselwirkenden Eichtheorien führen.

Wir skizzieren im folgenden Abschnitt anhand [21] die Ableitung der Bedingungen an konsistente Wechselwirkungen. Anschließend übersetzen wir diese in kohomologische Bedingungen im Raum der lokalen Differentialformen und finden mit Hilfe des Verfahrens der Absteigegleichungen als eine Klasse von Lösungen die bekannten Wechselwirkungsterme der nichtabelschen Yang-Mills-Theorien.

5.3.1 Konsistente Wechselwirkungen

Wir gehen aus von einer freien Yang-Mills-Theorie zur eichfixierten Wirkung S_0 (5.12) zusammen mit der Invarianz von S_0 unter der freien BRST-Transformation s_0 und dem zugehörigen erhaltenen freien BRST-Strom j_0^μ. Um eine wechselwirkende Theorie mit deformierter BRST-Symmetrie zu erhalten, betrachten Dütsch und Fredenhagen in [21] den Ansatz

$$S_{\text{int}} = \sum_{n\geq 1} S_n \lambda^n \tag{5.43}$$

wobei $S_n = \int dx\, g(x)\mathcal{L}_n(x),\ \mathcal{L}_n \in \mathcal{P},\ g \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$ und $g \equiv 1$ auf einem offenen und kausal abgeschlossenen Raumzeitgebiet $\mathcal{O}_1$. λ wird dabei aufgefasst als ein Deformationsparameter. Es existiere eine erhaltener BRST-Strom

$$j^\mu = \sum_{n\geq 0} j_n^\mu \lambda^n \tag{5.44}$$

im Sinne einer Deformation des freien BRST-Stroms j_0^μ. Es ist für die Konstruktion lokaler Observablen ausreichend, lediglich innerhalb des Gebietes $\mathcal{O}_1$ Erhaltung des zu j^μ gehörigen wechselwirkenden Stroms zu fordern:

$$R(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, \langle \partial_\mu j^\mu, h\rangle) \in \mathcal{J}^{S_0} \tag{5.45}$$

wobei $h \in \mathcal{D}(\mathcal{O}_1)$ und $h \equiv 1$ auf einem offenen kausal abgeschlossenen Gebiet $\mathcal{O}$ mit $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_1$. Bezeichne b_μ wieder wie in Abschnitt 5.1 den rückwärtigen Anteil in der kausalen Zerlegung von $\partial_\mu h$. Die wechselwirkende BRST-Ladung wird definiert gemäß

$$Q \overset{\text{def}}{=} \langle j^\mu, b_\mu\rangle_S \equiv R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, \langle j^\mu, b_\mu\rangle) \tag{5.46}$$

(vgl. (5.32)) mit der vollen Wirkung $S = S_0 + S_{\text{int}}$. Auf wechselwirkenden Feldern F_S mit $F \in \mathcal{F}_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ lässt sich damit eine wechselwirkende BRST-Transformation $\hat{s}$ definieren durch

$$\hat{s}(F_S) \stackrel{\text{def}}{=} \{Q, F_S\}_{S_0}. \tag{5.47}$$

$\hat{s}$ induziert eine BRST-Transformation s auf $\mathcal{F}_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ bzw. $\mathcal{P}$ gemäß der impliziten Definition

$$(s(F))_S = \hat{s}(F_S). \tag{5.48}$$

Unter Verwendung der GLZ-Relation und Beachtung der Trägereigenschaft von b_μ ergibt sich daraus

$$R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}} \otimes \langle j^\mu, b_\mu\rangle, F) = R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, s(F)) \tag{5.49}$$

Wir fordern, dass s eine Deformation der freien BRST-Transformation s_0 ist und schreiben

$$s = \sum_{n\geq 0} \int dx\, h(x)\tilde{s}_n(x)\lambda^n \tag{5.50}$$

mit graduierten Derivationen $\tilde{s}_n(x)$. $\hat{s}$ sei außerdem nilpotent, d.h. $\hat{s}^2(F_S) = 0$, was gleichbedeutend ist mit $(s^2(F))_S = 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{\text{loc}}(\mathcal{O})$.

Aus der Forderung (5.45) lassen sich jetzt unter Anwendung der MWI einschränkende Bedingungen an die Komponenten S_n der Wechselwirkung ableiten. Dazu werten wir (5.45) für die einzelnen Ordnungen in λ aus. Zu nullter Ordnung finden wir die vorausgesetzte Erhaltung des freien BRST-Stroms auf dem Raum der freien Lösungen wieder

$$G_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \partial_\mu j_0^\mu, h\rangle \in \mathcal{J}^{S_0}. \tag{5.51}$$

Anwendung der MWI für die Derivation $\delta_{G_0} \equiv \langle \tilde{s}_0, h\rangle \equiv s_0$ in (5.45) liefert

$$R\big(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, s_0 S_{\text{int}} - \sum_{n\geq 1} \langle \partial_\mu j_n^\mu, h\rangle\lambda^n\big) \in \mathcal{J}^{S_0} \tag{5.52}$$

woraus sich zu erster Ordnung in λ die Bedingung

$$-G_1 \stackrel{\text{def}}{=} s_0 S_1 - \langle \partial_\mu j_1^\mu, h\rangle \in \mathcal{J}^{S_0} \tag{5.53}$$

ergibt. Erneute Anwendung der MWI für die Derivation $s_1 \equiv \langle \tilde{s}_1, h\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{G_1}$ in (5.52) ergibt

$$R\big(e_\otimes^{S_{\text{int}}}, \lambda s_1 S_{\text{int}} + s_0 \sum_{n\geq 2} S_n\lambda^n - \sum_{n\geq 2} \langle \partial_\mu j_n^\mu, h\rangle\lambda^n\big) \in \mathcal{J}^{S_0} \tag{5.54}$$

woraus zu zweiter Ordnung in λ die nächste Bedingung

$$-G_2 \stackrel{\text{def}}{=} s_1 S_1 + s_0 S_2 - \langle \partial_\mu j_2^\mu, h\rangle \in \mathcal{J}^{S_0} \tag{5.55}$$

folgt. Dieses Verfahren kann iterativ fortgesetzt werden und es ergibt sich schließlich eine Klasse von Bedingungen an die Wechselwirkung S_{int} von der Form

$$-G_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} s_k S_{n-k} - \langle \partial_\mu j_n^\mu, h\rangle \in \mathcal{J}^{S_0}\,, \quad n \geq 1. \tag{5.56}$$

Zu einer konkreten Lösung $S_{\rm int}$ erhält man damit rekursiv den zugehörigen erhaltenen BRST-Strom j^μ (5.44) und die BRST-Transformation s (5.50) mit $s_n \equiv \langle \tilde{s}_n, h\rangle \stackrel{\rm def}{=} \delta_{G_n}$. Die Gültigkeit der Bedingungen (5.56) garantiert schließlich die Invarianz der gesamten Wirkung $S = S_0 + S_{\rm int}$ unter der so definierten BRST-Transformation s auf dem Raum der freien Lösungen:

$$\begin{aligned}
(sS)_S &\equiv R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}}, sS) \\
&= R_{S_0}\big(e_\otimes^{S_{\rm int}}, \sum_{n\geq 0} \lambda^n \sum_{k=0}^{n} s_k S_{n-k}\big) \\
&= R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}}, \langle \partial_\mu j^\mu, h\rangle) = 0
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Wir überprüfen die Gültigkeit der Beziehung (5.48) anhand der äquivalenten Identität (5.49). Zunächst gilt nach der Trägereigenschaft der retardierten Produkte

$$R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}} \otimes \langle j^\mu, b_\mu\rangle, F) = -R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}} \otimes \langle \partial_\mu j^\mu, h\rangle, F) \tag{5.58}$$

für alle $F \in \mathcal{F}_{\rm loc}(\mathcal{O})$. Sukzessive Anwendung der MWI in der Form (4.8) für die Derivationen δ_{G_n} liefert dann unter Verwendung der Bedingungen (5.56) die rechte Seite von (5.49):

$$\begin{aligned}
-R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}} \otimes \langle \partial_\mu j^\mu, h\rangle, F) &= R_{S_0}\big(e_\otimes^{S_{\rm int}}, s_0 S_{\rm int} - \sum_{n\geq 1} \langle \partial_\mu j_n^\mu, h\rangle, F\big) + R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}}, s_0 F) \\
&= R_{S_0}\big(e_\otimes^{S_{\rm int}}, -\lambda G_1 + s_0 \sum_{n\geq 2} S_n \lambda^n - \sum_{n\geq 2} \langle \partial_\mu j_n^\mu, h\rangle, F\big) \\
&\qquad + R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}}, s_0 F) \\
&= R_{S_0}\big(e_\otimes^{S_{\rm int}}, \lambda s_1 S_{\rm int} + s_0 \sum_{n\geq 2} S_n \lambda^n - \sum_{n\geq 2} \langle \partial_\mu j_n^\mu, h\rangle, F\big) \\
&\qquad + R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}}, (s_0 + \lambda s_1) F) \\
&\;\;\vdots \\
&= R_{S_0}(e_\otimes^{S_{\rm int}}, sF)
\end{aligned}$$

Zur Überprüfung der Nilpotenz von $\hat{s}$ verweisen wir auf Abschnitt 5.3. in [21].

5.3.2 Lokale Differentialformen

Unser Ziel ist es, explizite Lösungen für konsistente Wechselwirkungen anhand der oben abgeleiteten Bedingungen (5.56) zu finden. Dazu formulieren wir in diesem Abschnitt zunächst äquivalente Bedingungen im Raum der lokalen Differentialformen und reduzieren das Problem dadurch auf die Lösung eines gewissen kohomologischen Problems. Unter Verwendung bestimmter Techniken aus der Kohomologietheorie, erhalten wir dann in Abschnitt 5.3.3 als Resultat die bekannten nichtabelschen Yang-Mills-Wechselwirkungsterme. Interessantes Merkmal dieses Resultates ist die Tatsache, dass die für wechselwirkende Yang-Mills-Theorien charakteristische Lie-Algebren-Struktur bereits in der Forderung nach BRST-Invarianz implizit enthalten ist und nicht explizit eingeführt werden muss.

