

Das Zeitschichtaxiom in wechselwirkenden
Quantenfeldtheorien auf global hyperbolischen
Raumzeiten

Bruno Chilian

Diplomarbeit
II. Institut für Theoretische Physik
Department Physik
UNIVERSITÄT HAMBURG

März 2008

Gutachter der Diplomarbeit:

Prof. Dr. K. Fredenhagen

Prof. Dr. V. Schomerus

Abstract

This diploma thesis gives a proof of the validity of the time slice axiom in perturbative algebraic scalar quantum field theory on curved spacetime. For this purpose the validity of the time slice axiom is first established for the extended Wick-polynomial algebra. The investigations are carried out within the functorial description of quantum field theory.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms in störungstheoretisch konstruierten algebraischen skalaren Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten bewiesen. Dazu wird zunächst die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms in der erweiterten Algebra der Wick-Polynome gezeigt. Die Untersuchungen erfolgen vor dem Hintergrund der funktoriellen Formulierung der Quantenfeldtheorie.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Einführung in die algebraische Quantenfeldtheorie	9
2.1	Die Struktur global hyperbolischer Raumzeiten	9
2.2	Die Haag-Kastler-Axiome	11
2.3	Funktorielle Beschreibung	12
2.3.1	Induktiver Limes	14
2.3.2	Die Algebra einer Cauchy-Fläche: Der inverse Limes . .	15
2.3.3	Lokal kovariante Felder	17
2.3.4	Relevanz des Zeitschichtaxioms für die Theorie der Quantengravitation	19
2.4	Das freie skalare Feld	20
2.4.1	Konstruktion der Algebra des freien Feldes	20
2.4.2	Die freie Algebra einer Cauchy-Fläche	22
2.5	Zustände	25
2.6	Wick-Polynome	27
2.6.1	Definition der Algebra \mathfrak{W}	28
2.6.2	Abstrakte Darstellung der Wick-Polynome	29
2.6.3	Die Wick-Polynome als kovarianter Funktor	31
2.6.4	Wickpotenzen	32
2.7	Wechselwirkende Theorien	33
2.7.1	Kausale Störungstheorie	33
2.7.2	Die Algebra der wechselwirkenden Felder	37
3	Beweis des Zeitschichtaxioms für die Wick-Polynome	40
3.1	Die Cauchy-Entwicklung von Distributionen	40
3.2	Der Beweis	41
4	Beweis des Zeitschichtaxioms in wechselwirkenden Theorien	46
4.1	Rückführung auf die Aussage $\mathfrak{A}_0(N) \subset \mathfrak{A}_g(N)$	46
4.2	Der Beweis	48
5	Zusammenfassung und Ausblick	52

A	Einige Grundbegriffe der Kategorientheorie	53
A.1	Kategorien und Funktoren	53
A.2	Natürliche Transformationen	55
A.3	Kolimes und Limes	56
B	Grundbegriffe der mikrolokalen Analysis	61
B.1	Die Wellenfrontmenge	61
B.2	Das Produkt von Distributionen und die Ausbreitung von Singularitäten	64
C	Kausalitätsbeziehungen in global hyperbolischen Raumzeiten	67
	Literaturverzeichnis	69
	Danksagung	73

Kapitel 1

Einleitung

Eine zentrale Fragestellung in der Physik lautet: Kann man aus der Kenntnis von Messgrößen in der Gegenwart Vorhersagen über die Ergebnisse zukünftiger Messungen ableiten? In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage im Rahmen der Quantenfeldtheorie untersucht.

Die Quantenfeldtheorie ist die Theorie der Hochenergie- und Teilchenphysik. Die experimentellen Ergebnisse aus diesem Bereich werden von ihr mit großer Präzision beschrieben. Darüber hinaus besteht die Hoffnung, durch die Vereinigung der Quantenfeldtheorie mit der allgemeinen Relativitätstheorie eine vereinheitlichte fundamentale Theorie der Natur zu schaffen.

Aufgrund dieser großen Erfolge ist es interessant zu untersuchen, inwiefern die Vorhersagbarkeit in der Quantenfeldtheorie realisiert ist. Um solch eine strukturelle Frage zu behandeln, ist der Rahmen der algebraischen Quantenfeldtheorie besonders geeignet. Dabei handelt es sich um eine mathematisch rigorose Formulierung, deren zentrale Objekte die lokalen Observablenalgebren der Raumzeitregionen sind. Einer ihrer Vorteile ist, dass algebraische Quantenfeldtheorien auf gekrümmten Raumzeiten definiert werden können. Dies ist ein erster Schritt in Richtung einer Vereinigung mit der allgemeinen Relativitätstheorie. Da auf gekrümmten Raumzeiten die Konstruktion von Quantenfeldtheorien mit Mehrdeutigkeiten behaftet ist, charakterisiert man die Theorie zunächst durch Axiome, die physikalisch motiviert sind. Man versucht dann, eine Theorie zu konstruieren, die diesen Axiomen genügt und deren Mehrdeutigkeiten man versteht und interpretieren kann. Daher spricht man auch von axiomatischer Quantenfeldtheorie. Auf diesen Rahmen bezogen lautet die Fragestellung also, ob man in konsistenter Weise ein Axiom aufstellen kann, welches die Vorhersagbarkeit der Zukunft aus der Gegenwart fordert.

Es existiert eine moderne Formulierung der algebraischen Quantenfeldtheorie, welche Begriffe aus der Kategorientheorie verwendet. Ihr Vorteil ist, dass die Struktur der Theorie noch klarer hervortritt. Diese Arbeit ist daher vor dem Hintergrund der kategoriellen Formulierung verfasst.

In physikalischen Theorien, deren Zeitentwicklung durch eine Bewegungsgleichung festgelegt ist, ist die Frage der Vorhersagbarkeit der Zukunft aus der Gegenwart äquivalent zum Anfangswertproblem dieser Gleichung. In der Quantenfeldtheorie ist die Situation komplizierter. Die Bewegungsgleichung, hier Feldgleichung genannt, enthält im allgemeinen nichtlineare Funktionen der Quantenfelder. Bei diesen handelt es sich jedoch um operatorwertige Distributionen. Potenzen solch singulärer Objekte sind zunächst mathematisch nicht wohldefiniert. Durch die Methoden der Renormierung kann man der Feldgleichung zwar einen präzisen Sinn geben, die renormierte Feldgleichung reicht aber dann nicht mehr aus, um das Problem der Vorhersagbarkeit zu lösen. Eine weitere Komplikation stellt die bloße Formulierung des Anfangswertproblems dar: Da man Distributionen im Allgemeinen nicht auf Untermannigfaltigkeiten einschränken kann, ist zunächst nicht einmal klar, was die Observablen einer Cauchy-Fläche sein sollen. Somit ist es bislang nur in Spezialfällen gelungen, die Fragestellung dieser Arbeit mit Hilfe der Feldgleichung zu beantworten. Wenn die Feldgleichung linear ist, was einer Theorie ohne Wechselwirkungen entspricht, so ist die Feldgleichung von Anfang an wohldefiniert und das Anfangswertproblem kann wie in der klassischen Feldtheorie gelöst werden. Dies wurde zuerst in [15] gezeigt. In zweidimensionalen Modellen, genauer im Yukawa₂-Modell [36] und in $P(\varphi)_2$ -Modellen [19], ist es ebenfalls gelungen, die Vorhersagbarkeit zu zeigen.

In der algebraischen Quantenfeldtheorie hat man daher die Forderung nach einem wohlgestellten Anfangswertproblem durch das sogenannte *Zeitschichtaxiom* ersetzt: Die Observablenalgebra einer beliebigen (global hyperbolischen) Umgebung einer Cauchy-Fläche muss die Observablenalgebra der gesamten Raumzeit enthalten.

Obwohl die algebraische Quantenfeldtheorie seit ihrer Einführung in den sechziger Jahren stetig weiterentwickelt wurde, ist das Zeitschichtaxiom verhältnismäßig wenig behandelt worden. In [21, 22] haben Haag, Kastler und Schroer die sogenannten Haag-Kastler-Axiome aufgestellt, welche die Grundlage der algebraischen Quantenfeldtheorie bilden. Das Zeitschichtaxiom ist eines davon. Diese Autoren haben gezeigt, dass eine rein algebraische Behandlung der Quantenfeldtheorie ohne die Notwendigkeit einer Hilbertraumdarstellung möglich ist.

Eine wichtige Weiterentwicklung der Theorie ist Radzikowski [35] zu verdanken. Er hat gezeigt, dass die von Kay und Wald [31] zuerst rigoros formulierte Hadamard-Bedingung an physikalisch akzeptable Zustände äquivalent ist zu einer Bedingung an die Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktionen dieser Zustände. Diese Ergebnisse sind in der Sprache der mikrolokalen Analysis formuliert, die von Duistermaat und Hörmander [26–28] entwickelt wurde.

Brunetti, Fredenhagen und Köhler haben auf diesen Erkenntnissen aufbauend die sogenannte mikrolokale Spektrumsbedingung aufgestellt [5]. Sie kann als ein Ersatz für die übliche Spektrumsbedingung im Minkowskiraum angesehen werden. Diese ist ein zentrales Instrument bei der Konstruktion von Quantenfeldtheorien. Da es sich bei der mikrolokalen Spektrumsbedingung um ein lokales Konzept handelt, kann sie auch auf gekrümmten Raumzeiten gestellt werden. Die zuletzt genannten Autoren haben gezeigt, dass jeder Hadamard-Zustand die mikrolokale Spektrumsbedingung erfüllt. Damit war es ihnen möglich, eine Algebra von Feldfunktionalen zu konstruieren, die auch die Potenzen der Felder enthält. Diese Algebra ist eine Erweiterung der Algebra des freien Feldes und enthält die Wickpolynome und ihre zeitgeordneten Produkte.

Dies haben Brunetti, Dütsch und Fredenhagen in [3,12] und Hollands und Wald in [23] ausgenutzt, um wechselwirkende algebraische Quantenfeldtheorien störungstheoretisch zu konstruieren. Dabei verwendeten sie eine mikrolokale Version der von Epstein und Glaser [13] entwickelten Renormierungsmethode. Um die Renormierungsfreiheiten zu reduzieren, wurde ein Ersatz für die in Minkowskiraum-Theorien vorhandene Poincaré-Kovarianz benötigt. Die entsprechende Forderung auf gekrümmten Raumzeiten ist das sogenannte Prinzip der lokalen Kovarianz. Dieses verlangt, dass sich die Wickpolynome und ihre zeitgeordneten Produkte unter isometrischen Einbettungen von Raumzeitgebieten kovariant transformieren.

Während Hollands und Wald die Theorie in dieser Richtung weiterentwickelt haben [24, 25], haben Brunetti, Fredenhagen und Verch das Prinzip der lokalen Kovarianz in eine kategorientheoretische Beschreibung der algebraischen Quantenfeldtheorie eingebaut [6]. Mit Hilfe dieser strukturell klaren Formulierung war es Brunetti und Fredenhagen möglich, einen neuen Ansatz für die Behandlung der Quantengravitation zu entwickeln [4]. Für dessen Umsetzung ist die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms von zentraler Bedeutung.

Während der – hier bruchstückhaft dargestellten – Entwicklung der algebraischen Quantenfeldtheorie wurde jedoch der Frage der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms nur relativ wenig Anstrengung gewidmet. Eine Ausnahme ist eine Arbeit von Garber [17], in der er für das verallgemeinerte freie Feld die Äquivalenz des Zeitschichtaxioms zur sogenannten Diamanten-Eigenschaft (engl.: diamond property) zeigt.

Das Ziel dieser Arbeit ist daher der Beweis der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms in skalaren, perturbativ konstruierten Quantenfeldtheorien auf gekrümmter Raumzeit. Die Untersuchungen werden vor dem Hintergrund der kategorientheoretischen Formulierung der algebraischen Quantenfeldtheorie durchgeführt. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit sind in einer gemeinsamen Veröffentlichung mit Fredenhagen zu finden [9].