Zunächst konzentrieren wir uns auf die Bedingung erster Ordnung (5.53) und formulieren diese in der Algebra $\mathcal{P}$. Mit $S_1 = \int dx\, g(x)\mathcal{L}_1$ und $g\big|_{\mathcal{O}_1} \equiv 1$ ergibt sich unter Verwendung von

$$\frac{\delta P(y)}{\delta\varphi(x)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\partial P}{\partial(\partial^\alpha\varphi)}(y)(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta(x-y) \tag{5.59}$$

der Zusammenhang

$$\begin{aligned} s_0S_1 &= \int dxdy\, h(x)g(y)\Big(-B^a(x)\frac{\delta\mathcal{L}_1(y)}{\delta\tilde{u}^a(x)} - u^a(x)\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_1(y)}{\delta A^a_\mu(x)}\Big) \\ &= \int dx\,\Big(-\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\partial^\alpha\big(h(x)B^a(x)\big)\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial^\alpha\tilde{u}^a)}(x) - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\partial^\alpha\big(h(x)u^a(x)\big)\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial^\alpha A^a_\mu)}(x)\Big). \end{aligned}$$

Mit dem freien BRST-Differential s_0 auf $\mathcal{P}$ erhalten wir daraus

$$s_0S_1 = \int dx\, h(x)(s_0\mathcal{L}_1)(x) + \int dx\, h(x)\partial_\mu\mathcal{M}_1^\mu(x) \tag{5.60}$$

mit $\mathcal{M}_1^\mu \in \mathcal{P}$. Damit übersetzt sich (5.53) in die Bedingung

$$s_0\mathcal{L}_1 - \partial_\mu(j_1^\mu - \mathcal{M}_1^\mu) \in \mathcal{E}_{S_0} \tag{5.61}$$

mit dem Ideal $\mathcal{E}_{S_0} \subset \mathcal{P}$, das von den freien Feldgleichungen (5.13) erzeugt wird (vgl. (2.5)).

Für die Bestimmung von Lösungen dieser Bedingung erweist es sich als hilfreich den Raum der *lokalen Differentialformen* (siehe [9, 8]) auf $\mathbb{M}$ einzuführen. Sei $\Omega^p(\mathbb{M},\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\otimes\Omega^p(\mathbb{M})$ der Raum der $\mathcal{P}$-wertigen p-Formen auf $\mathbb{M}$ und $\Omega(\mathbb{M},\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p=0}^d \Omega^p(\mathbb{M},\mathcal{P})$. $\Omega(\mathbb{M},\mathcal{P})$ ist zweifach graduiert: für $\omega = A\otimes\alpha \in \Omega^p(\mathbb{M},\mathcal{P})$ definieren wir den Formengrad $f(\omega) \equiv f(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} p$ und die Geistzahl $g(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} g(A)$. Das äußere Produkt von $\Omega(\mathbb{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p=0}^d \Omega^p(\mathbb{M})$ überträgt sich in natürlicher Weise auf $\Omega(\mathbb{M},\mathcal{P})$. Seien dazu $\omega = A\otimes\alpha$ und $\eta = B\otimes\beta$ lokale Formen zu $A, B \in \mathcal{P}$ mit definierter Geistzahl und $\alpha,\beta \in \Omega(\mathbb{M})$ mit definiertem Formengrad. Dann setzen wir

$$\omega\wedge\eta \equiv (A\otimes\alpha)\wedge(B\otimes\beta) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{g(B)f(\alpha)}(AB)\otimes(\alpha\wedge\beta) \tag{5.62}$$

und erhalten

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{|\omega||\eta|}\eta\wedge\omega \tag{5.63}$$

mit der (totalen) Graduierung $|\omega| \stackrel{\text{def}}{=} g(\omega) + f(\omega)$. Das BRST-Differential $s_0 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ und das äußere Differential d lassen sich in natürlicher Weise auf $\Omega(\mathbb{M},\mathcal{P})$ fortsetzen. Wir definieren

$$s_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} s_0(A)\otimes\alpha \tag{5.64}$$

und

$$d\omega \stackrel{\text{def}}{=} d(A)\wedge\alpha + (-1)^{g(A)}A\otimes d\alpha \tag{5.65}$$

zusammen mit[4] $dA \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{g(A)}\partial_\mu A \otimes dx^\mu$.

Wie man unmittelbar nachrechnet, gilt für die so fortgesetzten Differentiale weiterhin $s_0^2 = 0$ und $d^2 = 0$. s_0 und d sind auf $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ $|\cdot|$-graduierte Derivationen, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} s_0(\omega \wedge \eta) &= s_0\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge s_0\eta && (5.66)\\ d(\omega \wedge \eta) &= d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge d\eta. && (5.67) \end{aligned}$$

Damit antivertauschen d und s_0

$$s_0 d + d s_0 = 0. \tag{5.68}$$

Dem Ideal der freien Feldgleichungen $\mathcal{E}_{S_0}$ in $\mathcal{P}$ entspricht das Ideal $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_{S_0} \otimes \Omega(\mathbb{M})$ in $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$. Diese Ideale sind stabil unter der freien BRST-Transformation s_0. Aus den freien Feldgleichungen (5.13) und den Transformationsregeln (5.24) erhalten wir unmittelbar

$$\begin{aligned} s_0\Big(\frac{\delta S_0}{\delta A^{a,\mu}}\Big) &= 0 \qquad & s_0\Big(\frac{\delta S_0}{\delta u^a}\Big) &= -\partial^\mu \frac{\delta S_0}{\delta A^{a,\mu}}\\ s_0\Big(\frac{\delta S_0}{\delta \tilde{u}^a}\Big) &= 0 \qquad & s_0\Big(\frac{\delta S_0}{\delta B^a}\Big) &= \frac{\delta S_0}{\delta \tilde{u}^a}, \end{aligned} \tag{5.69}$$

d.h. $s_0(\mathcal{E}_{S_0}) \subset \mathcal{E}_{S_0}$ bzw. $s_0(\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})) \subset \Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})$.

Wir verwenden in den Rechnungen in Abschnitt 5.3.3 eine Fortsetzung des Hodge-Stern-Operators auf die Algebra $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$. Dazu fixieren wir eine Orientierung des Minkowski-Raums und bezeichnen das natürliche Skalarprodukt auf den Formen $\Omega(\mathbb{M})$ mit $g(\cdot, \cdot)$. Wir erhalten damit eine natürliche $\mathcal{P}$-wertige Bilinearform $\tilde{g}$ auf den lokalen Formen $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ gegeben durch

$$\tilde{g}(\omega, \eta) \equiv \tilde{g}(A \otimes \alpha, B \otimes \beta) \stackrel{\text{def}}{=} ABg(\alpha, \beta) \tag{5.70}$$

auf homogenen $\omega, \eta \in \Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ und der linearen Fortsetzung auf ganz $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$. Den Hodge-Stern-Operator $* : \Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P}) \longrightarrow \Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ auf lokalen Formen definieren wir dann gemäß

$$\omega \wedge *\eta \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g}(\omega, \eta) dM \tag{5.71}$$

mit der Volumenform dM auf $\mathbb{M}$, die der gewählten Orientierung entspricht. $*$ ist dadurch eindeutig definiert und besitzt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} *(A \otimes \alpha) &= (-1)^{g(A)f(\alpha)} A \otimes *\alpha && (5.72)\\ *s_0\omega &= (-1)^{f(\omega)} s_0 * \omega && (5.73)\\ * * \omega &= (-1)^{f(\omega)(d-f(\omega))}\omega, && (5.74) \end{aligned}$$

wie man unmittelbar anhand der Definitionen nachprüft. Schließlich führen wir auf $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ das *Kodifferential* δ gemäß $\delta\omega \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{d(f(\omega)+1)} *d*\omega$ ein und erhalten den verallgemeinerten *Laplace-Operator* $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} d\delta + \delta d$ wirkend auf $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$. Für lokale Formen ohne explizite Raumzeit-Abhängigkeit gilt folgender Zusammenhang zwischen Δ und dem d'Alembert-Operator $\Box$

$$\Delta\omega \equiv \Delta(A \otimes \alpha) = (-1)^{g(\omega)}(\Box A) \otimes \alpha. \tag{5.75}$$

[4] Wir folgen hier der Konvention in [9].

Ordnen wir jetzt der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_1 \in \mathcal{P}$ die lokale d-Form[5] $\omega^d \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_1 dM$ und dem Element $j_1^\mu - \mathcal{M}_1^\mu$ die lokale $(d-1)$-Form $\omega^{d-1} \stackrel{\text{def}}{=} -*\big((j_{1,\mu} - \mathcal{M}_{1,\mu})dx^\mu\big)$ zu, so übersetzt sich Bedingung (5.61) wegen $d\omega^{d-1} = -\partial_\mu(j_1^\mu - \mathcal{M}^\mu)dM$ in

$$s_0\omega^d + d\omega^{d-1} \in \Omega^d(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0}). \tag{5.76}$$

Die Suche nach Lösungen von Bedingung (5.53) reduziert sich damit auf die Bestimmung lokaler Formen ω^d, zu denen jeweils lokale Formen ω^{d-1} existieren, so dass (5.76) erfüllt ist. Wegen ${s_0}^2 = 0$, $s_0 d + ds_0 = 0$ und der Invarianz von $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})$ unter s_0 erhalten wir aus einer speziellen Lösung ω^d unmittelbar eine weitere Lösung $\omega'^d = \omega^d + s_0\eta^d + d\eta^{d-1} + \iota^d$ zu beliebigen $\eta^d \in \Omega^d(\mathbb{M}, \mathcal{P})$, $\eta^{d-1} \in \Omega^{d-1}(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ und $\iota^d \in \Omega^d(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})$. Denn sei $\omega^{d-1} \in \Omega^{d-1}(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ so dass $s_0\omega^d + d\omega^{d-1} \in \Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})$, dann gilt auch $s_0\omega'^d + d\omega'^{d-1} \in \Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})$ mit $\omega'^{d-1} \stackrel{\text{def}}{=} \omega^{d-1} + s_0\eta^{d-1}$. Um triviale Lösungen von (5.76) auszuschließen, identifizieren wir zwei Lösungen ω^d und ω'^d, die sich nur um eine Lösung der Form $s_0\eta^d + d\eta^{d-1} + \iota^d$ unterscheiden. Die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen $[\omega^d]$ wird als *schwache Relativkohomologie* $H^d_{\text{weak}}(s_0|d)$ *von* s_0 *modulo* d bezeichnet[6] (siehe [9] und [38]). Der Terminus "schwach" bezieht sich darauf, dass $s_0\omega^d + d\omega^{d-1} = 0$ nur modulo Feldgleichungen gefordert wird (siehe auch [39]).

Die Berechnung von Relativkohomologien wird mit Hilfe der sogenannten *Absteigegleichungen* auf die Kohomologien der involvierten (Korand-)Operatoren zurückgeführt. Zu Details sei der Leser auf die Arbeit [9] und die darin aufgeführte Literatur verwiesen. Eine Zusammenfassung der im folgenden verwendeten Begriffe und Aussagen findet sich in Anhang C. Wir wollen uns im Rahmen der vorliegenden Arbeit darauf beschränken, ausgehend von einem einfachen und physikalisch motivierten Ansatz, eine Klasse von Lösungen der Bedingung (5.76) zu bestimmen, die uns unmittelbar auf die bekannten wechselwirkenden Yang-Mills-Theorien führt. Die Beantwortung der Frage nach der Existenz weiterer Lösungen von (5.76) erfordert einen tieferen Einblick in die Theorie der Relativkohomologien und wird in dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

5.3.3 Ableitung der Yang-Mills-Wechselwirkung

Dieser Abschnitt[7] beruht im wesentlichen auf [36], worin im Rahmen des Antifeld-Formalismus eine kohomologische Ableitung der Yang-Mills-Wechselwirkung gegeben wird. Dieser Formalismus unterscheidet sich von dem hier verwendeten darin, dass keine Eichfixierung durchgeführt wird (d.h. es sind keine Hilfsfelder B^a und keine Antifeldgeister $\tilde{u}^a$ involviert). Stattdessen werden sogenannte Antifelder eingeführt, die die freien Feldgleichungen über einen weiteren nilpotenten Operator (Koszul-Tate-Differential) implementieren. Dadurch kann das Ideal $\mathcal{E}_{S_0}$ als eine Homologie dieses Differentials interpretiert werden. Das Koszul-Tate-Differential und das freie BRST-Differential s_0 wird im Antifeld-Formalismus zu einem gesamten nilpotenten BRST-Differential σ_0 zusammengefasst[8]. Mit Hilfe der zen-

[5] Im folgenden schreiben wir kurz $A \otimes \alpha \equiv A\alpha$.

[6] Der obere Index an H bezieht sich auf die Dimension von $\mathbb{M}$.

[7] Im folgenden sei $d = 4$.

[8] Wir verwenden hier aus Gründen der Unterscheidbarkeit eine unübliche Bezeichnung des BRST-Differentials im Antifeld-Formalismus.

tralen Gleichung des Antifeldformalismus, der sogenannten Master-Gleichung, die als allgemeiner Ausdruck für die Eichsymmetrie der Theorie angesehen werden kann, werden in [36], ähnlich wie in Abschnitt 5.3.1, Bedingungen an konsistente Wechselwirkungen abgeleitet. Diese führen unmittelbar auf das Problem der Bestimmung der Relativkohomologie $H^d(\sigma_0, d)$ von σ_0 modulo d. Durch die Einführung der Antifelder wird also die Schwierigkeit der Bestimmung einer *schwachen* Relativkohomologie vermieden. In [40] wurde gezeigt, dass die beiden Relativkohomologien $H^d(\sigma_0, d)$ und $H^d_{\text{weak}}(s_0, d)$ unter der zusätzlichen Bedingung, dass das deformierte BRST-Differential s (5.50) wieder nilpotent ist, auf gleichwertige Lösungen für konsistente Wechselwirkungen führen.

Unabhängig von diesem Resultat wird im folgenden das Vorgehen aus [36] in den hier verwendeten eichfixierten Formalismus übertragen. Dieses beruht auf der in Anhang C skizzierten Methode zur Lösung der Absteigegleichungen: Ausgehend von nichttrivialen Elementen der Kohomologie von s_0 als untere Enden von s_0-Leitern, wird versucht, durch sukzessive Anwendung von d eine Lösung von (5.76) zu finden.

Dazu stellen wir zunächst– wie in [36] – zusätzliche physikalisch motivierte Bedingungen an $\mathcal{L}_1$:

- $\mathcal{L}_1$ ist Lorentz-invariant
- $g(\mathcal{L}_1) = 0$
- $\mathcal{L}_1$ ist ein 3-Vertex, d.h. ein Polynom von höchstens dritter Ordnung in den Feldern[9].

Da die Kohomologie $H(s_0)$ von s_0 aufgespannt wird von Polynomen in u und $\partial_{\nu_1 \cdots \nu_k} F_{\mu\nu}$ mit $k \geq 0$ (siehe Anhang C) und die Geistzahl sich bei jedem Schritt aufwärts in einer s_0-Leiter um eins verkleinert, können wir uns wegen der zweiten Forderung auf s_0-Leitern beschränken, deren unteres Ende mindestens eine 1-Form ist. Zusammen mit den anderen beiden Forderungen findet man dann als mögliche Enden von Absteigegleichungen die beiden 2-Formen

$$\omega^2 = f_{abc} u^b u^c F^a \quad \text{und} \quad \omega'^2 = f_{abc} u^b u^c * F^a \tag{5.77}$$

zu $F^a = dA^a$ und reellen Konstanten f_{abc}, $a, b, c \in \underline{N}$, für die o.B.d.A $f_{abc} = -f_{acb}$ gelte.

Zur Lösung der zugehörigen Absteigegleichungen berechnen wir zunächst $d\omega^2$ bzw. $d\omega'^2$ und untersuchen, ob das Ergebnis s_0-exakt modulo Elemente in $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{J}_{S_0})$ ist. Es ergibt sich unter Verwendung von $dF^a = 0$, $\Delta = d\delta + \delta d$ und $\delta A^a = \partial^\mu A^a_\mu$

$$d\omega^2 = f_{abc} u^b u^c dF^a - 2 f_{abc} u^b du^c \wedge F^a \tag{5.78}$$

und

$$d\omega'^2 = -f_{abc} u^b u^c * (\Delta A^a - d(\partial^\mu A^a_\mu)) - 2 f_{abc} u^b du^c \wedge *F^a. \tag{5.79}$$

Wie eine kurze Rechnung unter Verwendung der Identitäten $s_0 A = -du$, $s_0 d\tilde{u} = dB$ und $s_0 F = 0$ zeigt, gilt

$$s_0(\underbrace{2 f_{abc} u^b A^c \wedge F^a}_{\stackrel{\text{def}}{=} \omega^3}) + d(\underbrace{f_{abc} u^b u^c F^a}_{= \omega^2}) = 0 \tag{5.80}$$

[9] Diese Forderung garantiert die Renormierbarkeit der Theorie gemäß "power counting".

sowie

$$s_0(\underbrace{f_{abc}u^b u^c * d\tilde{u}^a + 2f_{abc}u^b A^c \wedge *F^a}_{\stackrel{\text{def}}{=}\omega'^3}) + d(\underbrace{f_{abc}u^b u^c * F^a}_{=\omega'^2}) \tag{5.81}$$
$$= -f_{abc}u^b u^c * (\Delta A^a - d(\partial^\mu A^a_\mu - B^a))$$
$$= -f_{abc}u^b u^c \frac{\delta S_0}{\delta A^{a,\mu}} * dx^\mu \in \Omega^3(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0}).$$

Wir versuchen nun zunächst ω^3 aus (5.80) ein weiteres Mal in der s_0-Leiter anzuheben. Anwendung von d liefert

$$d\omega^3 = 2f_{abc}du^b \wedge A^c \wedge F^a - 2f_{abc}u^b F^c \wedge F^a. \tag{5.82}$$

Wie man schnell findet, ist der erste Term s_0-exakt mit

$$2f_{abc}du^b \wedge A^c \wedge F^a = -s_0(f_{abc}A^b \wedge A^c \wedge F^a) \tag{5.83}$$

während der zweite Term $2f_{abc}u^b F^c \wedge F^a$ ein nichttriviales Element der Kohomologie von s_0 darstellt. Um dieser Obstruktion auszuweichen bleibt die Möglichkeit $f_{abc} = -f_{cba}$, d.h. die vollständige Antisymmetrie von f_{abc}, zu fordern. In diesem Fall ist jedoch schon $d\omega^3 \equiv 0$, was unmittelbar auf ein triviales ω^4 führt.

Wir wenden uns ω'^3 aus (5.81) zu und erhalten zunächst

$$d\omega'^3 = \underbrace{2f_{abc}du^b u^c \wedge *d\tilde{u}^a}_{(1)} + \underbrace{2f_{abc}du^b \wedge A^c \wedge *F^a}_{(2)} + \underbrace{2f_{abc}u^b A^c \wedge d * F^a}_{(3)}$$
$$+ \underbrace{f_{abc}u^b u^c d * d\tilde{u}^a}_{(4)} - \underbrace{2f_{abc}u^b F^c \wedge *F^a}_{(5)}. \tag{5.84}$$

Für die einzelnen Terme finden wir

$$\begin{aligned}
(1) &= -s_0(2f_{abc}A^b u^c \wedge *d\tilde{u}^a) - 2f_{abc}A^b u^c \wedge *dB^a \\
(2) &= -s_0(f_{abc}A^b \wedge A^c \wedge *F^a) \\
(3) &= -2f_{abc}u^b A^c \wedge *(\Delta A^a - d(\partial^\mu A^a_\mu)) \\
(4) &= f_{abc}u^b u^c * (\Delta\tilde{u}^a - \underbrace{d\delta\tilde{u}^a}_{=0}) = -f_{abc}u^b u^c \Box\tilde{u}^a dM
\end{aligned}$$

während (5) weder Element von $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})$ noch s_0-exakt modulo $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})$ ist. Deshalb gelangen wir nur dann zu einer Lösung für ω^4, wenn wir wieder die vollständige Antisymmetrie von f_{abc} fordern, so dass (5) identisch verschwindet. Wir erhalten damit folgende

Lösung von (5.76)

$$
\begin{aligned}
s_0\big(&\underbrace{2f_{abc}A^b u^c \wedge *d\tilde{u}^a + f_{abc}A^b \wedge A^c \wedge *F^a}_{\stackrel{\mathrm{def}}{=}\omega'^4}\big) + d\omega'^3 \\
&= f_{abc}\Big(u^b u^c * \Delta\tilde{u}^a - 2A^b u^c \wedge *(\Delta A^a - d(\partial^\mu A^a_\mu - B^a))\Big) \\
&\equiv \underbrace{f_{abc}\Big(-u^b u^c \frac{\delta S_0}{\delta u^a} + 2A^b_\mu u^c \frac{\delta S_0}{\delta A^a_\mu}\Big)}_{=-G_1} dM \in \Omega^4(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0}). \qquad (5.85)
\end{aligned}
$$

Explizit finden wir mit unseren Bezeichnungen $\omega'^4 = \mathcal{L}_1 dM$, $\omega'^3 = -*\big((j_{1,\mu} - \mathcal{M}_{1,\mu})dx^\mu\big)$ und $\tilde{s}_1(x) = \delta_{G_1(x)}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= f_{abc}F^{a,\mu\nu}A^b_\mu A^c_\nu - 2f_{abc}\partial^\mu\tilde{u}^a A^b_\mu u^c && (5.86)\\
j^\mu_1 - \mathcal{M}^\mu_1 &= f_{abc}\partial^\mu\tilde{u}^a u^b u^c - 2f_{abc}F^a_{\mu\nu}A^{b,\nu}u^c && (5.87)\\
\tilde{s}_1 &= f_{abc}u^b u^c \frac{\delta}{\delta u^a} - 2f_{abc}A^b_\mu u^c \frac{\delta}{\delta A^a_\mu}. && (5.88)
\end{aligned}
$$

Nachdem wir eine Lösung von (5.53) gefunden haben, wenden wir uns der Bedingung 2. Ordnung (5.55) zu. Diese lautet in der Algebra $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$

$$
s_1\mathcal{L}_1 dM + s_0\mathcal{L}_2 dM - d*((j_{2,\mu} - \mathcal{M}_{2,\mu})dx^\mu) = -G_2 dM \in \Omega(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0}) \qquad (5.89)
$$

mit $\mathcal{L}_2, \mathcal{M}^\mu_2 \in \mathcal{P}$ und dem wechselwirkenden BRST-Differential erster Ordnung s_1, welches gemäß (5.88) auf $\mathcal{P}$ definiert wird durch

$$
\begin{aligned}
s_1(A^a_\mu) &= -2f_{abc}A^b_\mu u^c \qquad & s_1(B^a) &= 0 && (5.90)\\
s_1(u^a) &= f_{abc}u^b u^c \qquad & s_1(\tilde{u}^a) &= 0 && (5.91)
\end{aligned}
$$

und $s_1(PQ) = s_1(P)Q + (-1)^{g(P)}s_1(Q)$ für alle $P, Q \in \mathcal{P}$, und in gleicher Weise auf $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ fortgesetzt wird wie das freie BRST-Differential s_0.