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Im zweiten Kapitel wird eine Einführung in die algebraische Quantenfeldtheorie gegeben. Der erste Abschnitt enthält die Definitionen der verwendeten Begriffe aus der Theorie global hyperbolischer Raumzeiten. Abschnitt 2.2 stellt die ursprüngliche Formulierung der algebraischen Quantenfeldtheorie durch die Haag-Kastler-Axiome vor. In Abschnitt 2.3 wird die kategorientheoretische (oder funktorielle) Formulierung eingeführt. Zum Abschluss des Abschnitts wird die Bedeutung des Zeitschichtaxioms für den erwähnten neuen Ansatz zur Quantengravitation besprochen. In den darauf folgenden Abschnitten werden die Algebra des freien skalaren Quantenfeldes, der Zustandsbegriff in der algebraischen Quantenfeldtheorie und schließlich die erweiterte Algebra der Wick-Polynome vorgestellt. Im letzten Abschnitt des zweiten Kapitels wird besprochen, wie mit Hilfe der Störungstheorie wechselwirkende algebraische Quantenfeldtheorien konstruiert werden können.

Der Beweis der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms ist auf die Kapitel 3 und 4 aufgeteilt. Im dritten Kapitel wird der Beweis für die Wick-Polynome durchgeführt. Die Ergebnisse werden im vierten Kapitel für den Beweis in wechselwirkenden Theorien benötigt.

Im Anhang finden sich die Definitionen und einige wichtige Zusammenhänge der verwendeten mathematischen Theorie. Zuerst werden Elemente der Kategorietheorie zusammengestellt, die für die funktorielle Formulierung der Quantenfeldtheorie benötigt werden. Dann werden die Grundbegriffe und einige Aussagen der mikrolokalen Analysis angegeben. Zum Schluss werden zwei Hilfssätze in Bezug auf global hyperbolische Raumzeiten bewiesen.

Kapitel 2

Einführung in die algebraische Quantenfeldtheorie

2.1 Die Struktur global hyperbolischer Raumzeiten

In diesem Unterabschnitt werden die elementaren Definitionen und Zusammenhänge angegeben, die in der vorliegenden Arbeit im Zusammenhang mit global hyperbolischen Raumzeiten verwendet werden. Die grundlegenden differentialgeometrischen Definitionen sind in [29] zu finden. Eine gute Übersicht über die physikalischen Begriffe bietet [33].

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Mit $T_x M$ bezeichnet man den Tangentialraum von M am Punkt $x \in M$. Entsprechend ist TM das Tangentialbündel. Der Kotangentialraum am Punkt x wird mit $T_x^* M$ und das Kotangentialbündel mit $T^* M$ bezeichnet. Eine *Lorentzmannigfaltigkeit* ist eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik \mathbf{g} , deren Signatur $(+, -, -, -)$ ist¹. Ein Vektor $k \in T_x M$ heißt *zeitartig*, wenn $\mathbf{g}_x(k, k) > 0$ ist. Entsprechend heißt k *raumartig*, falls $\mathbf{g}_x(k, k) < 0$ und *lichtartig* falls $\mathbf{g}_x(k, k) = 0$. Eine Lorentzmannigfaltigkeit heißt *zeitorientierbar*, falls auf ihr ein überall zeitartiges \mathcal{C}^∞ -Vektorfeld v existiert. Durch Angabe eines solchen ist die Lorentzmannigfaltigkeit *zeitorientiert*. In der Physik werden Ereignisse durch Punkte einer Raumzeit beschrieben. Eine *Raumzeit* ist eine orientierte und zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit. Im Folgenden bezeichne M eine Raumzeit.

Man nennt eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ (mit einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$) in M *kausal*, wenn ihr Tangentialvektor $\gamma'(t)$ für jedes $t \in I$ zeitartig oder lichtartig ist. Eine *zeitartige Kurve* ist dadurch definiert, dass ihr Tangential-

¹Das bedeutet, dass \mathbf{g} ein $(0, 2)$ -Tensorfeld ist, so dass an jedem Punkt $x \in M$ der Tensor \mathbf{g}_x eine nichtentartete symmetrische Bilinearform $\mathbf{g}_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ ist, die drei negative und einen positiven Eigenwert besitzt.

vektor stets zeitartig ist. Der *Vorwärtslichtkegel* an einem Punkt x ist die Menge $V_x^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in T_x M \mid \mathbf{g}_x(v(x), k) > 0\}$ und der *Rückwärtslichtkegel* ist $V_x^- \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in T_x M \mid \mathbf{g}_x(v(x), k) < 0\}$. Eine kausale Kurve γ heißt *zukunftsgerichtet*, falls ihr Tangentialvektor an jedem Punkt im Vorwärtslichtkegel liegt und *vergangenheitsgerichtet*, falls ihr Tangentialvektor an jedem Punkt im Rückwärtslichtkegel liegt. Mit V_\pm wird die Vereinigung $\bigcup_{x \in M} V_x^\pm \subset TM$ aller Vorwärts- bzw. Rückwärtslichtkegel in M bezeichnet.

$J_\pm(N)$ bezeichnet die kausale Zukunft bzw. Vergangenheit einer Teilmenge $N \subset M$, d.h. für jeden Punkt $y \in J_\pm(N)$ existiert ein $z \in N$ und eine glatte, *kausale* (zukunfts- bzw. vergangenheitsgerichtete) Kurve von z nach y . Mit I_\pm wird die chronologische Zukunft bzw. Vergangenheit bezeichnet, d.h. in der obigen Definition wird „kausal“ durch „zeitartig“ ersetzt. Eine Teilmenge $P \subset M$ heißt *vergangenheitskompakt* falls $J_-(x) \cap P$ für jedes $x \in M$ in einer kompakten Menge enthalten ist.

Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *achronal*, falls für kein Paar $(x, y) \in A \times A$ eine zeitartige Kurve existiert, die x und y verbindet. Eine *Cauchy-Fläche* ist eine achronale Hyperfläche von M , die von jeder nicht verlängerbaren kausalen Kurve genau einmal geschnitten wird. Eine Raumzeit M heißt *global hyperbolisch*, falls $J_-(x) \cap J_+(y)$ kompakt ist für alle $x, y \in M$. Geroch hat in [18] gezeigt, dass eine Raumzeit genau dann global hyperbolisch ist, wenn sie eine Cauchy-Fläche besitzt. Darüber hinaus hat er bewiesen, dass es zu jeder global hyperbolischen Raumzeit M eine stetige surjektive Abbildung $t : M \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $t^{-1}(a)$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Cauchy-Fläche ist und t auf jeder zukunftsgerichteten kausalen Kurve monoton wächst. Außerdem haben Bernal und Sánchez in [1] gezeigt, dass jede global hyperbolische Raumzeit eine *glatte* Cauchy-Fläche S besitzt und diffeomorph ist zu $\mathbb{R} \times S$.

Zur Metrik \mathbf{g} auf M sei K der Klein-Gordon-Operator

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \square - \xi R - m^2 \tag{2.1.1}$$

mit $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$. Dabei ist ∇ die durch \mathbf{g} induzierte der kovariante Ableitung. ξ ist die Kopplung an die skalare Krümmung R und m ist die Masse.

2.2 Die Haag-Kastler-Axiome

Das zentrale Objekt in der algebraischen Quantenfeldtheorie ist das Netz² von Observablenalgebren, welches jeder kausal abgeschlossenen, offenen Teilmenge \mathcal{O} des Minkowskiraums³ mit kompaktem Abschluss eine unitale $*$ -Algebra⁴ $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ zuordnet. Damit eine solche Struktur eine physikalische Interpretation zulässt, muss sie gewissen Anforderungen genügen, die als *Haag-Kastler-Axiome* bezeichnet werden [21, 22]. Diese Axiome sollen nun besprochen werden.

- (i) **Isotonie:** Aus $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ folgt $\mathfrak{A}(\mathcal{O}') \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O})$. Außerdem soll es ein gemeinsames Einselement $\mathbf{1}$ geben, welches in jeder lokalen Algebra enthalten ist.
- (ii) **Lokale Kommutativität:** Wenn zwei Gebiete \mathcal{O} und \mathcal{O}' raumartig getrennt sind, dann sollen die zugehörigen Algebren kommutieren:

$$[\mathfrak{A}(\mathcal{O}'), \mathfrak{A}(\mathcal{O})] = 0 .$$

Für die nächsten beiden Axiome benötigt man die Observablenalgebra \mathfrak{A} der gesamten Raumzeit. Da die Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ zunächst nur für Regionen \mathcal{O} mit endlicher Ausdehnung erklärt sind, definiert man \mathfrak{A} als den sogenannten *induktiven Limes*

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O}) \quad (2.2.1)$$

des Netzes. Der induktive Limes ist ein Spezialfall eines allgemeineren Limesbegriffs aus der Kategorientheorie. In Abschnitt 2.3 wird der Zusammenhang mit der funktoriellen Beschreibung von Quantenfeldtheorien hergestellt. In Anhang A werden die genauen Definitionen gegeben.

- (iii) **Kovarianz:** Für jedes $L \in \mathcal{P}_+^\uparrow$, wobei \mathcal{P}_+^\uparrow die eigentliche, orthochrone Poincaré-Gruppe bezeichnet, existiert ein $*$ -Automorphismus α_L von \mathfrak{A} , so dass

$$\alpha_{L_1} \circ \alpha_{L_2} = \alpha_{L_1 \circ L_2} , \quad L_1, L_2 \in \mathcal{P}_+^\uparrow \quad (2.2.2)$$

und

$$\alpha_L (\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(L\mathcal{O}) . \quad (2.2.3)$$

²Ein Netz ist eine verallgemeinerte Folge, genauer: Für eine gerichtete Menge I und eine Menge X ist ein Netz eine Abbildung $x : I \rightarrow X$. Im vorliegenden Fall ist die Indexmenge die Menge der kausal abgeschlossenen, offenen Teilmengen und die Relation (Richtung) ist die mengentheoretische Inklusion.

³Die Haag-Kastler-Axiome wurden für Quantenfeldtheorien im Minkowskiraum aufgestellt. Die weiter unten besprochene funktorielle Darstellung verallgemeinert den axiomatischen Rahmen auf global hyperbolische Raumzeiten.

⁴In den ursprünglichen Haag-Kastler-Axiomen [21, 22] werden C^* -Algebren verlangt. Im Hinblick auf die weiter unten eingeführte Algebra der Wick-Polynome und die darauf aufbauende Störungstheorie wird diese Bedingung hier abgeschwächt.

- (iv) **Primitive Kausalität:** Für eine Umgebung \mathcal{U} einer Cauchy-Fläche und eine beliebige offene, kausal abgeschlossene Menge \mathcal{O} gilt

$$\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{U}) \quad (2.2.4)$$

das heißt, es gilt $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}(\mathcal{U})$.

2.3 Funktorielle Beschreibung

Der durch die Haag-Kastler-Axiome festgelegte Rahmen für algebraische Quantenfeldtheorien kann durch eine funktorielle Formulierung verallgemeinert werden. Dies wurde von Brunetti, Fredenhagen und Verch in [6] zuerst durchgeführt. In diesem Ansatz werden Grundbegriffe aus der Kategorientheorie verwendet, die in Anhang A zusammengefasst sind. Eine umfassende Einführung in die Kategorientheorie bietet [32]. Zunächst wird eine Definition benötigt.

Definition 2.3.1. *Seien M_i , $i = 1, 2$ global hyperbolische Raumzeiten mit Metriken $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$. Eine Abbildung $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ heißt isometrische Einbettung von M_1 in M_2 , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) ψ ist diffeomorph auf sein Bild $\psi(M_1)$ (d.h. die Abbildung $\bar{\psi} : M_1 \rightarrow \psi(M_1) \subset M_2$ ist ein Diffeomorphismus).
- (ii) ψ ist eine Isometrie, d.h. $\psi_* \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 \upharpoonright_{\psi(M_1)}$.
- (iii) ψ erhält die Orientierung und die Zeitorientierung und die kausale Struktur. Letzteres heißt, dass jede kausale Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M_2$ mit $\gamma(a), \gamma(b) \in \psi(M_1)$ ganz in $\psi(M_1)$ liegt, d.h. $\gamma(t) \in \psi(M_1)$ für alle $t \in]a, b[$.

Jetzt werden zwei Kategorien definiert:

Loc: Die Objekte dieser Kategorie sind die vierdimensionalen, global hyperbolischen, orientierten und zeitorientierten Raumzeiten (M, \mathbf{g}) . Die Morphismen sind isometrische Einbettungen $\psi : (M_1, \mathbf{g}_1) \rightarrow (M_2, \mathbf{g}_2)$. Als Komposition von Morphismen wählt man die Komposition von Abbildungen.