Wir bestimmen zunächst $s_1\mathcal{L}_1 dM$ unter Verwendung von

$$
s_1 A^a = 2f_{abc}A^b u^c \qquad (5.92)
$$

sowie

$$
s_1(*F^a) = -2f_{abc} * F^b u^c + 2f_{abc} * (A^b \wedge du^c) \qquad (5.93)
$$

und organisieren die Terme in folgender Weise:

$$
\begin{aligned}
s_1\mathcal{L}_1 dM \equiv s_1\omega'^4 &= -2\,\underbrace{J_{abde}(A^b u^d u^e \wedge *d\tilde{u}^a + A^b \wedge A^d u^e \wedge *F^a)}_{\omega''^4} \\
&\quad + 2f_{abc}f_{ade}A^b \wedge A^c \wedge *(A^d \wedge du^e)
\end{aligned}
$$

mit $J_{abde} \stackrel{\text{def}}{=} f_{abc}f_{cde}+f_{bdc}f_{cae}+f_{dac}f_{cbe}$. J_{abde} ist offensichtlich vollständig antisymmetrisch. Die Frage ist nun, ob es $\mathcal{L}_2$, $(j_{2,\mu}-\mathcal{M}_{2,\mu})$ und G_2 derart gibt, dass (5.89) erfüllt ist. Zunächst finden wir unter Verwendung von $\omega \wedge *\eta = (-1)^{g(\omega)g(\eta)}\eta \wedge *\omega$ für alle $\omega, \eta \in \Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$

$$2f_{abc}f_{ade}A^b \wedge A^c \wedge *(A^d \wedge du^e) = \tfrac{1}{2}s_0(f_{abc}f_{ade}A^b \wedge A^c \wedge *(A^d \wedge A^e)). \tag{5.94}$$

Damit (5.89) erfüllbar ist, muss sich ω''^4 schreiben lassen als

$$\omega''^4 = s_0\lambda + d\kappa + \iota \tag{5.95}$$

mit lokalen Formen $\lambda \in \Omega^4(\mathbb{M}, \mathcal{P})$, $\kappa \in \Omega^3(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ und $\iota \in \Omega^4(\mathbb{M}, \mathcal{E}_{S_0})$. Dann muss aber wegen ${s_0}^2 = 0$ und $s_0 d + ds_0 = 0$ auch

$$s_0\omega''^4 = -ds_0\kappa + \underbrace{s_0\iota}_{\in\Omega^4(\mathbb{M},\mathcal{E}_{S_0})} \tag{5.96}$$

sein. Eine Rechnung liefert

$$\begin{aligned} s_0\omega''^4 \quad = \quad & -d\big(\underbrace{J_{abde}(A^b u^d u^e \wedge *F^a + \tfrac{1}{3}u^b u^d u^e * d\tilde{u}^a)}_{\stackrel{\text{def}}{=}\kappa'}\big) \\ & + \underbrace{J_{abde}\big(A^b u^d u^e \wedge *(\Delta A^a - d\partial^\mu A^a_\mu + dB^a) - \tfrac{1}{3}u^b u^d u^e * \Delta\tilde{u}^a\big)}_{\in\Omega^4(\mathbb{M},\mathcal{E}_{S_0})}. \end{aligned}$$

Nun ist $s_0\kappa' \neq 0$ und damit κ' sicher nicht s_0-exakt, weshalb (5.95) nicht haltbar ist. Um dennoch eine Lösung von (5.89) zu finden, müssen wir $J_{abde} = 0$ fordern. Die Konstanten f_{abc} können damit als die Strukturkonstanten einer Lie-Algebra angesehen werden. Die in jeder Lie-Algebra gültige Jakobi-Identität wird dabei garantiert durch das Verschwinden von J_{abde}. Die Lösung für $\mathcal{L}_2$ von (5.89) lautet damit

$$\mathcal{L}_2 dM = -\tfrac{1}{2}f_{abc}f_{ade}A^b \wedge A^c \wedge *(A^d \wedge A^e) \equiv -f_{abc}f_{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{d,\mu}A^{e,\nu}dM \tag{5.97}$$

zu $j_2 - \mathcal{M}_2 = 0$ und $G_2 = 0$. Damit verschwindet auch $\tilde{s}_2$.

Schließlich lautet die Bedingung zu dritter Ordnung

$$s_2\mathcal{L}_1 + s_1\mathcal{L}_2 + s_0\mathcal{L}_3 - \partial_\mu(j_3^\mu - \mathcal{M}_3^\mu) = -G_3 \in \mathcal{E}_{S_0}. \tag{5.98}$$

Die Berechnung von $s_1\mathcal{L}_2$ liefert unter Verwendung von $\omega \wedge *\eta = (-1)^{g(\omega)g(\eta)}\eta \wedge *\omega$

$$\begin{aligned} s_1\mathcal{L}_2 dM \quad & \equiv \quad -\tfrac{1}{2}s_1(f_{abc}f_{ade}A^b \wedge A^c \wedge *(A^d \wedge A^e)) \\ & = \quad -f_{abc}f_{ade}\big(f_{bgh}A^g u^h \wedge A^c \wedge *(A^d \wedge A^e) \\ & \qquad -f_{cgh}A^g u^h \wedge A^b \wedge *(A^d \wedge A^c) \\ & \qquad -f_{dgh}A^g u^h \wedge A^e \wedge *(A^b \wedge A^c) \\ & \qquad +f_{egh}A^g u^h \wedge A^d \wedge *(A^b \wedge A^c)\big) = 0. \end{aligned}$$

Deshalb besitzt (5.98) nur triviale Lösungen und die Reihen S_{int} (5.43), j^μ (5.44) und s (5.50) brechen ab.

Damit erhalten wir als eine Klasse von konsistenten Wechselwirkungen die bekannten Wechselwirkungsterme der nichtabelschen Yang-Mills-Theorien bezüglich einer Lie-Algebra mit Strukturkonstanten f_{abc}. Die gesamte Lagrange-Dichte ergibt sich mit der Ersetzung $f_{abc} \longrightarrow \frac{1}{2} f_{abc}$ zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} &= \mathcal{L}_0 + \lambda \mathcal{L}_1 + \lambda^2 \mathcal{L}_2 \\
&= \big(\tfrac{1}{2} \partial^\mu A^{a,\nu} (\partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu) + \tfrac{1}{2} B^a B^a - B^a \partial_\mu A^{a,\mu} + \partial_\mu \tilde{u}^a \partial^\mu u^a\big) + \\
&\quad \lambda \big(\tfrac{1}{2} f_{abc} F^{a,\mu\nu} A^b_\mu A^c_\nu - f_{abc} \partial^\mu \tilde{u}^a A^b_\mu u^c\big) - \lambda^2 \big(\tfrac{1}{4} f_{abc} f_{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{d,\mu} A^{e,\nu}\big).
\end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra bezüglich der Basis $\{\tau_a\}_{a \in \underline{N}}$ mit den Relationen $[\tau_a, \tau_b] = i\lambda f_{abc} \tau_c$ und $\mathrm{Tr}\tau_a \tau_b = \delta_{ab}$. Interpretieren wir die Felder A^a_μ, B^a, u^a und $\tilde{u}^a$ als Koeeffizienten der $\mathfrak{g}$-wertigen Felder A, B, u und $\tilde{u}$ bezüglich der Basis $\{\tau_a\}$, so lässt sich die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ unmittelbar in die gewohnte Yang-Mills-Form bringen (siehe beispielsweise [8], p.39)

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\Big(-\tfrac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - B \partial_\mu A^\mu + \tfrac{1}{2} B^2 + \partial_\mu \tilde{u} \partial^\mu u - i \tilde{u} \partial^\mu [u, A_\mu] \Big) \tag{5.99}$$

mit den nun wechselwirkenden Feldstärken $F_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$.

Das gesamte BRST-Differential $s = s_0 + \lambda s_1$ auf $\mathcal{P}$ wirkt auf den Basisfeldern gemäß

$$sA_\mu = \partial_\mu u + i[u, A_\mu] \quad , \quad su = \tfrac{1}{2} i [u, u] \tag{5.100}$$

$$s\tilde{u} = B \quad , \quad sB = 0 \tag{5.101}$$

und ist offensichtlich nilpotent.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Die MWI stellt in der klassischen perturbativen Feldtheorie eine allgemeingültige Identität dar, welche alle Symmetrien, die aus den klassischen Feldgleichungen folgen, beinhaltet. Die Formulierung mit Hilfe klassischer retardierter Produkte ermöglicht ihre formale Übertragung in den Rahmen der kausalen Störungstheorie, wo sie eine nichttriviale Normierungsbedingung an die retardierten Produkte darstellt. Dass diese nicht in voller Allgemeinheit erfüllbar sein kann, folgt aus der Existenz der bekannten Anomalien der Quantenfeldtheorie.

Motiviert durch die Tatsache, dass die MWI in konkreten Beispielen auf die bekannten Ward-Identitäten führt und wichtige Information für die Konstruierbarkeit der lokalen Observablenalgebren von Eichtheorien enthält, wurde in dieser Arbeit die Frage der (teilweisen) Erfüllbarkeit der MWI in der perturbativen Quantenfeldtheorie untersucht. Dazu wurde in einem ersten Schritt gezeigt, dass die allgemeinste Verletzung der MWI sich in Form lokaler Anomalie-Terme ausdrücken lässt.

Dass die MWI in Beziehung mit dem Quantenwirkungsprinzip von Lam und Lowenstein steht, wurde bereits in [21] angemerkt. Um eine konkrete Verbindung zwischen dem erwähnten Resultat und der Form des Quantenwirkungsprinzips, wie es in der Methode der algebraischen Renormierung verwendet wird, herzustellen, wurde im Rahmen der kausalen Störungstheorie ein effektiver Feldformalismus entwickelt, der es ermöglicht, eine perturbative Quantenfeldtheorie durch eine klassische Feldtheorie zu nichtlokalen effektiven Wechselwirkungstermen zu beschreiben. Dazu war die konsistente Einführung des in [22] vorgeschlagenen verallgemeinerten off-shell-Formalismus in die klassische perturbative Feldtheorie nötig.

In diesem effektiven Feldformalismus konnten dann unter Verwendung der auch für nichtlokale Größen gültigen klassischen MWI effektive Versionen der quantenfeldtheoretischen MWI und der gefundenen Identität, die ihre allgemeine Verletzung ausdrückt, abgeleitet werden. Die so erhaltenen Identitäten stehen in enger Beziehung mit den Ward-Identitäten und dem Quantenwirkungsprinzip, ausgedrückt durch das Vertex-Funktional aus dem funktionalen Zugang zur Quantenfeldtheorie.

Bei dem Versuch, die Erfüllbarkeit der MWI in Modellen mit einer Symmetrie der klassischen Wirkung ähnlich wie in der algebraischen Renormierungsmethode auf konkrete Obstruktionen (z.B. kohomologische Bedingungen an die Symmetrieoperatoren) zurückzuführen, trat das Problem auf, dass durch die Verwendung lokalisierter infinitesimaler Symmetrietransformationen weitere Terme involviert sind, deren Verhalten bei der Durchführung einer Renormierung der effektiven Wechselwirkung im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht erkannt werden konnte. Zur Klärung dieser Frage scheint eine genauere Kenntnis der Struktur der auftretenden Anomalie-Terme vonnöten.

Eine andere Möglichkeit zur Überwindung dieser Schwierigkeiten (im Fall linearer Symmetrietransformationen) könnte die Ausnutzung des klassischen Noether-Theorems bieten: Indem zunächst die Erfüllbarkeit der effektiven Version der MWI für den nichtlokalisierten Symmetrieoperator gezeigt wird – dies involviert die Erfüllbarkeit gewisser kohomologischer Bedingungen – kann für die derart renormierte effektive Wirkung nach dem Noether-Theorem auf die Existenz eines erhaltenen effektiven Stroms geschlossen werden. Die Divergenz dieses effektiven Stroms verschmiert mit einer Testfunktion g ergibt sich gerade durch Anwendung des mit g lokalisierten Symmetrieoperators auf die effektive Wirkung [38]. Um jedoch zur ursprünglichen Form der MWI zurückzukehren, hat man zu zeigen, dass dieser effektive Strom mit dem effektiven Feld des klassischen Stroms in der gewählten Renormierung übereinstimmt.

Als eine Anwendung des in der Arbeit vorgestellten Formalismus der algebraischen perturbativen Quantenfeldtheorie wurden schließlich Eichtheorien betrachtet. Ausgehend von Bedingungen an konsistente Wechselwirkungen zu freien Yang-Mills-Theorien, welche in [21] anhand der Forderung der BRST-Invarianz der wechselwirkenden Theorie unter Verwendung der MWI abgeleitet wurden, konnte durch die Anwendung kohomologischer Techniken eine Klasse von Lösungen dieser Bedingungen bestimmt werden, die sich als äquivalent mit den bekannten nichtabelschen Yang-Mills Wechselwirkungstermen erwiesen. Bemerkenswert an diesem Resultat ist die Tatsache, dass die Lie-Algebren-Struktur dieser Theorien in Form der Antisymmetrie der Strukturkonstanten und der Jakobi-Identität bereits in der Forderung nach BRST-Invarianz enthalten sind und nicht explizit eingeführt werden müssen.

Es war im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht möglich, eine detailierte kohomologische Analyse der Bedingungen an konsistente Wechselwirkungen durchzuführen, die es erlaubt, auch Aussagen über die Existenz weiterer Lösungen zu treffen. Die wesentliche Schwierigkeit in diesem Zusammenhang besteht offensichtlich darin, die entsprechenden Kohomologien modulo Terme im Ideal der freien Feldgleichungen zu bestimmen. Hier scheint ein entscheidender Vorteil des erwähnten Antifeld-Formalismus zu liegen, in welchem die Bestimmung von "schwachen" Kohomologien durch die Einführung des Koszul-Tate-Komplexes vermieden wird.

Anhang A

Zeitgeordnete Produkte

In diesem Abschnitt[1] wird die Verbindung zwischen dem ursprünglichen Formalismus der kausalen Störungstheorie nach Bogoliubov, Epstein und Glaser [11, 12] mit Hilfe zeitgeordneter Produkte (T-Produkte) und dem der vorliegenden Arbeit zugrundeliegenden Formalismus durch retardierte Produkte hergestellt. Dazu wird zunächst ein kurzer Überblick über die Definition zeitgeordneter Produkte in der kausalen Störungstheorie gegeben (zu Details siehe die beiden oben genannten Orginalarbeiten sowie [10, 37]).

Zeitgeordnete Produkte lassen sich wie retardierte Produkte anhand gewisser definierender Eigenschaften konstruieren. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Familie linearer Abbildungen

$$\begin{aligned} T_n : \mathrm{Sym}^n\mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{M}^n, \mathcal{F}) \\ A^{\otimes n} &\longmapsto T_n(A^{\otimes n}) \end{aligned} \tag{A.1}$$

definiert anhand der folgenden Eigenschaften:

Anfangsbedingung:

$$T_0(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad T_1(Q) = Q \quad , \quad \forall Q \in \mathcal{P} \tag{A.2}$$

mit der üblichen Interpretation von $Q \in \mathcal{P}$ als $\mathcal{F}$-wertige Distribution auf $\mathbb{M}$ gemäß $Q(g) = \int dx\, g(x)Q(x)$.

Kausalität: Für alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$ gelte

$$T_n(A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)) = T_k(A_1(x_1), \ldots, A_k(x_k)) \star T_{n-k}(A_{k+1}(x_{k+1}), \ldots, A_n(x_n)) \tag{A.3}$$

falls $\{x_1, \ldots, x_k\} \cap (\{x_{k+1}, \ldots, x_n\} + \overline{V}_-) = \varnothing$.

Action-Ward-Identität: T_n vertausche mit partiellen Ableitungen. Damit lassen sich in konsistenter Weise zeitgeordnete Produkte auf den lokalen Funktionalen $\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ definieren (siehe 3.2.1).

[1] Ein großer Teil dieses Abschnittes beruht auf einer Ausarbeitung von Michael Dütsch.

Außerdem werden die Eigenschaften **Unitarität**, **Kovarianz** und **Feldunabhängigkeit** gefordert, welche in gleicher Weise wie für retardierte Produkte formuliert werden. Ausgehend von diesen Forderungen lässt sich ein induktives Konstruktionsverfahren für zeitgeordnete Produkte angeben, das wie in Abschnitt 3.2.2 auf das Problem der Fortsetzung gewisser Distributionen auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ nach $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ führt.

Das erzeugende Funktional der zeitgeordneten Produkte ist die lokale S-Matrix $\mathbf{S}$, gegeben durch

$$\mathbf{S}(F) \overset{\text{def}}{=} T(e_\otimes^{iF}) \quad \text{mit} \quad F \in \mathcal{F}_{\text{loc}}. \tag{A.4}$$

Das Inverse der S-Matrix bezüglich des Sternprodukts $\star$ ist das erzeugende Funktional der anti-zeitgeordneten Produkte $(\overline{T}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$\mathbf{S}(F)^{-1} \overset{\text{def}}{=} \overline{T}(e_\otimes^{-iF}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \big(\mathbb{1} - T(e_\otimes^{iF})\big)^{\star n}. \tag{A.5}$$

Den Zusammenhang zwischen den zeitgeordneten Produkten und den retardierten Produkten liefert jetzt die Formel von Bogoliubov[2] [11]:

$$R(e_\otimes^S, F) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \overline{T}(e_\otimes^{-iS/\hbar}) \star T(e_\otimes^{i(S+\lambda F)/\hbar}) = \overline{T}(e_\otimes^{-iS/\hbar}) \star T(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes F). \tag{A.6}$$

Ursprünglich diente diese Identität im Rahmen der kausalen Störungstheorie mit Hilfe zeitgeordneter Produkte der Definition wechselwirkender Felder. Im Rahmen dieser Arbeit kann (A.6) als implizite Definition zeitgeordneter Produkte verstanden werden. In [22] wurde dazu folgende formale Inversion von (A.6) gefunden

$$\mathbf{S}(F/\hbar) = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\tfrac{i}{\hbar}\big)^k \int_0^1 d\lambda_k \int_0^{\lambda_k} d\lambda_{k-1} \cdots \int_0^{\lambda_2} d\lambda_1\, R(e_\otimes^{\lambda_1 F}, F) \star \cdots \star R(e_\otimes^{\lambda_k F}, F).$$

Retardierte und zeitgeordnete Produkte lassen sich durch Graphen darstellen. Im Gegensatz zu den Graphen der zeitgeordneten Produkte sind die der retardierten Produkte stets zusammenhängend. Klassische retardierte Produkte entsprechen zusammenhängenden Baumgraphen, d.h. Graphen in denen keine Schleifen ("loops") auftreten. Zeitgeordnete Produkte besitzen kein klassisches Pendant. Wir definieren demnach T_{tree} respektive T^c als den Anteil der zeitgeordneten Produkte, der gerade allen Baumgraphen respektive allen zusammenhängenden Graphen entspricht. Es gilt[3]

$$T(e_\otimes^{iS/\hbar}) = e^{T^c(e_\otimes^{iS})/\hbar} \tag{A.7}$$

bzw.

$$T_{\text{tree}}(e_\otimes^{iS/\hbar}) = e^{T^c_{\text{tree}}(e_\otimes^{iS})/\hbar} \tag{A.8}$$

[2] Die zusätzlichen $\hbar$-Faktoren in den T-Produkten in (A.6) beziehen sich auf die in dieser Arbeit verwendete Konvention $\lim_{\hbar\to 0} R = R_{\text{cl}}$.

[3] Analoges gilt für die anti-zeitgeordneten Produkte $\overline{T}$.

mit dem Baumgraphenanteil $T^c_{\rm tree}$ der zusammenhängenden T-Produkte und der Exponentialreihe e bezüglich des klassischen Produktes in $\mathcal{F}$. Es gilt der Zusammenhang

$$T^c_{\rm tree}(F_1 \otimes \cdots \otimes F_n) = \lim_{\hbar\to 0} \hbar^{-(n-1)} T^c(F_1 \otimes \cdots \otimes F_n) \tag{A.9}$$

falls $F_1, \ldots, F_n \sim \hbar^0$.