Zu Morphismen ψ, ψ' in **Loc** mit $\psi \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_1, \mathbf{g}_1), (M_2, \mathbf{g}_2))$ und $\psi' \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_2, \mathbf{g}_2), (M_3, \mathbf{g}_3))$ ist die Komposition $\psi' \circ \psi : (M_1, \mathbf{g}_1) \rightarrow (M_3, \mathbf{g}_3)$ wieder eine isometrische Einbettung. Also gilt $\psi' \circ \psi \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_1, \mathbf{g}_1), (M_3, \mathbf{g}_3))$. Die Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Komposition von Abbildungen. Als Identität wählt man zu jedem (M, \mathbf{g}) die identische Abbildung $\text{id}_M : x \mapsto x$, $x \in M$. Diese erfüllt offensichtlich die Anforderungen (iii) und (iv) aus Definition A.1.1. Also ist **Loc** eine wohldefinierte Kategorie.

Obs: Die Objekte dieser Kategorie sind die unitalen $*$ -Algebren und die Morphismen sind injektive, die Eins erhaltende $*$ -Homomorphismen. Die Komposition wird wieder als Komposition von Abbildungen gewählt und die Identität ordnet jedem $\mathcal{A} \in \text{Obj}(\mathbf{Obs})$ die identische Abbildung $\text{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ zu. Damit wird auch **Obs** zu einer wohldefinierten Kategorie.

In der funktoriellen Beschreibung wird eine Quantenfeldtheorie nun als kovarianter Funktor aufgefasst:

Definition 2.3.2. (i) Eine **lokal kovariante Quantenfeldtheorie** ist ein kovarianter Funktor \mathcal{A} zwischen **Loc** und **Obs**. Mit der Schreibweise α_{ψ} für $\mathcal{A}(\psi)$ bedeutet dies, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (M, \mathbf{g}) & \xrightarrow{\psi} & (M', \mathbf{g}') \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{A} \\ \mathcal{A}(M, \mathbf{g}) & \xrightarrow{\alpha_{\psi}} & \mathcal{A}(M', \mathbf{g}') \end{array}$$

kommutiert und die Kovarianzeigenschaften

$$\alpha_{\psi'} \circ \alpha_{\psi} = \alpha_{\psi' \circ \psi} \quad , \quad \alpha_{\text{id}_M} = \text{id}_{\mathcal{A}(M, \mathbf{g})} \quad , \quad (2.3.1)$$

für alle Morphismen $\psi \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_1, \mathbf{g}_1), (M_2, \mathbf{g}_2))$, alle Morphismen $\psi' \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_2, \mathbf{g}_2), (M_3, \mathbf{g}_3))$ und alle $(M, \mathbf{g}) \in \text{Obj}(\mathbf{Loc})$ gelten.

(ii) Eine so definierte Quantenfeldtheorie heißt **kausal**, falls gilt: Für zwei Morphismen $\psi_j \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_j, \mathbf{g}_j), (M, \mathbf{g}))$, $j = 1, 2$, für die gilt, dass die Mengen $\psi(M_1)$ und $\psi(M_2)$ in (M, \mathbf{g}) kausal getrennt⁵ sind, gilt

$$\left[\alpha_{\psi_1}(\mathcal{A}(M_1, \mathbf{g}_1)), \alpha_{\psi_2}(\mathcal{A}(M_2, \mathbf{g}_2)) \right] = \{0\} \quad .$$

Dabei bezeichnet $[A, B]$ die Menge $\{AB - BA \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ für jedes Paar von $*$ -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{B} .

(iii) Eine durch den Funktor \mathcal{A} definierte Quantenfeldtheorie erfüllt das **Zeitschichtaxiom**, falls

$$\alpha_{\psi}(\mathcal{A}(M, \mathbf{g})) = \mathcal{A}(M', \mathbf{g}')$$

für alle $\psi \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M, \mathbf{g}), (M', \mathbf{g}'))$, so dass $\psi(M)$ eine Cauchy-Fläche von (M', \mathbf{g}') enthält.

⁵Zwei Gebiete sind kausal getrennt, wenn es keine kausale Kurve gibt die sie verbindet.

Wie in [6] ebenfalls gezeigt wurde, ist der axiomatische Rahmen der Haag-Kastler Axiome in der funktoriellen Formulierung enthalten, das heißt eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie im Sinne von Definition 2.3.2 ist auch eine Quantenfeldtheorie im Sinne der Haag-Kastler-Axiome. Das Zeitschichtaxiom entspricht dem Haag-Kastler-Axiom der primitiven Kausalität. Der Beweis seiner Gültigkeit in perturbativ konstruierten, wechselwirkenden skalaren Quantenfeldtheorien ist der Gegenstand dieser Arbeit. Als eines der fundamentalen Axiome der algebraischen Quantenfeldtheorie ist dieser Beweis einerseits grundsätzlich von Interesse. Andererseits wird im Unterabschnitt 2.3.4 seine Bedeutung für einen neuen Ansatz von Brunetti und Fredenhagen [4] zur Behandlung einer quantisierten Theorie der Gravitation deutlich werden.

2.3.1 Induktiver Limes

Wie in Abschnitt 2.2 angekündigt, soll nun der Begriff des induktiven Limes vor dem Hintergrund der funktoriellen Beschreibung einer Quantenfeldtheorie erläutert werden. In Anhang A wird der Begriff des Kolimes eines Funktors eingeführt. Ein induktiver Limes ist ein Spezialfall eines Kolimes. Ein Funktor \mathcal{A} nach Definition 2.3.2 hat i.A. keinen Kolimes, da die Indexkategorie \mathbf{Loc} keine gerichtete Menge ist. Dies ist auch physikalisch sinnvoll, da in \mathbf{Loc} ja alle global hyperbolischen Raumzeit-Geometrien zusammengefasst sind. Die Observablenalgebra einer *festen* Hintergrundraumzeit (wie z.B. de Sitter, Schwarzschild oder Minkowskiraum) sollte hingegen als induktiver Limes erklärt sein. Tatsächlich kann man als Objekte einer Indexkategorie \mathbf{Loc}_M einfach die offenen, global hyperbolischen Teilmengen der festen Hintergrundraumzeit M wählen und als Morphismen die Inklusionen in größere Teilmengen betrachten. Das bedeutet, zu $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \text{Obj}(\mathbf{Loc}_M)$ mit $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ hat $\text{hom}_{\mathbf{Loc}_M}(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ nun *genau ein Element*, nämlich $\psi_{\mathcal{O}, \mathcal{O}'} = \text{id}_{\mathcal{O}'} \upharpoonright_{\mathcal{O}}$. Schränkt man \mathcal{A} auf diese Kategorie ein, so kann man den induktiven Limes gemäß Anhang A konstruieren:

Man betrachtet die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{\mathcal{O} \in \text{Obj}(\mathbf{Loc}_M)} \mathcal{A}(\mathcal{O}) \equiv \{(\mathcal{O}, F) \mid \mathcal{O} \in \text{Obj}(\mathbf{Loc}_M), F \in \mathcal{A}(\mathcal{O})\} \quad (2.3.2)$$

mit der Äquivalenzrelation

$$\left\{ (\mathcal{O}_1, F) \sim (\mathcal{O}_2, G) \mid \exists \mathcal{O}_3 \in \text{Obj}(\mathbf{Loc}_M) \text{ so dass } \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3, \right. \\ \left. \text{mit } \alpha_{\psi_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_3}}(F) = \alpha_{\psi_{\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_3}}(G) \right\}. \quad (2.3.3)$$

Es gilt $\varinjlim (\mathcal{A} \upharpoonright_{\mathbf{Loc}_M}) = \coprod_{\mathcal{O} \in \text{Obj}(\mathbf{Loc}_M)} \mathcal{A}(\mathcal{O}) / \sim$. Das Produkt ist dann

durch

$$[(\mathcal{O}_1, F)] \cdot [(\mathcal{O}_2, G)] = \left[\left(\mathcal{O}_3, \alpha_{\psi_{\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_3}}(F) \cdot \alpha_{\psi_{\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_3}}(G) \right) \right] \quad (2.3.4)$$

gegeben, wobei \mathcal{O}_3 ein beliebiges Objekt aus \mathbf{Loc}_M ist, für welches $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_3$ und $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3$ gilt. Die Summe ist analog definiert. Die Existenz des Einselements, die Definition der $*$ -Operation und die Universalität dieser Konstruktion wurden in Anhang A gezeigt.

In [6] wurde gezeigt, dass eine funktoriell definierte Quantenfeldtheorie wiederum die Haag-Kastler-Axiome erfüllt. Insbesondere gilt Isotonie, d.h. für $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}''$ gilt wegen der Kovarianzeigenschaft $\alpha_{\psi_{\mathcal{O} \mathcal{O}''}} = \alpha_{\psi_{\mathcal{O}' \mathcal{O}''}} \circ \alpha_{\psi_{\mathcal{O} \mathcal{O}'}}$, dass

$$\alpha_{\psi_{\mathcal{O} \mathcal{O}''}}(\mathcal{A}(\mathcal{O})) = \alpha_{\psi_{\mathcal{O}' \mathcal{O}''}}(\alpha_{\psi_{\mathcal{O} \mathcal{O}'}}(\mathcal{A}(\mathcal{O}))) \subset \alpha_{\psi_{\mathcal{O}' \mathcal{O}''}}(\mathcal{A}(\mathcal{O}')) . \quad (2.3.5)$$

Die Algebra einer Teilmenge eines Gebiets ist also eine Teilmenge der Algebra des ganzen Gebiets. Daher kann man die Konstruktion des induktiven Limes vereinfachen und anstatt der disjunkten Vereinigung die gewöhnliche mengentheoretische Vereinigung der Algebren betrachten. Man muss dann keine Äquivalenzrelation einführen. In diesem Sinne ist die Notation für den induktiven Limes aus Abschnitt 2.2 zu verstehen.

2.3.2 Die Algebra einer Cauchy-Fläche: Der inverse Limes

Es soll nun geklärt werden, was die Observablenalgebra einer Cauchy-Fläche ist. Eine Cauchy-Fläche ist selbst kein Element von \mathbf{Loc} , da sie nicht offen ist. Wenn man eine Quantenfeldtheorie durch einen Funktor \mathcal{A} definiert hat, der das Zeitschichtaxiom erfüllt, kann man aber jeder Cauchy-Fläche eindeutig eine Observablenalgebra zuordnen. Diese Konstruktion verwendet den sogenannten *inversen Limes* eines inversen Systems. Dieser ist ein Spezialfall eines allgemeineren Limesbegriffs aus der Kategorientheorie. Der Limes im Sinne der Kategorientheorie wird im Anhang in Abschnitt A.3 definiert und erläutert. Dort wird auch bereits der Zusammenhang mit dem inversen Limes hergestellt. Dies soll an dieser Stelle für eine Quantenfeldtheorie weiter ausgeführt werden.