Da die zeitgeordneten Produkte i.a. nicht zusammenhängend sind, lässt sich aus (A.6) nicht unmittelbar ein allgemeiner Zusammenhang zwischen $R_{\rm cl}$ und $\overline{T}_{\rm tree}$ bzw. $T_{\rm tree}$ gewinnen. Abstrakt lässt sich $T^c_{\rm tree}(F_1 \otimes \cdots \otimes F_n)$ wie folgt bestimmen: Man sammle alle zusammenhängenden Baumgraphen in dem Produkt $F_1 \star \cdots \star F_n$ und ersetze die auftretenden Δ_+-Funktionen allesamt durch Feynman-Propagatoren $\Delta_F \stackrel{\rm def}{=} \Delta_+ + i\Delta^{\rm av}$ mit der avancierten Greens-Funktion $\Delta^{\rm av}$. Da nur Baumgraphen betrachtet werden, treten dabei keine problematischen punktweisen Produkte von Feynman-Propagatoren auf. Anhand dieser Definition kann $T^c_{\rm tree}$ auch auf nichtlokale Einträge $F_1, \ldots, F_n$ fortgesetzt werden.

Wir suchen ein Äquivalent der klassischen MWI ausgedrückt durch zusammenhängende zeitgeordnete Produkte auf Baumgraphenniveau. Sei dazu $S \in \mathcal{F}$ und $A = \int dx\, Q(x) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)} \in \mathcal{J}^{S_0}$ mit $Q(x) \in \mathcal{F}$. Wir berechnen unter Verwendung von $\int dy\, \Delta_F(x-y) \frac{\delta^2 S_0}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)} = i\delta(x-z)$

$$\begin{aligned} T^c_{\rm tree}(S \otimes A) &= \hbar \int dx\, dy\, \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \Delta_F(x-y) \frac{\delta A}{\delta\varphi(y)} \\ &= \hbar \int dx\, dy\, dz \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \Delta_F(x-y) \frac{\delta Q(z)}{\delta\varphi(y)} \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(z)} \\ &\quad + \hbar \int dx\, dy\, dz \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)} \Delta_F(x-y) \frac{\delta^2 S_0}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)} Q(z) \\ &= \int dz\, T^c_{\rm tree}(S \otimes Q(z)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(z)} + i\hbar \int dx\, Q(x) \frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\tfrac{i}{\hbar} T^c_{\rm tree}(S \otimes A) + \delta_A S = \int dx\, \tfrac{i}{\hbar} T^c_{\rm tree}(S \otimes Q(x)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}. \tag{A.10}$$

In prinzipiell gleicher Weise kann die Gültigkeit der Identität

$$T^c_{\rm tree}(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes (A + \delta_A S)) = \int dx\, T^c_{\rm tree}(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes Q(x)) \frac{\delta S_0}{\delta\varphi(x)}, \tag{A.11}$$

welche der klassischen MWI im off-shell-Formalismus entspricht, gezeigt werden (siehe dazu auch [1]).

Auch im Rahmen der zeitgeordneten Produkte lässt sich ein effektiver Formalismus entwickeln. Sei Γ_T die lineare Abbildung

$$\Gamma_T : {\rm Sym}\mathcal{F}_{\rm loc} \longrightarrow \mathcal{F} \tag{A.12}$$

impliziert definiert durch

$$T^c(e_\otimes^{iS/\hbar}) = T^c_{\mathrm{tree}}\Big(e_\otimes^{i\Gamma_T(e_\otimes^S)/\hbar}\Big). \tag{A.13}$$

Zu nullter und erster Ordnung in S gilt damit wegen $T^c_{(\mathrm{tree})}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ und $T^c_{(\mathrm{tree})}(S) = S$

$$\Gamma_T(\mathbb{1}) = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_T(S) = S. \tag{A.14}$$

Außerdem gilt

$$T^c(e_\otimes^{iS/\hbar} \otimes F) = T^c_{\mathrm{tree}}\Big(e_\otimes^{i\Gamma_T(e_\otimes^S)/\hbar} \otimes \Gamma_T(e_\otimes^S \otimes F)\Big) \tag{A.15}$$

was für $S = 0$

$$\Gamma_T(\mathbb{1} \otimes F) = F \tag{A.16}$$

liefert.

Um das Verhalten von $\Gamma_T(e_\otimes^S)$ als Potenzreihe in $\hbar$ zu erkennen, entwickeln wir (A.13) zu n-ter Ordnung in S. Es gilt

$$\Big(\frac{i}{\hbar}\Big)^n T^c_n(S^{\otimes n}) = \frac{i}{\hbar}\Gamma_T(S^{\otimes n}) + \Big(\frac{i}{\hbar}\Big)^n T^c_{\mathrm{tree},n}(S^{\otimes n}) + \sum_{\substack{\sum_i k_i = n \\ l<n}} C\Big(\frac{i}{\hbar}\Big)^l T^c_{\mathrm{tree},l}\big(\Gamma_T(S^{k_1}) \otimes \cdots \otimes \Gamma_T(S^{k_l})\big) \tag{A.17}$$

mit einem kombinatorischen Faktor $C \in \mathbb{Q}$. Wegen $T^c_k(S^{\otimes k}) - T^c_{\mathrm{tree},k}(S^{\otimes k}) = \mathcal{O}(\hbar^k)$ (siehe (A.9)) erhalten wir damit per Induktion über n das gewünschte Resultat

$$\Gamma_T(e_\otimes^S) = S + \mathcal{O}(\hbar) \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_T(e_\otimes^S \otimes F) = F + \mathcal{O}(\hbar). \tag{A.18}$$

Anhang B

Das Quantenwirkungsprinzip

Wir notieren auf der Grundlage von [8] die zentralen Aussagen des Quantenwirkungsprinzips im Rahmen des funktionalen Zugangs zur Quantenfeldtheorie. Zu Details verweisen wir den Leser auf [8] und die darin angegebene weiterführende Literatur.

Das folgende bezieht sich auf Theorien mit einer gewissen Klasse von Feldern $\{\phi_i\}$ auf einer D-dimensionalen euklidischen Raumzeit. Im funktionalen Zugang zur störungstheoretischen Quantenfeldtheorie sind die zentralen Objekte die *Greens-Funktionen*, d.h. Vakuumserwartungswerte von zeitgeordneten Produkten von Feldoperatoren:

$$G_{i_1\cdots i_N}(x_1,\ldots,x_N) = \langle T\phi_{i_1}(x_1)\cdots\phi_{i_N}(x_N)\rangle. \tag{B.1}$$

Das erzeugende Funktional $Z(J)$ der Greens-Funktionen ist eine formale Potenzreihe in den "klassischen Quellen" $J^i \in \mathcal{S}$ (Schwartz-Funktionen).

$$Z(J) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1/\hbar)^N}{N!} \int dx_1\cdots dx_N\, J^{i_1}(x_1)\cdots J^{i_N}(x_N) G_{i_1\cdots i_N}(x_1,\ldots,x_N). \tag{B.2}$$

$Z(J)$ ergibt sich formal aus dem Feynman'schen Pfadintegral

$$Z(J) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, e^{-\frac{1}{\hbar}\left(S(\phi)+\int dx J^i(x)\phi_i(x)\right)} \tag{B.3}$$

mit einem i.a. nicht definierten Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ und der klassischen Wirkung $S(\phi) = S_0(\phi) + S_{\text{int}}(\phi)$.

Greens-Funktionen lassen sich durch (i.a. nichtzusammenhängende) Graphen darstellen. Die Bausteine dieser Graphen lassen sich durch zwei weitere erzeugende Funktionale charakterisieren: das erzeugende Funktional $Z^c(J)$ der zusammenhängenden Graphen der Greens-Funktionen, definiert durch

$$Z(J) = e^{-\frac{1}{\hbar}Z^c(J)}, \tag{B.4}$$

und das erzeugende Funktional $\Gamma(\phi^{\text{class}})$ der 1-Teilchen-irreduziblen (1PI) Graphen (Vertex-Funktional) definiert als Legendre-Transformierte von $Z^c(J)$, d.h.

$$\Gamma(\phi^{\text{class}}) = Z^c(J) - \int dx\, J^i(x)\phi_i(x)\Big|_{\phi_i(x)=\frac{\delta Z^c}{\delta J^i(x)}} \tag{B.5}$$

wobei auf der rechten Seite $J(x)$ ersetzt wird durch die Lösung $J(\phi)(x)$ der Gleichung $\phi_i(x) = \frac{\delta Z^c}{\delta J^i(x)}$. Im folgenden wird der Index "class" unterdrückt. Für das Vertex-Funktional gilt die Entwicklung $\Gamma(\phi) = S(\phi) + \mathcal{O}(\hbar)$ weshalb $\Gamma(\phi)$ auch als *effektive Wirkung* bezeichnet wird.

Bei der Betrachtung von Symmetrien in der Quantenfeldtheorie treten auch Greens-Funktionen von zusammengesetzten Feldoperatoren $Q^p(x)$ auf. Die Feldoperatoren $Q^p(x)$ sind Quantenversionen der zugehörigen klassischen lokalen Feldpolynome $Q^p_{\text{class}}(x)$. Ausgehend von einer, von zusätzlichen "äußeren Feldern" $\rho_p(x)$ abhängigen, neuen Wechselwirkung $S_{\text{int}}(\phi,\rho) \stackrel{\text{def}}{=} S_{\text{int}}(\phi) + \int dx\, \rho_p(x) Q^p_{\text{class}}(x)$ ergeben sich neue erzeugende Funktionale $Z(J,\rho)$ und $Z^c(J,\rho)$ von (zusammenhängenden) Greens-Funktionen mit zusätzlichen Einträgen $Q^p(x)$ definiert durch

$$
\begin{aligned}
Z(J,\rho) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(-1/\hbar)^N}{N!} \frac{(-1/\hbar)^M}{M!} \int dx_1 \cdots dx_N \int dy_1 \cdots dy_M \, J^{i_1}(x_1) \cdots J^{i_N}(x_N) \\
\times \quad \rho_{p_1}(y_1) \cdots \rho_{p_M}(y_M) \langle T \phi_{i_1}(x_1) \cdots \phi_{i_N}(x_N) Q^{p_1}(y_1) \cdots Q^{p_M}(y_M) \rangle
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

und

$$
Z(J,\rho) = e^{-\frac{1}{\hbar} Z^c(J,\rho)}. \tag{B.7}
$$

Die Legendre-Transformation bezüglich J liefert ein neues Vertex-Funktional $\Gamma(\phi,\rho)$ abhängig von den klassischen Feldern ϕ_i und den (klassischen) äußeren Feldern ρ_p. Das Funktional

$$
Q^p(y) \cdot \Gamma(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta \Gamma(\phi,\rho)}{\delta \rho_p(y)} \Big|_{\rho=0} \tag{B.8}
$$

erzeugt 1PI-Greens-Funktionen mit genau einer Einsetzung ("insertion") von $Q^p(y)$ und stimmt zu unterster Ordnung in $\hbar$ mit dem zugehörigen klassischen Feldpolynom überein, d.h. es gilt die Entwicklung

$$
Q^p(y) \cdot \Gamma(\phi) = Q^p_{\text{class}}(y) + \mathcal{O}(\hbar). \tag{B.9}
$$

Im allgemeinen involvieren die Greens-Funktionen divergente Integrale (UV-Divergenzen). Durch die Anwendung eines gewissen Renormierungsverfahrens werden diese beseitigt und man erhält endliche Ausdrücke für die Greens-Funktionen mit einer verbleibenden endlichen Renormierungsfreiheit, die durch eine Umdefinition der physikalischen Parameter (Masse, Ladung, Kopplungskonstanten,...) ausgedrückt werden kann.