Sei M eine feste, global hyperbolische Raumzeit und Σ eine Cauchy-Fläche von M . Man betrachtet nun die Unterkategorie \mathbf{Umg}_Σ von \mathbf{Loc} , deren Objekte die global hyperbolischen Umgebungen von Σ sind. Als Morphismen wählt man die Inklusionen $\iota_{U_1, U_2} : U_1 \hookrightarrow U_2$, $\iota_{U_1, U_2} = \text{id}_{U_2} \upharpoonright_{U_1}$ für $U_1 \subset U_2$. Diese Kategorie bildet auf natürliche Weise eine gerichtete Menge mit $U_2 \triangleleft U_1$ falls $U_1 \subset U_2$. Schränkt man nun \mathcal{A} auf \mathbf{Umg}_Σ ein, dann definiert $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \mathcal{A}(U)$

$\mathcal{A} \downarrow \mathbf{Umg}_\Sigma$ ein inverses System. Denn zu $U_2 \triangleleft U_1$ ist $\alpha_{U_2 U_1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}(\iota_{U_1 U_2})$ ein injektiver $*$ -Homomorphismus von $\mathcal{B}(U_1)$ nach $\mathcal{B}(U_2)$. Die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \alpha_{UV} \circ \alpha_{VW} &= \alpha_{UW} \text{ falls } U \triangleleft V \triangleleft W \text{ und} \\ \alpha_{UU} &= \text{id}_{\mathcal{B}(U)} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

folgen, wie im Anhang in Abschnitt A.3.2 gezeigt wurde, aus den Funktoreigenschaften von \mathcal{B} . Der inverse Limes (der nun auch der Limes im Sinne der Kategorientheorie von \mathcal{B} ist, wie gleich gezeigt wird), ist nun

$$\begin{aligned} \varprojlim \mathcal{B} = \left\{ (\Psi_U)_{U \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)} \in \prod_{U \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)} \mathcal{B}(U) \mid \right. \\ \left. \alpha_{U_2 U_1}(\Psi_{U_1}) = \Psi_{U_2} \text{ für alle } U_1 \subset U_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

mit den komponentenweisen Verknüpfungen. Dies definiert dann offensichtlich wieder eine unitale $*$ -Algebra. Die Existenz der Familien $(\Psi_U)_{U \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)}$, die die gestellte Bedingung erfüllen, folgt aus dem Zeitschichtaxiom. Mit den Morphismen

$$\begin{aligned} \psi_U &\in \text{hom}_{\mathbf{Obs}} \left(\varprojlim \mathcal{B}, \mathcal{B}(U) \right), \\ (\Psi_V)_{V \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)} &\mapsto \Psi_U \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

ist $(\varprojlim \mathcal{B}, (\psi_U))$ ein universeller Kegel von $\varprojlim \mathcal{B}$ nach \mathcal{B} .

Beweis. Dass die ψ_U einen Kegel von $\varprojlim \mathcal{B}$ nach \mathcal{B} bilden, folgt unmittelbar aus der Definition der Ψ_U . Dass dieser Kegel universell ist, sieht man folgendermaßen: Sei $(N, (\phi_U))$ ein anderer Kegel von $N \in \text{Obj}(\mathbf{Obs})$ nach \mathcal{B} . Zu zeigen ist, dass es einen Morphismus $m \in \text{hom}_{\mathbf{Obs}}(N, \varprojlim \mathcal{B})$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ & \vdots \downarrow m & \\ \phi_V & \varprojlim \mathcal{B} & \phi_U \\ \psi_V \swarrow & & \searrow \psi_U \\ \mathcal{B}(V) & \xrightarrow{\alpha_{UV}} & \mathcal{B}(U) \end{array}$$

für $U \triangleleft V$ kommutiert. Für $n \in N$ setzt man $m(n) := (\Psi_U) \in \varprojlim \mathcal{B}$ mit $\Psi_U = \phi_U(n)$. Dies ist ein wohldefiniertes Element aus $\varprojlim \mathcal{B}$, denn für $U \triangleleft V$ gilt

$$\alpha_{UV}(\Psi_V) = \alpha_{UV}(\phi_V(n)) = \phi_U(n) = \Psi_U, \quad (2.3.9)$$

da die ϕ_U einen Kegel bilden. Die Teildiagramme links oben und rechts oben kommutieren nun automatisch: $\phi_U = \psi_U \circ m$. Damit kommutieren alle Teildiagramme. \square

Also war die Benutzung des Symbols $\varprojlim \mathcal{B}$ gerechtfertigt, denn es handelt sich dabei tatsächlich um einen Limes im kategorientheoretischen Sinne. Im Folgenden wird die Kurzschreibweise $\mathcal{A}(\Sigma) \equiv \varprojlim \mathcal{B}$ verwendet.

Seien Σ_1, Σ_2 zwei Cauchy-Flächen mit $\Sigma_1 \subset J_-(\Sigma_2)$. Der Funktor \mathcal{A} erfüllt nach Voraussetzung das Zeitschichtaxiom. Dies kann man nun abermals ausnutzen, um einen Isomorphismus $\alpha_{\Sigma_1 \Sigma_2}$ der Algebren von Σ_1 und Σ_2 zu konstruieren. Diese Konstruktion wurde in [4] durchgeführt. Man definiert zunächst einen Isomorphismus

$$\alpha_{M\Sigma} : \mathcal{A}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{A}(M)$$

durch $\alpha_{M\Sigma}((\Psi_U)) = \alpha_{MU_1}(\Psi_{U_1})$. Dies hängt wegen der Definition der Ψ_U nicht von der Wahl von U_1 ab:

$$\alpha_{MU_1}(\Psi_{U_1}) = \Psi_M = \alpha_{MU_2}(\Psi_{U_2}) \quad (2.3.10)$$

für alle $U_1, U_2 \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)$. Aufgrund des Zeitschichtaxioms ist $\alpha_{M\Sigma}$ invertierbar. Daher kann man den gesuchten Isomorphismus definieren als

$$\begin{aligned} \alpha_{\Sigma_1 \Sigma_2} : \mathcal{A}(\Sigma_2) &\rightarrow \mathcal{A}(\Sigma_1) , \\ \alpha_{\Sigma_1 \Sigma_2} &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{M\Sigma_1}^{-1} \alpha_{M\Sigma_2} . \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

2.3.3 Lokal kovariante Felder

Auf gekrümmten Raumzeiten gibt es keine Poincaré-Symmetrie. Für die Definition von Quantenfeldtheorien im Minkowskiraum spielt diese fundamentale Symmetrie jedoch eine wichtige Rolle, denn die Translationsinvarianz wird zur Definition des Vakuumvektors verwendet. Der Wegfall dieses Kriteriums auf gekrümmten Raumzeiten bedeutet eine Zunahme der Mehrdeutigkeiten bei der Konstruktion von Quantenfeldtheorien. Insbesondere steigt, wie in Abschnitt 2.7 noch genauer erläutert wird, die Renormierungsfreiheit stark an. Aus diesen Gründen ist ein Ersatz für die Poincaré-Kovarianz in Quantenfeldtheorien auf global hyperbolischen Raumzeiten wünschenswert. Wald hat daher in [37] die Bedingung der *Lokalität und Kovarianz* an den Energie-Impuls-Tensor einer Theorie aufgestellt. Diese Bedingung wurde von Brunetti, Fredenhagen und Verch in [6] aufgegriffen und im Rahmen der funktoriellen Formulierung verallgemeinert. Die neue Forderung bringt, heuristisch gesprochen, zum Ausdruck, dass sich Quantenfelder unter Transformationen der Raumzeit in „natürlicher“ Weise transformieren sollen. Um dies zu präzisieren, macht man folgende

Definition 2.3.3. *Sei eine Quantenfeldtheorie durch den Funktor \mathcal{A} definiert und sei*

$$\Phi \equiv \left(\Phi_{(M, \mathbf{g})} \right)_{(M, \mathbf{g}) \in \text{Obj}(\mathbf{Loc})}$$

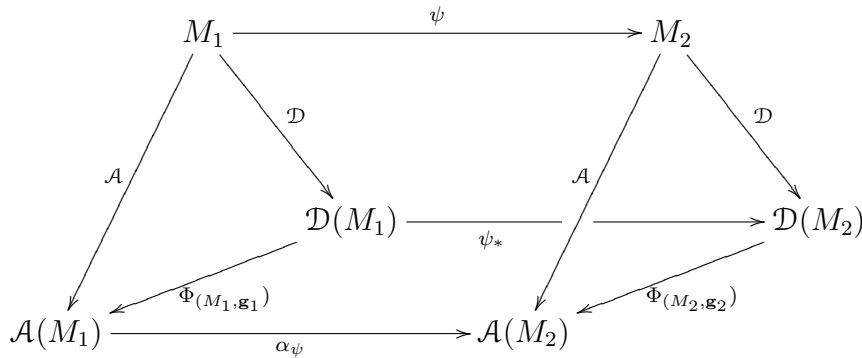
eine Familie von Quantenfeldern, so dass $\Phi_{(M,\mathbf{g})}(f) \in \mathcal{A}(M, \mathbf{g})$ für jede Testfunktion $f \in \mathcal{D}(M)$. Diese Familie heißt ein **lokal kovariantes Feld**, falls für alle $(M_1, \mathbf{g}_1), (M_2, \mathbf{g}_2) \in \text{Obj}(\mathbf{Loc})$ und alle $f \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_1, \mathbf{g}_1), (M_2, \mathbf{g}_2))$ die Kovarianzbedingung

$$\alpha_\psi \left(\Phi_{(M_1, \mathbf{g}_1)}(f) \right) = \Phi_{(M_2, \mathbf{g}_2)}(\psi_* f) \quad (2.3.12)$$

erfüllt ist. Dabei ist der push-forward $\psi_* f \in \mathcal{D}(M_2)$ einer Testfunktion f definiert durch

$$\psi_* f(x) = \begin{cases} (f \circ \psi^{-1})(x) & \text{falls } x \in \psi(M_1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.3.13)$$

Es wird also gefordert, dass die Struktur, die sich durch die push-forwards von Testfunktionen ergibt, auch in den entsprechenden Familien von Quantenfeldern vorhanden ist. Die in Anhang A dargestellte *natürliche Transformation* zwischen Funktoren ist genau eine solche Art von Strukturtransport. Um hier die passende natürliche Transformation zu bestimmen, betrachtet man als Bildraum von \mathcal{A} anstatt \mathbf{Obs} die Kategorie \mathbf{TObs} der *topologischen* unitalen $*$ -Algebren mit *stetigen*, einserhaltenden, injektiven $*$ -Homomorphismen als Morphismen. Dies ist eine Unterkategorie der Kategorie \mathbf{Top} aller topologischen Räume. In dieser liegt auch die Kategorie \mathbf{Test} , deren Objekte die Testfunktionenräume $\mathcal{D}(M, \mathbf{g})$ für $(M, \mathbf{g}) \in \text{Obj}(\mathbf{Loc})$ sind. Ihre Morphismen sind die push-forwards unter Morphismen ψ aus \mathbf{Loc} . Entsprechend lässt sich ein kovarianter Funktor $\mathcal{D} : \mathbf{Loc} \rightarrow \mathbf{Test}$ definieren, mit $\mathcal{D}(M_1, \mathbf{g}_1) = \mathcal{D}(M_1, \mathbf{g}_1)$ und $\mathcal{D}(\psi) = \psi_*$ für $\psi \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_1, \mathbf{g}_1), (M_2, \mathbf{g}_2))$. In der funktoriellen Sprache kann man Definition 2.3.3 nun sehr kurz fassen: *Ein lokal kovariantes Feld ist eine natürliche Transformation von \mathcal{D} nach \mathcal{A} .* Man erhält, wie in Anhang A erklärt, ein kommutatives Diagramm, welches die Funktion der Transformation Φ veranschaulicht. Dabei bedeutet die Kommutativität der „Grundfläche“ gerade die Gültigkeit von (2.3.12) und die „Dachflächen“ sind die definierenden Diagramme von \mathcal{A} und \mathcal{D} .



2.3.4 Relevanz des Zeitschichtaxioms für die Theorie der Quantengravitation

Eine voll quantisierte Theorie der Gravitation ist eines der wichtigsten Ziele der theoretischen Physik. In [4] haben Brunetti und Fredenhagen eine neuartige Behandlung der Quantengravitation vorgeschlagen. Die vorliegende Arbeit behandelt die Quantengravitation zwar nicht, bei dem neuen Ansatz spielt die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms jedoch eine wichtige Rolle. Aus diesem Grund soll die Idee hier kurz erläutert werden.

In kosmologischen Theorien (siehe z.B. [20]) wird die Gravitation üblicherweise folgendermaßen beschrieben: Man fasst die Metrik der Raumzeit auf als Summe

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (2.3.14)$$

wobei η eine klassische feste Hintergrundmetrik und h ein Quantenfeld ist. Die Idee ist, dass es Quantenfluktuationen der Metrik um einen klassischen Hintergrund herum gibt. Wenn man eine solche Theorie konstruiert hat und zeigen kann, dass sie in einem noch genauer zu bestimmenden Sinne *unabhängig von der Hintergrundmetrik* η ist, dann hat man eine Quantenfeldtheorie der Gravitation konstruiert. Die Frage ist nun, wie man das Problem der Hintergrundunabhängigkeit einer solchen Theorie behandeln kann. Wenn die Theorie als kovarianter Funktor beschrieben werden kann, der das Zeitschichtaxiom erfüllt, dann kann man die *relative Cauchy-Entwicklung* zweier Theorien bezüglich einer Variation des Hintergrundes η betrachten (siehe Abb. 2.1):

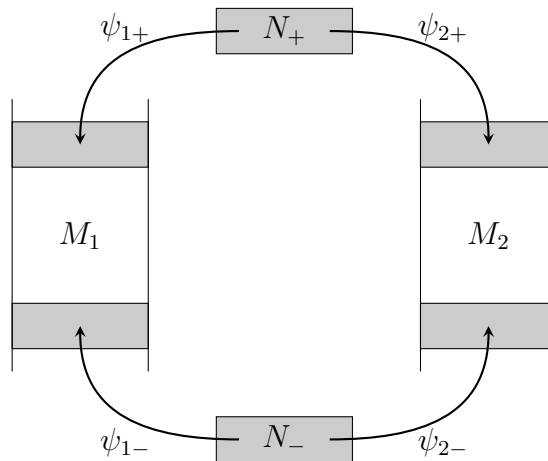


Abbildung 2.1: Relative Cauchy-Entwicklung bei unterschiedlichen Hintergrundmetriken in den Raumzeiten M_1 und M_2

Seien (N_+, η_+) , (N_-, η_-) , (M_1, η_1) , (M_2, η_2) Raumzeiten in $\text{Obj}(\mathbf{Loc})$ und seien $\psi_{i\pm} \in \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((N_{\pm}, \eta_{\pm}), (M_i, \eta_i))$, $i = 1, 2$ Morphismen, so dass $\Sigma_{i\pm} \subset$

$\psi_{i\pm}(N_{\pm})$ Cauchy-Flächen von M_i sind. Es gelte, dass Σ_{i+} in der Zukunft von Σ_{i-} liegt. Außerdem seien η_1 und η_2 nur zwischen diesen Umgebungen von Cauchy-Flächen voneinander verschieden, d.h. als topologische Mannigfaltigkeiten seien M_1 und M_2 gleich, aber ihre metrischen Tensoren unterscheiden sich auf einem kompakten Gebiet im Innern von $J_+(N_-) \cap J_-(N_+)$. Die Theorie des Quantenfeldes h , welches auf diesen unterschiedlichen Hintergründen gemäß den Einsteingleichungen propagiert, sei als kovarianter Funktor gegeben. Dann gehören zu den Morphismen $\psi_{i\pm}$ injektive $*$ -Homomorphismen $\alpha_{\psi_{i\pm}}$ der Observablenalgebren in den entsprechenden Raumzeitgebieten. Da das Zeitschichtaxiom gilt, ist

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{\psi_{1+}} \circ \alpha_{\psi_{2+}}^{-1} \circ \alpha_{\psi_{2-}} \circ \alpha_{\psi_{1-}}^{-1} \quad (2.3.15)$$

sogar ein Automorphismus von $\mathcal{A}(M_1, \eta_1)$. Die Theorie ist nun hintergrundunabhängig, wenn $\beta = \mathbf{1}_{\mathcal{A}(M_1, \eta_1)}$.

Man sieht, dass diese Überlegung auf die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms in einer Theorie des Quantenfeldes $\eta_{\mu\nu}$ angewiesen ist. Daher ist es zunächst sinnvoll, seine Gültigkeit für skalare Quantenfeldtheorien zu überprüfen, was in der vorliegenden Arbeit durchgeführt wurde.

2.4 Das freie skalare Feld

In diesem Abschnitt wird die Algebra eines freien skalaren Quantenfeldes φ , welches die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, eingeführt. Sie bildet die Grundlage für die Konstruktion von Wick-Polynomen und wechselwirkenden Feldern in den folgenden Abschnitten. Am Ende dieses Abschnitts wird die freie Algebra einer Cauchy-Fläche explizit konstruiert. Dabei wird der Zusammenhang mit der abstrakten Konstruktion des inversen Limes nach Unterabschnitt 2.3.2 hergestellt.

2.4.1 Konstruktion der Algebra des freien Feldes

Die Algebra des freien Feldes soll später durch operatorwertige Distributionen auf einem noch näher zu bestimmenden Hilbertraum dargestellt werden. Operatorwertige Distributionen haben die Interpretation von lokalen Messungen. So soll für eine Testfunktion $f \in \mathcal{D}(M)$ der Operator $\varphi(f)$ die Messung des Feldes φ an allen Punkten x bedeuten, jeweils gewichtet mit $f(x)$. Die freie Feldalgebra soll jedoch zunächst unabhängig von einer konkreten Hilbertraumdarstellung konstruiert werden, daher ist das erste Axiom für die Konstruktion lediglich, dass die Abbildung

$$f \mapsto \varphi(f)$$

linear sein soll. $\varphi(f)$ wird dabei zunächst als abstraktes Symbol aufgefasst. Im Folgenden sei (M, \mathbf{g}) stets eine global hyperbolische Raumzeit mit Metrik \mathbf{g} . Sei ∇ der durch \mathbf{g} induzierte Levi-Civita-Zusammenhang auf M . Dann lautet die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2 - \xi R)\varphi = 0 \quad (2.4.1)$$

mit $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$, dem Krümmungsskalar R , der Masse m und der Kopplung an die skalare Krümmung ξ . Nach [7, Theorem 3.3.1, Korollar 3.4.3] existieren auf M eindeutig bestimmte avancierte und retardierte Fundamentallösungen Δ^{av} und Δ^{ret} . Diese sind Operatoren

$$\Delta^{av/ret} : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M) \quad (2.4.2)$$

mit $(\square + m^2 - \xi R)\Delta^{av/ret} = \Delta^{av/ret}(\square + m^2 - \xi R) = \text{id}_{\mathcal{D}(M)}$. Nach dem Kerntheorem von Schwartz [27, Theorem 5.2.1] sind ihre Integralkerne Distributionen auf $\mathcal{D}(M \times M)$. Sie werden ebenfalls mit $\Delta^{av/ret}$ bezeichnet. Für die Träger gilt $\text{supp } \Delta^{av/ret} = \{(x, y) | y \in J_{-/+}(x)\}$. Für Punkte x, y auf einer Cauchy-Fläche Σ erwartet man aufgrund der üblichen quantenmechanischen Vertauschungsrelationen für Orts- und Impulsoperator die folgenden gleichzeitigen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= 0 \\ [\varphi(x), \partial_\Sigma \varphi(y)] &= i\delta_\Sigma(x, y) \\ [\partial_\Sigma \varphi(x), \partial_\Sigma \varphi(y)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

mit dem zukunftsgerichteten Normalenvektorfeld ∂_Σ auf Σ und dem Integralkern δ_Σ des Einheitsoperators $\text{id}_{\mathcal{D}(M)}$ auf $\mathcal{D}(M)$. Unter Benutzung der Feldgleichung kann man daraus die Vertauschungsrelation

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = i\Delta(x, y) \quad (2.4.4)$$

ableiten. Dabei ist $\Delta = \Delta^{av} - \Delta^{ret}$.

Es soll also insgesamt eine *-Algebra \mathfrak{F} konstruiert werden, die folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) \mathfrak{F} wird von den Elementen $\varphi(f)$ für $f \in \mathcal{D}(M)$ erzeugt.
- (ii) φ erfüllt die Feldgleichung, d.h. $\varphi((\square + m^2 - \xi R)f) = 0$.
- (iii) Es gilt die Vertauschungsrelation $[\varphi(f), \varphi(g)] = i\langle f, \Delta g \rangle$.
- (iv) Die Involution ist realisiert durch $\varphi(f)^* = \varphi(\bar{f})$.

Ausgangspunkt der Lösung dieses Problems ist die Tensoralgebra über $\mathcal{D}(M)$. Man betrachtet Elemente

$$F(\varphi) = \sum_{n=1}^K \int dx_1 \cdots dx_n \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) (f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(x_1, \dots, x_n) \quad (2.4.5)$$

für $f_i \in \mathcal{D}(M)$, mit dem durch das Tensorprodukt induzierten Produkt. Als $*$ -Operation wählt man einfach (iv) und dividiert diese Algebra durch die Ideale, die von der Feldgleichung und der Vertauschungsrelation erzeugt werden. Man erhält die Algebra \mathfrak{F} des freien skalaren Quantenfeldes.

2.4.2 Die freie Algebra einer Cauchy-Fläche

In diesem Unterabschnitt wird nachvollzogen, wie man die Algebra $\mathfrak{C}(\Sigma)$ der Cauchy-Daten des freien Feldes konstruiert [11, 30]. Dann wird gezeigt, dass man $\mathfrak{C}(\Sigma)$ als Algebra der Cauchy-Fläche Σ im Sinne von Unterabschnitt 2.3.2 auffassen kann.

Die Algebra $\mathfrak{C}(\Sigma)$ der Cauchy-Daten auf Σ wird erzeugt von den Symbolen $\varphi_\Sigma(g)$ mit $g \in \mathcal{D}(\Sigma)$ und $\pi_\Sigma(h)$ mit $h \in \Lambda_0^3(\Sigma)$. Dabei ist $\Lambda_0^3(\Sigma)$ der Raum der glatten 3-Formen auf Σ mit kompaktem Träger. φ_Σ und π_Σ sollen linear in ihren Argumenten sein. Es soll eine Involution $*$ geben, so dass $\varphi_\Sigma(g)^* = \varphi_\Sigma(\bar{g})$ und $\pi_\Sigma(g)^* = \pi_\Sigma(\bar{g})$. Außerdem sollen die Vertauschungsrelationen

$$[\varphi_\Sigma(g), \pi_\Sigma(h)] = i \int_\Sigma gh \quad (2.4.6)$$

gelten. Man sieht, dass die algebraische Struktur, die durch diese Relation gegeben ist, unabhängig von der Metrik auf Σ ist, da letztere in das Integral von 3-Formen auf Σ nicht eingeht.

Eine alternative Konstruktion der freien Algebra von Σ ist der in Unterabschnitt 2.3.2 vorgestellte inverse Limes. Aus den Algebren $\mathfrak{F}(M)$ lässt sich ein kovarianter Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Loc} \rightarrow \mathbf{Obs}$ im Sinne von Abschnitt 2.3 konstruieren, der das Zeitschichtaxiom erfüllt. Dies folgt aus den Betrachtungen in Abschnitt 2.6 und dem Beweis der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms für die Wick-Polynome in Kapitel 3. Man kann nun \mathcal{F} wieder auf \mathbf{Umg}_Σ einschränken und erhält den Funktor $\mathcal{G} = \mathcal{F} \upharpoonright_{\mathbf{Umg}_\Sigma}$. Die Elemente des inversen Limes $\varprojlim \mathcal{G}$ sind Familien $F = (F_U)_{U \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)}$ mit $\alpha_{U_2 U_1}(F_{U_1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}(\iota_{U_1 U_2})(F_{U_1}) = F_{U_2}$ für $U_2 \triangleleft U_1$ (d.h. $U_1 \subset U_2$). Zusammen mit der Familie von Morphismen $(\alpha_U)_{U \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)}$,

$$\begin{aligned} \alpha_U : \varprojlim \mathcal{G} &\rightarrow \mathfrak{F}(U) \\ \alpha_U(F) &= F_U \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

bildet $\varprojlim \mathcal{G}$ einen universellen Kegel.

Um die Verbindung zwischen $\varprojlim \mathcal{G}$ und $\mathfrak{C}(\Sigma)$ herzustellen, wird hier die folgende Vorgehensweise gewählt: Zunächst wird eine Familie $(\phi_U)_{U \in \text{Obj}(\text{Um}\mathfrak{g}_\Sigma)}$ von Morphismen mit $\phi_U : \mathfrak{C}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ angegeben, so dass $(\mathfrak{C}(\Sigma), (\phi_U))$ ein Kegel von $\mathfrak{C}(\Sigma)$ nach \mathcal{G} ist. Dann wird der Verbindungshomomorphismus $m : \mathfrak{C}(\Sigma) \rightarrow \varprojlim \mathcal{G}$ konstruiert und gezeigt, dass es sich um einen Isomorphismus handelt. Damit ist dann $(\mathfrak{C}(\Sigma), (\phi_U))$ automatisch ebenfalls universell.