Symmetrien der klassischen Wirkung werden in der Quantenfeldtheorie durch Ward-Identitäten ausgedrückt. Sei die klassische Wirkung $S(\phi)$ invariant unter Anwendung eines infinitesimalen Symmetrieoperators δ

$$
\delta S(\phi) = 0, \tag{B.10}
$$

so lautet die entsprechende Ward-Identität im Fall einer linearer Symmetrietransformation

$$
\delta \Gamma(\phi). \tag{B.11}
$$

Im allgemeinen werden die Symmetrien der klassischen Theorien beim Prozess der Renormierung durch die UV-Subtraktionen gebrochen. Die entscheidende Frage lautet damit, ob renormierte Greens-Funktionen konstruiert werden können, die zu allen Ordnungen die jeweiligen Ward-Identitäten erfüllen. Das entscheidende Hilfsmittel zur Beantwortung dieser Frage liefert das Quantenwirkungsprinzip [7, 6]. Es macht ein Aussage über die Verletzung gewisser Ward-Identitäten in Form lokaler Anomalie-Terme und führt die Frage der Erfüllbarkeit gewisser Ward-Identitäten auf ein algebraisches (meist kohomologisches) Problem zurück. Dies ist Gegenstand der *algebraischen Renormierungsmethode*.

Es existieren verschiedene Formulierungen des Quantenwirkungsprinzips, je nach den Größen, in denen die Greens-Funktionen variiert werden. Wir beschränken uns hier auf eine Version, die sich auf Variationen der Felder im Vertex-Funktional bezieht. Bezeichne $\Gamma = \Gamma(\phi_i, \rho_p)$ das Vertex-Funktional einer Theorie mit klassischer Wirkung $S_{\mathrm{ges}} = S_{\mathrm{ges}}(\phi_i, \rho_p)$ zu Feldern ϕ_i der UV-Dimension d_{ϕ_i} und äußeren Feldern ρ_p gekoppelt an Feldpolynome Q^p der UV-Dimension d_{Q^p}. Dann gilt:

Feldgleichung:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_i(x)} = \Delta^i(x) \cdot \Gamma \tag{B.12}$$

mit *lokalen* Einsetzungen $\Delta^i(x)$ der maximalen UV-Dimension $D - d_{\phi_i}$ und der Entwicklung

$$\Delta^i(x) \cdot \Gamma = \frac{\delta S_{\mathrm{ges}}}{\delta \varphi_i(x)} + \mathcal{O}(\hbar). \tag{B.13}$$

Nichtlineare Variationen der Felder:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \rho_p(x)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_i(x)} = \Delta^{ip}(x) \cdot \Gamma \tag{B.14}$$

mit *lokalen* Einsetzungen $\Delta^{ip}(x)$ der maximalen UV-Dimension $D - d_{\phi_i} + d_{Q^i}$ und der Entwicklung

$$\Delta^{ip}(x) \cdot \Gamma = \frac{\delta S_{\mathrm{ges}}}{\delta \rho_p(x)} \frac{\delta S_{\mathrm{ges}}}{\delta \varphi_i(x)} + \mathcal{O}(\hbar). \tag{B.15}$$

Anhang C

Kohomologien und Absteigegleichungen

Im folgenden notieren wir wichtige Definitionen und allgemeine Aussagen im Zusammenhang mit (Relativ-) Kohomologien und ihrer Bestimmung. Wir folgen dabei überwiegend [8] und verweisen den Leser zu Details auch auf die ausführliche Arbeit [9].

Der Rahmen zur Betrachtung von Relativkohomologien wird gegeben durch einen zweifach graduierten (linearen) Raum $\mathfrak{F}$ und zwei nilpotente und antivertauschende (lineare) Korandoperatoren $s : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ und $d : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$, d.h.

$$s^2 = 0 = d^2 \qquad \text{sowie} \qquad sd + ds = 0. \tag{C.1}$$

Wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{F}$ in Anlehnung an die typischen Anwendungen als *Formen* und schreiben ω_q^p für eine Form mit definiertem Grad (q, p). Die Wirkung von s bzw. d erhöhe den Grad q bzw. p jeweils um eins. Der Grad p sei beschränkt auf die Werte $0 \leq p \leq D$ zu fixiertem $D \in \mathbb{N}$. In den Anwendungen in Kapitel 5 ist $\mathfrak{F}$ der Raum der lokalen Formen $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$ zu $D = d$ mit den Graduierungen Geistzahl g und Formengrad f sowie dem freien BRST-Differential s_0 und dem äußeren Differential d als Korandoperatoren.

Wir führen zunächst den Begriff der Kohomologie des Korandoperators s ein:

Definition C.1. Eine Form $\omega \in \mathfrak{F}$ heißt *s-geschlossen* wenn gilt

$$s\omega = 0, \tag{C.2}$$

und *s-exakt* wenn eine Form $\eta \in \mathfrak{F}$ existiert, so dass gilt

$$\omega = s\eta. \tag{C.3}$$

Die *Kohomologie* $H(s)$ von s ist die Menge der Äquivalenzklassen s-geschlossener Formen mit der Äquivalenzrelation

$$\omega \sim \omega' \quad \Longleftrightarrow \quad \omega - \omega' = s\eta \quad \text{für} \quad \eta \in \mathfrak{F}. \tag{C.4}$$

$H(s)$ erbt in natürlicher Weise von $\mathfrak{F}$ eine zweifache Graduierung. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen in $H(s)$ mit definiertem Grad (q,p) mit $H_q^p(s)$.

Wegen $s^2 = 0$ ist offensichtlich jede s-exakte Form $\omega \in \mathfrak{F}$ auch s-geschlossen. Die Kohomologie von s gibt eine Antwort auf die naheliegende Frage: ist jede s-geschlossene Form $\omega \in \mathfrak{F}$ auch s-exakt? Diese Frage kann genau dann positiv beantwortet werden, wenn die Kohomologie von s trivial ist, also nur aus der Äquivalenzklasse der Null in $\mathfrak{F}$ besteht.

Der Begriff der Relativkohomologie hängt eng mit dem Begriff der Absteigegleichungen zusammen:

Definition C.2. Eine *s-Leiter* Ω_Q^P zu fixierten Q und P ist eine Menge von Formen

$$\Omega_Q^P = \{\omega_{Q-p}^p \in \mathfrak{F}, 0 \leq p \leq P\}, \tag{C.5}$$

welche die *Absteigegleichungen*

$$\begin{aligned} s\omega_{Q-P}^P + d\omega_{Q-P+1}^{P-1} &= 0 \\ s\omega_{Q-P+1}^{P-1} + d\omega_{Q-P+2}^{P-2} &= 0 \\ &\vdots \\ s\omega_{Q-1}^1 + d\omega_Q^0 &= 0 \\ s\omega_Q^0 &= 0 \end{aligned} \tag{C.6}$$

erfüllen.

Eine s-Leiter Ω_Q^P heißt *trivial*, falls eine Menge von Formen $\{\hat{\omega}_{Q-1-p}^p \in \mathfrak{F}, 0 \leq p \leq P\}$ existiert, so dass gilt

$$\begin{aligned} \omega_{Q-P}^P &= s\hat{\omega}_{Q-P-1}^P + d\hat{\omega}_{Q-P}^{P-1} \\ \omega_{Q-P+1}^{P-1} &= s\hat{\omega}_{Q-P}^{P-1} + d\hat{\omega}_{Q-P+1}^{P-2} \\ &\vdots \\ \omega_Q^0 &= s\hat{\omega}_{Q-1}^0. \end{aligned} \tag{C.7}$$

Zwei s-Leitern Ω_Q^P und $\tilde{\Omega}_Q^P$ heißen *äquivalent*, falls ihre Differenz eine triviale s-Leiter darstellt. Die Elemente der *Relativkohomologie* $H(s|d)$ von s modulo d sind die zugehörigen Äquivalenzklassen im Raum der s-Leitern.

$H(s|d)$ erbt von $\mathfrak{F}$ wieder eine zweifache Graduierung. Wir bezeichnen mit $H_q^p(s|d)$ die Menge der Äquivalenzklassen in $H(s|d)$ vom Grad (q,p).

Die Bestimmung der Relativkohomologie $H(s|d)$ beläuft sich also auf die Lösung der Absteigegleichungen (C.6). Dazu steht folgendes allgemeine Verfahren zu Verfügung:

Zunächst sucht man eine Lösung für das Ende einer s-Leiter Ω_Q^P

$$s\omega_Q^0 = 0. \tag{C.8}$$

Die Lösungen dieser Gleichung liegen in der Kohomologie $H^0_Q(s)$ von s zum Grad $(Q,0)$. Eine allgemeine Lösung zur Klasse $[\tau^0_Q] \in H^0_Q(s)$ lautet

$$\omega^0_Q = \tau^0_Q + s\eta^0_{Q-1}. \tag{C.9}$$

Einsetzen dieser Lösung in die Absteigegleichung (C.6) vom Grad $p = 1$ liefert unter Verwendung von $sd + ds = 0$

$$s(\omega^1_{Q-1} - d\eta^0_{Q-1}) + d\tau^0_Q = 0. \tag{C.10}$$

Zur Lösung dieser Gleichung ist die Existenz einer Form $\tilde{\tau}^1_{Q-1}$ erforderlich, so dass

$$d\tau^0_Q + s\tilde{\tau}^1_{Q-1} = 0. \tag{C.11}$$

Damit lautet (C.10)

$$s(\omega^1_{Q-1} - d\eta^0_{Q-1} - \tilde{\tau}^1_{Q-1}) = 0 \tag{C.12}$$

was auf die Notwendigkeit der Bestimmung von $H^1_{Q-1}(s)$ führt. Eine allgemeine Lösung für ω^1_{Q-1} zur Klasse $[\tau^1_{Q-1}] \in H^1_{Q-1}(s)$ lautet

$$\omega^1_{Q-1} = \tilde{\tau}^1_{Q-1} + \tau^1_{Q-1} + d\eta^0_{Q-1} + s\eta^1_{Q-2}. \tag{C.13}$$

Dieses Verfahren kann iterativ fortgesetzt werden und führt prinzipiell zu einer Lösung der Absteigegleichungen (C.6). Die entstehende s-Leiter bricht ab, falls entweder der maximale Formengrad D erreicht wird, oder eine der nötigen Lösbarkeitsbedingungen von der Form (C.11) nicht erfüllbar sind.