Um diese Konstruktionen durchführen zu können, wird die Lösungstheorie für das Cauchy-Problem der Klein-Gordon-Gleichung benötigt. Diese ist in [11, 30] dargestellt. Eine zentrale Rolle spielen die Einschränkungsooperatoren

$$\begin{aligned} \rho_0 : \mathcal{E}(M) &\rightarrow \mathcal{E}(\Sigma) \\ f &\mapsto f \upharpoonright_\Sigma \\ \rho_1 : \mathcal{E}(M) &\rightarrow \mathcal{E}(\Sigma) \\ f &\mapsto (n^\alpha \nabla_\alpha f) \upharpoonright_\Sigma , \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

wobei n das zukunftsgerichtete Normaleneinheitsfeld auf Σ ist.

Sei \sim die folgende Äquivalenzrelation auf $\mathcal{D}(M)$: $f \sim h$ falls eine Testfunktion der Form Kg existiert, so dass $f - h = Kg$. Sei

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{D}(M) / \sim &\rightarrow \mathcal{D}(\Sigma)^2 , \\ [f] &\mapsto (\rho_0 \Delta f, \rho_1 \Delta f) . \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Hierdurch ist β wohldefiniert, da $K\Delta = 0$. Nach [11, Theorem 1] existiert genau eine Lösung u der Klein-Gordon-Gleichung mit $\rho_0(u) = u_0$ und $\rho_1(u) = u_1$. Nach [11, Lemma A.3] existiert zu jeder offenen Umgebung \mathcal{O} von $\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1$ mit kompaktem Abschluss eine Testfunktion $f \in \mathcal{D}(M)$ mit $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$, so dass $\Delta f = u$. Also ist β surjektiv. Sei $\beta([f]) = \beta([g])$, dann gilt $\rho_0 \Delta f = \rho_0 \Delta g$ und $\rho_1 \Delta f = \rho_1 \Delta g$. Aus der Linearität von ρ_0, ρ_1 und Δ folgt damit

$$\rho_0 \Delta(f - g) = 0 , \quad \rho_1 \Delta(f - g) = 0 . \tag{2.4.10}$$

Da $K\Delta = 0$, ist $\Delta(f - g)$ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Da sie die Cauchy-Daten Null besitzt, muss sie selbst Null sein. Der Kern von Δ ist aber gerade $[0] \in \mathcal{D}(M) / \sim$. Also ist β auch injektiv.

Insgesamt ist β^{-1} also eine Bijektion

$$\beta^{-1} : \mathcal{D}(\Sigma)^2 \rightarrow \mathcal{D}(M) / \sim \tag{2.4.11}$$

und in $\beta^{-1}(u_0, u_1)$ gibt es zu jeder offenen Umgebung $\mathcal{O} \subset M$ von $\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1$ mit kompaktem Abschluss einen Repräsentanten f mit $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$.

Mit Hilfe von β^{-1} lassen sich die gesuchten Morphismen $\phi_U : \mathfrak{C}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ leicht konstruieren. Jede 3-Form $\tilde{v} \in \Lambda_0^3(\Sigma)$ ist proportional zur Volumenform auf Σ und der Proportionalitätsfaktor ist eine Testfunktion $v \in$

$\mathcal{D}(\Sigma)$. Sei nun

$$\phi_U \left(\sum_{i=1}^I \prod_{j=0}^J (\varphi_\Sigma(u_{ij}) + \pi_\Sigma(\widetilde{v}_{ij})) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^I \prod_{j=0}^J \varphi \left(\beta_U^{-1}(u_{ij}, v_{ij}) \right) . \quad (2.4.12)$$

Dabei steht die Kurzschreibweise $\beta_U^{-1}(u, v)$ für einen Repräsentanten f aus $\beta^{-1}(u, v)$ mit $\text{supp } f \subset U$. Da φ linear ist und die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, hängt $\varphi \left(\beta_U^{-1}(u, v) \right)$ nicht von der Wahl dieses Repräsentanten ab, also ist ϕ_U wohldefiniert. Dass ϕ_U bijektiv ist, folgt aus der Bijektivität von β . Außerdem respektiert ϕ_U per Definition die Verknüpfungen. Um zu zeigen, dass ϕ_U die Kommutatorrelationen respektiert, benötigt man die adjungierten Operatoren $\rho'_0, \rho'_1, \Delta'$. Es gilt $\Delta' = -\Delta$ und nach [11, Korollar 1.3] gilt außerdem

$$\Delta = \Delta \rho'_0 \rho_1 \Delta - \Delta \rho'_1 \rho_0 \Delta . \quad (2.4.13)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \phi_U^{-1}([\varphi(f), \varphi(g)]) &= [\varphi_\Sigma(\rho_1 \Delta f) + \pi_\Sigma(\rho_0 \Delta f), \varphi_\Sigma(\rho_1 \Delta g) + \pi_\Sigma(\rho_0 \Delta g)] \\ &= [\varphi_\Sigma(\rho_1 \Delta f), \pi_\Sigma(\rho_0 \Delta g)] - [\varphi_\Sigma(\rho_1 \Delta g), \pi_\Sigma(\rho_0 \Delta f)] \\ &= i \langle \rho_1 \Delta f, \rho_0 \Delta g \rangle - i \langle \rho_1 \Delta g, \rho_0 \Delta f \rangle \\ &= i \langle f, -\Delta \rho'_1 \rho_0 \Delta g \rangle - i \langle -\Delta \rho'_0 \rho_1 \Delta g, f \rangle \\ &= i \langle f, (\Delta \rho'_0 \rho_1 \Delta g - \Delta \rho'_1 \rho_0 \Delta g) \rangle \\ &= \langle f, \Delta g \rangle \\ &= \phi_U^{-1}(\langle f, \Delta g \rangle) . \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Analog kann man zeigen, dass auch ϕ_U die Kommutatorrelationen respektiert. ϕ_U ist also ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}(\Sigma)$ und $\mathcal{G}(U)$.

Nun wird gezeigt, dass die ϕ_U zusammen mit $\mathfrak{C}(\Sigma)$ einen Kegel von $\mathfrak{C}(\Sigma)$ nach \mathcal{G} bilden. Dazu ist zu zeigen, dass

$$\alpha_{U_2 U_1} \circ \phi_{U_1} = \phi_{U_2} \quad (2.4.15)$$

für $U_2 \triangleleft U_1$. Aber $\mathcal{G}(U_1) \subset \mathcal{G}(U_2)$, daher ist $\alpha_{U_2 U_1} = \text{id}_{\mathcal{G}(U_2)} \upharpoonright_{\mathcal{G}(U_1)}$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^I \prod_{j=0}^J \varphi \left(\beta_{U_1}^{-1}(u_{ij}, v_{ij}) \right) = \sum_{i=1}^I \prod_{j=0}^J \varphi \left(\beta_{U_2}^{-1}(u_{ij}, v_{ij}) \right) , \quad (2.4.16)$$

da φ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Damit ist die Kegeleigenschaft gezeigt.

Der letzte Schritt besteht nun in der Konstruktion des Isomorphismus m . Sei zunächst

$$m : \mathfrak{C}(\Sigma) \rightarrow \prod_{U \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)} \mathcal{G}(U) , \quad (2.4.17)$$

$$(m(c))_U = \phi_U(c) .$$

Aufgrund der eben gezeigten Kegeleigenschaft der ϕ_U ist $\text{bild}(m) \subset \varprojlim \mathcal{G}$. Zu $(\Phi_U)_{U \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)} \in \varprojlim \mathcal{G}$ ist $m(\phi_V^{-1}(\Phi_V)) = (\Phi_U)_{U \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)}$ für ein beliebiges $V \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)$. Also ist $m : \mathfrak{C}(\Sigma) \rightarrow \varprojlim \mathcal{G}$ surjektiv. Dass m ein Homomorphismus ist, der die Kommutatorrelationen respektiert, folgt daraus, dass alle ϕ_U diese Eigenschaft besitzen. Der Kern von m besteht offensichtlich nur aus der Null, also ist m insgesamt ein Isomorphismus von $\mathfrak{C}(\Sigma)$ und $\varprojlim \mathcal{G}$. Damit kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{C}(\Sigma) & \\
 \phi_V \swarrow & \updownarrow m & \searrow \phi_U \\
 & \varprojlim \mathcal{G} & \\
 \alpha_V \swarrow & & \searrow \alpha_U \\
 \mathcal{B}(V) & \xrightarrow{\alpha_{UV}} & \mathcal{B}(U)
 \end{array}$$

für alle $U, V \in \text{Obj}(\mathbf{Umg}_\Sigma)$ mit $U \triangleleft V$. Also ist $(\mathfrak{C}(\Sigma), (\phi_U))$ ein universeller Kegel.

2.5 Zustände

Wie bereits erwähnt, sollen die Elemente von \mathfrak{F} durch Operatoren auf einem Hilbertraum dargestellt werden. Bei dessen Wahl besteht in der Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten große Freiheit, was ja einer der ursprünglichen Gründe für den algebraischen Zugang war. Eine Möglichkeit der Konstruktion eines Hilbertraums, auf dem \mathfrak{F} durch eine treue Darstellung von Operatoren realisiert wird, ist die sogenannte GNS-Konstruktion (nach Gelfand, Neumark und Segal). Dazu wählt man zunächst einen Zustand auf \mathfrak{F} . Ein Zustand ist ein lineares Funktional $\omega : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 \omega(A^*A) &\geq 0 \\
 \omega(1) &= 1 .
 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Dieser Zustandsbegriff ist im Sinne von Erwartungswertfunktionalen zu verstehen. Denn falls \mathfrak{F} durch Operatoren auf einem Hilbertraum dargestellt ist,

dann kann man zu jedem Einheitsvektor Ψ einen Zustand definieren, indem man $\omega(A) = \langle \Psi, A\Psi \rangle$ setzt. Aus einem beliebigen Zustand lässt sich aber umgekehrt auch eine Hilbertraumdarstellung konstruieren. Durch $\langle A, B \rangle = \omega(A^*B)$ ist eine positiv semidefinite Sesquilinearform auf \mathfrak{F} definiert. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle A, B \rangle|^2 \leq \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle$ lautet hier

$$|\omega(A^*B)| \leq \sqrt{\omega(A^*A)\omega(B^*B)} . \quad (2.5.2)$$

Sei $\mathfrak{I}_0 = \{I \in \mathfrak{F} \mid \omega(I^*I) = 0\}$. Wegen (2.5.1) und (2.5.2) gilt für $B \in \mathfrak{F}$, $I \in \mathfrak{I}_0$

$$\langle BI, BI \rangle = \omega(I^*B^*BI) \leq \sqrt{\omega(I^*I) \omega((B^*BI)^*B^*BI)} = 0 \quad (2.5.3)$$

und für $I_1, I_2 \in \mathfrak{I}_0$ gilt

$$\langle \lambda I_1, \lambda I_1 \rangle = |\lambda|^2 \omega(I_1^*I_1) = 0 \quad (2.5.4)$$

und

$$\begin{aligned} \left| \langle (I_1 + I_2), (I_1 + I_2) \rangle \right| &= \left| \omega(I_1^*I_1 + I_2^*I_2 + I_1^*I_2 + I_2^*I_1) \right| \\ &= \left| \omega(I_1^*I_2) + \omega(I_2^*I_1) \right| \\ &\leq \sqrt{\omega(I_2I_2^*) \omega(I_1^*I_1)} + \sqrt{\omega(I_1I_1^*) \omega(I_2^*I_2)} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

Also ist der Nullraum \mathfrak{I}_0 auch ein Linksideal in \mathfrak{F} . Auf dem Quotientenraum $\mathfrak{F}/\mathfrak{I}_0$ wirkt \mathfrak{F} also durch Linksmultiplikation. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist auf diesem Quotientenraum ein positiv definites Skalarprodukt. Den so erhaltenen Prähilbertraum \mathcal{D}_ω kann man nun vervollständigen und erhält den Hilbertraum \mathcal{H}_ω . Die gefundene Darstellung von \mathfrak{F} auf \mathcal{H}_ω durch Operatoren mit Definitionsbereich \mathcal{D}_ω wird mit π_ω bezeichnet. Zusammen mit dem eindeutig bestimmten zyklischen Vektor Ω_ω , der durch Anwendung von π_ω den Definitionsbereich \mathcal{D}_ω generiert und für den gilt

$$\langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle = \omega(A) , \quad \forall A \in \mathfrak{F} , \quad (2.5.6)$$

erhält man das sogenannte GNS-Tripel $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$.

Mit Hilfe eines Zustandes ω auf \mathfrak{F} lassen sich die sogenannten n -Punktfunktionen

$$\omega_n(f_1, \dots, f_n) = \omega(\varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n))$$

definieren. Umgekehrt ist ein Zustand durch seine n -Punktfunktionen eindeutig festgelegt. Eine besondere Klasse von Zuständen sind die sogenannten *quasifreien Zustände*. Ihre ungeraden n -Punktfunktionen verschwinden

und ihre geraden n -Punktfunktionen ergeben sich aus der Zweipunktfunktion durch

$$\omega_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\{p_1, \dots, p_{n/2}\} \in \mathcal{P}(x_1, \dots, x_n)} \prod_{p_i} \omega_2(x_{i_1}, x_{i_2}).$$

Dabei ist $\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n)$ die Menge der Partitionen von $\{1, \dots, n\}$ in geordnete Paare $p_i = (x_{i_1}, x_{i_2})$ mit $i_1 < i_2$. Eine zentrale Frage in der algebraischen Quantenfeldtheorie ist, welche Zustände physikalische Bedeutung haben. Eine Bedingung, die physikalisch zulässige Zustände erfüllen müssen, ist die sogenannte *Hadamard-Bedingung* [10]. Diese wurde mathematisch präzise von Kay und Wald [31] formuliert. Radzikowski hat in [35] gezeigt, dass die Hadamard-Bedingung für quasifreie Zustände äquivalent zu einer Bedingung an die Wellenfrontmenge der Zweipunktfunktion ist. Danach ist ein quasifreier Zustand genau dann ein Hadamard-Zustand, wenn

$$WF(\omega_2) = \left\{ (x_1, k_1, x_2, -k_2) \in (T^*M)^2 \setminus \{0\} \mid (x_1, k_1) \sim (x_2, k_2), k_1 \in V_{x_1}^+ \right\}. \quad (2.5.7)$$

Die Notation $(x_1, k_1) \sim (x_2, k_2)$ bedeutet, dass eine lichtartige Geodäte existiert, die x_1 und x_2 verbindet und Kotangentialvektoren k_1 bei x_1 und k_2 bei x_2 hat. Zum Begriff der Wellenfrontmenge siehe Anhang B.

2.6 Wick-Polynome

Die in Abschnitt 2.4 eingeführte Algebra des freien Feldes reicht noch nicht aus, um störungstheoretisch eine Algebra von wechselwirkenden Feldern zu konstruieren. Der Grund hierfür ist die Tatsache, dass \mathfrak{F} nicht die nichtlinearen *lokalen Funktionale* enthält. Ein Feldfunktional

$$F(\varphi) = \int dx_1 \cdots dx_n \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) f_n(x_1, \dots, x_n)$$

heißt lokal, wenn

$$\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = 0 \quad \text{für } x \neq y.$$

Die Funktionalableitung ist dabei definiert als

$$\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} = \sum_{k=1}^n \int dx_1 \cdots dx_n \varphi(x_1) \cdots \delta(x_k, x) \cdots \varphi(x_n) f_n(x_1, \dots, x_n).$$

Insbesondere enthält \mathfrak{F} nicht die Wickpotenzen des Feldes und deren zeitgeordnete Produkte. Wie in Abschnitt 2.7 erläutert wird, sind letztere aber notwendig zur perturbativen Formulierung einer wechselwirkenden Quantenfeldtheorie. In diesem Abschnitt wird daher die Vergrößerung der Algebra \mathfrak{F} besprochen, wie sie in [3, 12, 14, 23] durchgeführt wurde.

2.6.1 Definition der Algebra \mathfrak{W}

Potenzen des Feldes sind als Quantenfelder zunächst nicht wohldefiniert. Daher betrachtet man sogenannte *normalgeordnete Produkte*

$$: \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) : \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta^n}{i^n \delta f(x_1) \cdots \delta f(x_n)} \exp \left[\frac{1}{2} \omega_2(f \otimes f) + i\varphi(f) \right] \Big|_{f=0} . \quad (2.6.1)$$

Dabei ist ω_2 die Zweipunktfunction eines quasifreien Hadamard-Zustands ω auf \mathfrak{F} . Die normalgeordneten Produkte sind also operatorwertige Distributionen auf dem GNS-Hilbertraum zu ω . Die durch Gleichung (2.6.1) definierte Normalordnungsvorschrift stimmt mit der üblichen Normalordnung auf dem Fockraum überein, siehe z.B. [34]. Wählt man Funktionen f_n als Summen von n -fachen Produkten von Testfunktionen in einer Variablen, so kann man verschmierte normalgeordnete Produkte

$$\phi^{\otimes n}(f_n) = \int : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) : f_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2.6.2)$$

als Elemente in \mathfrak{F} definieren. Das Produkt ist dann gegeben durch

$$\phi^{\otimes n}(f) \phi^{\otimes m}(g) = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \phi^{\otimes(n+m-2k)}(f \otimes_k g) , \quad (2.6.3)$$

mit dem symmetrisierten, k -fach kontrahierten Tensorprodukt

$$\begin{aligned} & (f \otimes_k g)(x_1, \dots, x_{n+m-2k}) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S} \frac{n!m!}{(n-k)!(m-k)!k!} \int_{M^{2k}} dy_1 \cdots dy_{2k} \\ & \omega_2(y_1, y_2) \cdots \omega_2(y_{2k-1}, y_{2k}) f(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, y_3, \dots, y_{2k-1}) \times \\ & g(x_{n-k+1}, \dots, x_{n+m-2k}, y_2, y_4, \dots, y_{2k}) , \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

wobei \mathbf{S} für die Symmetrisierung in x_1, \dots, x_{n+m-2k} steht.

Um lokale Funktionale zu erhalten, muss man für die f_n Distributionen mit Träger auf der Diagonalen $\Delta(M^n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_1 = \dots = x_n\}$ wählen. Dabei treten in Integralen der Form (2.6.2) Produkte der operatorwertigen Distributionen $: \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) :$ mit den Distributionen f_n auf. Produkte von Distributionen sind aber im Allgemeinen nicht wohldefiniert. Duistermaat und Hörmander haben aber in [27, 28] gezeigt, dass unter bestimmten Bedingungen an die Wellenfrontmengen das Produkt von Distributionen definiert werden kann. Einen Überblick über die hierfür relevanten Definitionen und Aussagen bietet Anhang B. Die Bedingung, die an die Wellenfrontmengen der f_n gestellt werden muss, damit Produkte mit den normalgeordneten Produkten wohldefiniert sind, haben Brunetti und Fredenhagen

in [3] gefunden: Das Definitionsgebiet \mathcal{D}_ω der operatorwertigen Distributionen in \mathfrak{F} enthält eine dichte, unter der Anwendung von Elementen der Form (2.6.2) invariante Teilmenge, das sogenannte *mikrolokale Glattheitsgebiet* \mathcal{D}_ω^s („microlocal domain of smoothness“ [3]), so dass die Wellenfrontmengen der vektorwertigen Distributionen

$$f_n \mapsto \phi^{\otimes n}(f_n)\psi \quad \text{für } \psi \in \mathcal{D}_\omega^s \quad (2.6.5)$$

in der Menge

$$\mathbf{F}_n(M, \mathbf{g}) = \left\{ (x_1, k_1, \dots, x_n, k_n) \in (T^*M)^n \setminus \{0\} \mid k_i \in V_{x_i}^-, i = 1, \dots, n \right\}. \quad (2.6.6)$$

enthalten sind. Sei $\mathcal{T}^n(M)$ die Menge der symmetrischen, kompakt getragenen Distributionen $f \in \mathcal{D}'(M^n)$, deren Wellenfrontmenge der Bedingung

$$WF(f) \cap \overline{\left(\left(\bigcup_{x \in M} V_x^+ \right)^n \cup \left(\bigcup_{x \in M} V_x^- \right)^n \right)} = \emptyset \quad (2.6.7)$$

genügt⁶. Die Kovektoren in $\mathbf{F}_n(M, \mathbf{g})$ liegen an jedem Punkt $X \in M^n$ alle im Rückwärtslichtkegel, die Kovektoren in der Wellenfrontmenge von $t \in \mathcal{T}^n(M)$ liegen an keinem Punkt alle im Vorwärtslichtkegel. Also gibt es kein $(X, \Xi) \in \mathbf{F}_n(M, \mathbf{g})$, so dass $(X, -\Xi) \in WF(f)$. Daher ist das Produkt einer vektorwertigen Distribution vom Typ (2.6.5) mit einem Element $f \in \mathcal{T}^n(M)$ nach Satz B.2.1 eine wohldefinierte vektorwertige Distribution. Man definiert nun die *Algebra der Wick-Polynome* \mathfrak{W} als die $*$ -Algebra von Operatoren auf dem GNS-Hilbertraum \mathcal{H}_ω , die durch 1 und Elemente $\phi^{\otimes n}(f_n)$ mit $f_n \in \mathcal{T}^n(M)$ erzeugt wird.

Brunetti und Fredenhagen haben in [3] und Hollands und Wald in [23] gezeigt, dass diese Algebra wohldefiniert ist und die richtigen Eigenschaften besitzt. Insbesondere ist das Produkt wohldefiniert und ebenfalls durch die Formel (2.6.3) gegeben. Ein wichtiger Schritt in den Beweisen war es zu zeigen, dass die Distributionen, die durch Kontraktionen in (2.6.4) entstehen, wohldefiniert sind und wieder in $\mathcal{T}^n(M)$ liegen.

2.6.2 Abstrakte Darstellung der Wick-Polynome

Dütsch und Fredenhagen haben in [12] gezeigt, dass die algebraische Struktur von \mathfrak{W} vom Hadamard-Zustand ω und somit von der gewählten Hilbertraumdarstellung unabhängig ist. Die Idee ist, das \mathfrak{W} als treue Darstellung einer

⁶Mit der in Unterabschnitt 2.1 eingeführten Bezeichnung lautet diese Bedingung: $WF(f) \cap \overline{V_-^n \cup V_+^n} = \emptyset$. Zur Vereinfachung der Notation wird im Folgenden stets diese Schreibweise verwendet.

abstrakten Algebra von reellwertigen Distributionen aufgefasst werden kann. Um diese abstrakte Algebra zu finden, definiert man zunächst den Raum $\mathcal{T}^\bullet(M) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}^n(M)$. Auf diesem ist durch (2.6.3) und (2.6.4) ein assoziatives Produkt erklärt, nämlich

$$(f \star g)_n = \sum_{m+l-2k=n} f_m \otimes_k g_l . \quad (2.6.8)$$

Man kann nun (2.6.2) als Definition einer Darstellungsabbildung

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{T}^\bullet(M) &\rightarrow \mathfrak{W}(M) \\ f &\mapsto \phi^{\otimes \bullet}(f) \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

auffassen. Diese Notation bedeutet ausgeschrieben

$$\pi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{\otimes n}(f_n) . \quad (2.6.10)$$

Dies ist per Definition eine Darstellung von \mathfrak{W} durch Elemente in $\mathcal{T}^\bullet(M)$. Die Darstellung ist aber nicht treu, d.h. π ist nicht injektiv. Das liegt daran, dass Elemente $k \in \mathcal{T}^\bullet(M)$ mit Komponenten

$$k_n = \mathbf{S}K_1 g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_i g_n \quad (2.6.11)$$

für $g_n \in \mathcal{T}^n(M)$ auf die Null in \mathfrak{W} abgebildet werden, da dort die Feldgleichung gilt. Die Elemente k der Form (2.6.11) erzeugen ein Ideal $\mathcal{T}_K^\bullet(M)$ in $\mathcal{T}^\bullet(M)$. Dieses ist gerade der Kern von π . Man erhält also eine treue Darstellung der Quotientenalgebra $\mathcal{T}^\bullet(M)/\mathcal{T}_K^\bullet(M)$ auf $\mathfrak{W}(M)$ durch die Darstellungsabbildung

$$\pi_\omega : f + \mathcal{T}_K^\bullet(M) \mapsto \phi^{\otimes \bullet}(f) . \quad (2.6.12)$$

Es hat sich herausgestellt, dass sich viele Probleme besser innerhalb der abstrakten Algebra $\mathcal{T}^\bullet(M)$ behandeln lassen als in ihrer Darstellung $\mathfrak{W}(M)$. Dieser Zugang wird als *off-shell-Formalismus* bezeichnet, da in $\mathcal{T}^\bullet(M)$ die Feldgleichung nicht gilt. Besonders wenn Fragen der Renormierung von Quantenfeldtheorien behandelt werden, hat sich der off-shell-Formalismus als bequemer erwiesen [14]. In der vorliegenden Arbeit spielen Renormierungsprobleme hingegen keine Rolle. Hier soll das Zeitschichtaxiom bewiesen werden, welches ausdrückt, dass man Messungen in der Zukunft vorhersagen kann, wenn man alle Messungen zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Vergangenheit kennt. Diese Eigenschaft hängt offensichtlich von der Gültigkeit einer Feldgleichung ab, die die Zeitentwicklung von Messgrößen bestimmt. Im Folgenden wird daher im *on-shell-Formalismus* gearbeitet, d.h. in den isomorphen Algebren $\mathcal{T}^\bullet(M)/\mathcal{T}_K^\bullet(M)$ und $\mathfrak{W}(M)$.