Voraussetzung für die Durchführbarkeit dieses Verfahrens zur Lösung der Absteigegleichungen ist die Kenntnis der Kohomologie $H(s)$. Hinsichtlich der Anwendung in Abschnitt 5.3.3 benötigen wir also konkrete Einsicht in die Kohomologie des freien BRST-Differentials s_0 in $\Omega(\mathbb{M}, \mathcal{P})$. Dazu genügt es in anbetracht von (5.64) die Kohomologie von s_0 in $\mathcal{P}$ zu bestimmen. Wir verwenden folgende zentrale Aussage der Kohomologietheorie:

Satz C.3 (Kontrahierbare Paare). *Sei (u, v) mit $u, v \in \mathfrak{F}$ ein bezüglich s* kontrahierbares Paar, *d.h. es gelte*

$$su = v \quad und \quad sv = 0. \tag{C.14}$$

Dann hängt die Kohomologie von s nicht von u und v ab, d.h. in jeder Äquivalenzklasse von $H(s)$ lässt sich ein Repräsentant finden, der nicht von u und v abhängt.

Zum Beweis verweisen wir den Leser auf [8], p.64.

Wie aus der Definition (5.24) von s_0 auf $\mathcal{P}$ ersichtlich wird, bilden $\tilde{u}^a$ und B^a für alle $a \in \underline{N}$ ein kontrahierbares Paar bezüglich s_0. Damit lassen sich die Elemente der Kohomologie $H(s_0)$ durch Polynome in den verbleibenden Feldern A^a_μ und u^a sowie deren partiellen Ableitungen ausdrücken. Durch die Wahl spezieller Generatoren der Unteralgebra von $\mathcal{P}$, die von diesen Polynomen aufgespannt wird, reduzieren sich die möglichen Kandidaten für $H(s_0)$ weiter. Wir betrachten die Generatoren

$$\partial_{\nu_1\cdots(\nu_l} A^a_{\mu)} \quad , \quad \partial_{\nu_1\cdots\nu_l\mu} u^a \tag{C.15}$$

$$u^a \quad , \quad \partial_{\nu_1\cdots\nu_{l-1}} F^a_{\nu_l\mu} \tag{C.16}$$

für $l > 0$, mit der Bezeichnung $(\cdots)$ für vollständige Symmetrisierung der Einträge und $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu$, sowie $\partial_{\nu_1,\ldots,\nu_l} \equiv \partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_l}$. Wie wieder aus der Definition (5.24) von s_0 auf $\mathcal{P}$ hervorgeht, bilden die Generatoren (C.15) jeweils zu festem l kontrahierbare Paare bezüglich s_0, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} s_0\partial_{\nu_1\cdots(\nu_l}A^a_{\mu)} &= \partial_{\nu_1\cdots\nu_l\mu}u^a \\ s_0\partial_{\nu_1\cdots\nu_l\mu}u^a &= 0. \end{aligned}$$

Damit können alle Polynome die ein Element aus (C.15) enthalten aus der kohomologischen Analyse von s_0 eliminiert werden.

Da u und $F_{\mu\nu}$ s_0-geschlossen aber nicht s_0-exakt sind erhalten wir schließlich das Resultat:

Satz C.4. *Die Kohomologie $H(s_0)$ des freien BRST-Differentials s_0 in $\mathcal{P}$ wird erzeugt von den Elementen u und $\partial_{\nu_1\cdots\nu_l}F^a_{\mu\nu}$ für $l \geq 0$.*

Literaturverzeichnis

[1] Dütsch, M. und Boas, F. M. "The master Ward identity". *Rev. Math. Phys.* **14** (2002) 977.

[2] Faddeev, L. D. und Popov, V. N. "Feynman diagrams for the Yang-Mills field". *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29–30.

[3] Becchi, C., Rouet, A. und Stora, R. "Renormalization of the abelian Higgs-Kibble Model". *Commun. Math. Phys.* **42** (1975) 127–162.

[4] Becchi, C., Rouet, A. und Stora, R. "Renormalization of gauge theories". *Annals Phys.* **98** (1976) 287–321.

[5] Tyutin, I. V. "Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism" LEBEDEV-75-39.

[6] Lam, Y.-M. P. "Perturbation Lagrangian theory for scalar fields: Ward- Takahasi identity and current algebra". *Phys. Rev.* **D6** (1972) 2145–2161.

[7] Lowenstein, J. H. "Differential vertex operations in Lagrangian field theory". *Commun. Math. Phys.* **24** (1971) 1–21.

[8] Piguet, O. und Sorella, S. P. *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*, vol. M28 of *Lect. Notes Phys.*. 1995.

[9] Barnich, G., Brandt, F. und Henneaux, M. "Local BRST cohomology in gauge theories". *Phys. Rept.* **338** (2000) 439–569.

[10] Dütsch, M. und Fredenhagen, K. "Algebraic quantum field theory, perturbation theory, and the loop expansion". *Commun. Math. Phys.* **219** (2001) 5–30.

[11] Bogoliubov, N. und Shirkov, D. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. New York, (1959).

[12] Epstein, H. und Glaser, V. "The Role of locality in perturbation theory". *Annales Poincare Phys. Theor.* **A19** (1973) 211.

[13] Brunetti, R. und Fredenhagen, K. "Microlocal analysis and interacting quantum field theories: Renormalization on physical backgrounds". *Commun. Math. Phys.* **208** (2000) 623–661.

[14] Hollands, S. und Wald, R. M. "Conservation of the stress tensor in interacting quantum field theory in curved spacetimes". *Rev. Math. Phys.* **17** (2005) 227–312.

[15] Kugo, T. und Ojima, I. "Local covariant operator formalism of nonabelian gauge theories and quark confinement problem". *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **66** (1979) 1.

[16] Dütsch, M. und Fredenhagen, K. "Deformation stability of BRST-quantization". *AIP Conf. Proc.* **453** (1998) 324–333.

[17] Scharf, G. *Quantum gauge theories: A true ghost story*. New York, USA: Wiley (2001) 245 p.

[18] Duetsch, M. und Scharf, G. "Perturbative gauge invariance: The electroweak theory". *Annalen Phys.* **8** (1999) 359–387.

[19] Aste, A. W., Scharf, G. und Duetsch, M. "Electroweak theory without spontaneous symmetry breaking. II". *Annalen Phys.* **8** (1999) 389–404.

[20] Dütsch, M. und Fredenhagen, K. "A local (perturbative) construction of observables in gauge theories: The example of QED". *Commun. Math. Phys.* **203** (1999) 71–105.

[21] Dütsch, M. und Fredenhagen, K. "The master Ward identity and generalized Schwinger-Dyson equation in classical field theory". *Commun. Math. Phys.* **243** (2003) 275–314.

[22] Dütsch, M. und Fredenhagen, K. "Causal perturbation theory in terms of retarded products, and a proof of the Action Ward identity" (2004).

[23] Dütsch, M. und Fredenhagen, K. "Perturbative algebraic field theory, and deformation quantization" (2000).

[24] Haag, R. *Local quantum physics: Fields, particles, algebras*. Berlin, Germany: Springer (1992) 356 p. (Texts and monographs in physics).

[25] Peierls, R. "The commutation laws of relativistic field theory". *Proc. Roy. Soc.(London) A* **214** (1952) 143.

[26] Glaser, V., Lehmann, H. und Zimmermann, W. "Field Operators and Retarded Functions". *Nuovo Cimen.* **6** (1957) 1122.

[27] Stora, R. "Pedagogical Experiments in Renormalized Perturbation Theory". In "Contribution to Conference 'Theory of Renormalization and Regularization"', Hesselberg, Germany, 2002. http://wwwthep.physik.uni-mainz.de/∼scheck/.

[28] Waldmann, S. “Deformation quantization: Observable algebras, states and representation theory” (2003).

[29] Steinmann, O. *Perturbative Expansion in axiomatic field theory*, vol. 11 of *Lect. Notes Phys.*. 1971.

[30] Steinmann, O. *Perturbative quantum electrodynamics and axiomatic field theory*. Berlin, Germany: Springer (2000) 355 p.

[31] Bresser, K., Pinter, G. und Prange, D. “Lorentz invariant renormalization in causal perturbation theory” (1999).

[32] Prange, D. “Lorentz covariance in Epstein-Glaser renormalization” (1999).

[33] Scharf, G. *Finite quantum electrodynamics: The Causal approach*. Berlin, Germany: Springer (1995) 409 p. (Texts and monographs in physics).

[34] Stora, R. “Lagrangian Field Theory”. In DeWitt, C. (Ed.) “Particle Physics. Summer school of theoretical physics”, Les Houches, France, 1971.

[35] Breitenlohner, P. und Maison, D. “Dimensional renormalization and the action principle”. *Commun. Math. Phys.* **52** (1977) 11–38.

[36] Barnich, G., Henneaux, M. und Tatar, R. “Consistent interactions between gauge fields and the local BRST cohomology: The Example of Yang-Mills models”. *Int. J. Mod. Phys.* **D3** (1994) 139–144.

[37] Boas, F.-M. “Gauge theories in local causal perturbation theory” (1999).

[38] Hurth, T. und Skenderis, K. “Quantum Noether method”. *Nucl. Phys.* **B541** (1999) 566–614.

[39] Henneaux, M. und Teitelboim, C. “Quantization of gauge systems” Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 520 p.

[40] Barnich, G., Henneaux, M., Hurth, T. und Skenderis, K. “Cohomological analysis of gauge-fixed gauge theories”. *Phys. Lett.* **B492** (2000) 376–384.

[41] Bertlmann, R. A. *Anomalies in quantum field theory*. Oxford, UK: Clarendon (1996) 566 p. (International series of monographs on physics: 91).

[42] Piguet, O. und Rouet, A. “Symmetries in perturbative quantum field theory”. *Phys. Rept.* **76** (1981) 1.

[43] Dütsch, M. und Fredenhagen, K. “Perturbative renormalization and BRST” (2004). hep-th/0411196.

[44] Bleecker, D. *Gauge theory and variational principles*. Reading, Usa: Addison-wesley (1981) 179 P. (Global Analysis, Pure and Applied, 1).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Fredenhagen und Michael Dütsch für die interessante Aufgabenstellung sowie die zahlreichen und bereichernden Diskussionen und Hilfestellungen herzlich danken. Der ganzen Arbeitsgruppe und im besonderen Jochen Zahn danke ich für anregende Gespräche und eine angenehme Atmosphäre. Dass die Zeit der Diplomarbeit zu einem der schönsten Abschnitte meines Studiums wurde, habe ich vor allem Joachim Brod, Tobias Gauer, Christian Sommer, Tobias Kasprzik und Felix Reszewski zu verdanken. Für die unzähligen Gespräche und den herzlichen Umgang danke ich ihnen ganz besonders. Schließlich gilt mein tiefer Dank meinen Eltern, ohne deren Unterstützung und Beistand mir ein sorgenfreies Studium nie möglich gewesen wäre.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Ferdinand Brennecke