Der Algebra $\mathcal{T}^\bullet(M)$ kann man in natürlicher Weise eine Topologie geben. In [26] wird eine Topologie auf dem Raum der Distributionen eingeführt. Diese wird durch die entsprechenden Einschränkungen an die Wellenfrontmengen auf die Räume $\mathcal{T}^n(M)$ übertragen. Dann ist eine Topologie auch auf der direkten Summe dieser Räume erklärt. In dieser Topologie ist der Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(M^n)$ folgendicht in $\mathcal{T}^n(M)$, das Produkt (2.6.8) ist folgenstetig und das Ideal $\mathcal{T}_K^\bullet(M)$ ist folgenabgeschlossen. Daher ist Konvergenz von Folgen auf dem Quotientenraum $\mathcal{T}^\bullet(M)/\mathcal{T}_K^\bullet(M)$ wohldefiniert. Damit ist Konvergenz auch in $\mathfrak{W}(M)$ wohldefiniert. Die Algebra des freien Feldes, $\mathfrak{F}(M)$, in welcher nur Testfunktionen zur Verschmierung mit den Produkten des freien Feldes zugelassen sind, ist damit folgendicht in $\mathfrak{W}(M)$.

2.6.3 Die Wick-Polynome als kovarianter Funktor

Um einzusehen, dass durch die Algebren $\mathfrak{W}(M)$ eine physikalisch akzeptable Quantenfeldtheorie definiert wurde, muss überprüft werden, ob man daraus einen Funktor konstruieren kann, der alle Bedingungen in Definition 2.3.2 erfüllt. Die naheliegende Definition ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbf{Loc} \ni (M, \mathbf{g}) &\mapsto \mathcal{T}^\bullet(M)/\mathcal{T}_K^\bullet(M) \text{ und} \\ \mathcal{A} : \text{hom}_{\mathbf{Loc}}((M_1, \mathbf{g}_1), (M_2, \mathbf{g}_2)) \ni \psi &\mapsto \alpha_\psi \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_\psi : \mathcal{A}((M_1, \mathbf{g}_1)) &\rightarrow \mathcal{A}((M_2, \mathbf{g}_2)) \\ f + \mathcal{T}_K^\bullet(M_1) &\mapsto \psi_* f + \mathcal{T}_K^\bullet(M_2) . \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Dabei ist $\psi_* f = \sum_n \psi_* f_n$, mit dem *push-forward* $\psi_* f_n$ einer Distribution mit kompaktem Träger $f_n \in \mathcal{E}'(M_1^n)$. Dieser ist definiert durch

$$(\psi_* f_n)(h) = f_n(h \circ \psi^{\times n}) . \quad (2.6.15)$$

Dabei ist für jedes $h \in \mathcal{E}(M_2^n)$ die Funktion $h \circ (\psi^{\times n})$ in $\mathcal{E}(M_1^n)$, mit

$$\psi^{\times n}(x_1, \dots, x_n) = (\psi(x_1), \dots, \psi(x_n)) . \quad (2.6.16)$$

Durch (2.6.14) wird ein injektiver *-Homomorphismus definiert, wie Hollands und Wald in [23, Lemma 3.1] gezeigt haben. Der Funktor erfüllt auch die Kovarianzeigenschaft, denn

$$\alpha_{\psi \circ \psi'}([f]) = [(\psi \circ \psi')_* f] = [\psi_* (\psi'_* f)] = \alpha_\psi([\psi'_* f]) = \alpha_\psi(\alpha_{\psi'}([f])) , \quad (2.6.17)$$

wobei $[g] \stackrel{\text{def}}{=} g + \mathcal{T}_K^\bullet(M)$ für $g \in \mathcal{T}^\bullet(M)$ ist. Für die Zweipunktfunktion ω_2 gilt $\omega_2(x, y) = \omega_2(y, x)$ falls x und y raumartig zueinander liegen. Daher

ist das k -fach kontrahierte Tensorprodukt (2.6.4) kommutativ, falls $\text{supp } f$ und $\text{supp } g$ raumartig getrennt sind. Dann ist auch das Produkt (2.6.8) auf $\mathcal{T}^\bullet(M)$ kommutativ. Also ist der Funktor \mathcal{A} kausal. Die Frage, ob \mathcal{A} das Zeitschichtaxiom erfüllt, ist Gegenstand der Untersuchungen dieser Arbeit und wird in Abschnitt 3 behandelt.

2.6.4 Wickpotenzen

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch gezeigt werden, dass die „üblichen“ Wick-Potenzen $: \varphi^n(x) :$ in \mathfrak{W} enthalten sind. Dazu muss man Distributionen der Form

$$t(x_1, \dots, x_n) = \int dx f(x) \delta_M(x, x_1) \cdots \delta_M(x, x_n) \quad (2.6.18)$$

betrachten und zeigen, dass sie in $\mathcal{T}^n(M)$ liegen. Hier ist $f \in \mathcal{D}(M)$ und δ_M ist der Integralkern des Einheitsoperators $\text{id}_{\mathcal{E}(M)}$ auf dem Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathcal{E}(M)$, also

$$\int dy \delta_M(x, y) f(y) = f(x) . \quad (2.6.19)$$

Der Träger von t ist $\Delta_n \cap (\text{supp } f)^n$ mit der totalen Diagonalen $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_1 = \dots = x_n\}$. Also ist t eine symmetrische Distribution mit kompaktem Träger. Wie in Anhang B definiert, ist eine Distribution $u \in \mathcal{D}(M)$ eine Familie von Distributionen $u_\kappa \in \mathcal{D}'$ (bild (κ)), wobei κ die Karten von M sind und die Kompatibilitätsbedingung (B.1.10) erfüllt ist. In diesem Fall sind die δ_κ wieder Deltadistributionen im \mathbb{R}^k , falls M eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Genauer: Zur Distribution $\delta_M(x, \bullet)$ gehört die Familie δ_κ mit $\delta_\kappa(y) = \delta_{\mathbb{R}^k}(\kappa(x) - y)$. Es genügt also,

$$t_K(x_1, \dots, x_n) = \int dx f(x) \delta_K(x, x_1) \cdots \delta_K(x, x_n) \quad (2.6.20)$$

mit $K \equiv \mathbb{R}^n$ zu betrachten und später $WF(t_K)$ auf M zurückzuziehen. Um die Wellenfrontmenge zu berechnen, lokalisiert man nun t_K , indem man es mit einer Testfunktion $h \in \mathcal{D}(K^n)$ multipliziert. Nach [27, Theorem 7.1.14] gilt für die Fouriertransformierte

$$\widehat{ht_K}(\Xi) = (ht_K)_X \left(e^{-i\langle X, \Xi \rangle} \right). \quad (2.6.21)$$

Dabei ist $X = (x_1, \dots, x_n)$ ein Punkt in K^n , $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in (T^*K)^n$ und der Index X an der Distribution (ht_K) bedeutet, dass ht_K auf sein Argument, aufgefasst als Funktion von X , angewendet werden soll. Man erhält also

$$\widehat{ht_K}(\Xi) = \int dx f(x) h(x, \dots, x) e^{-ix \sum_i \xi_i} = \widehat{gf} \left(\sum_i \xi_i \right), \quad (2.6.22)$$

mit der Testfunktion $g \in \mathcal{D}(K)$, $g(x) = h(x, \dots, x)$. Das Produkt der Testfunktionen g und f ist wieder eine Testfunktion und ihre Fouriertransformierte ist eine schnell abfallende Funktion im Schwartzraum $\mathcal{S}(K)$. Im Argument steht aber die Summe der ξ_i , d.h. in Richtungen Ξ mit $\sum_i \xi_i = 0$ fällt die Fouriertransformierte nicht schnell ab, sondern ist konstant. Man hat also mit der Notation aus Anhang B

$$\Sigma(ht_K) = \left\{ \Xi \in T^*K \mid \sum_i \xi_i = 0 \right\} \quad (2.6.23)$$

Es ist klar, dass diese Eigenschaft erhalten bleibt, wenn man die Schnittmenge dieser Richtungen über alle Testfunktionen h bildet, die um einen Punkt $x \in \Delta_n$ konzentriert sind:

$$\Sigma_x(t_K) = \bigcap_h \Sigma(ht_K) = \left\{ \Xi \in T^*K \mid \sum_i \xi_i = 0 \right\}, \text{ für } h \in \mathcal{D}(K^n), h(x) \neq 0. \quad (2.6.24)$$

Da der in Anhang B definierte pull-back von Kotangentialvektoren ein Isomorphismus zwischen den beteiligten Kotangentialräumen an einem Punkt ist, bleibt diese Struktur erhalten, wenn man sie auf die Mannigfaltigkeit zurückzieht. Es gilt also

$$WF(t) = \left\{ \Xi \in T^*M \mid \sum_i \xi_i = 0 \right\}. \quad (2.6.25)$$

Also ist $t \in \mathcal{T}^\bullet(M^n)$, denn wenn $\sum_i \xi = 0$, können nicht alle ξ_i gleichzeitig im Vorwärts- bzw. Rückwärtslichtkegel sein.

2.7 Wechselwirkende Theorien

In diesem Abschnitt wird zusammengefasst, wie in der algebraischen Quantenfeldtheorie wechselwirkende Theorien konstruiert werden können. Es ist bisher nicht gelungen, eine wechselwirkende Theorie in vier Dimensionen nichtperturbativ zu konstruieren, d.h. man muss die Algebra der wechselwirkenden Felder *störungstheoretisch* aus der Algebra der freien Felder konstruieren.

2.7.1 Kausale Störungstheorie

Die grundlegende Idee zur Behandlung von Wechselwirkungen ist, dass in der fernen Vergangenheit und Zukunft die wechselwirkenden Quantenfelder wie freie Felder aussehen. Die Wechselwirkung soll also zunächst nur in einem beschränkten Raumzeitgebiet „angeschaltet“ sein. Das zentrale Objekt, mit dessen Hilfe Wechselwirkungen dieser Art beschrieben werden, ist die

sogenannte *S-Matrix*. Sie ist ein operatorwertiges Funktional $S(f)$ auf dem Raum $\mathcal{D}(M, \mathcal{V})$. Dies ist der Raum der Testfunktionen auf M mit Werten im Vektorraum \mathcal{V} der zulässigen Wechselwirkungslagrangedichten. f hat also die Form $f = \sum_i f_i(x)A_i(x)$ mit lokalen Funktionalen A_i und reellwertigen Testfunktionen f_i . Die f_i haben die Bedeutung von Kopplungskonstanten, welche nur auf einem kompakten Raumzeitgebiet von Null verschieden sind.

Die S-Matrix ist dann ein Operator, der die Algebra der freien Felder in der Vergangenheit auf die Algebra der freien Felder in der Zukunft abbildet. Zu einer freien Feldkonfiguration F_- muss es eine Feldkonfiguration F aus der wechselwirkenden Algebra geben, die in der fernen Vergangenheit mit F_- übereinstimmt. Zu F gibt es aber eine freie Feldkonfiguration F_+ , die zu späten Zeiten mit F übereinstimmt. Die Wirkung von S soll nun gerade darin bestehen, dass sie F_- auf F_+ abbildet. Da aber die freien Algebren asymptotisch mit der Algebra der wechselwirkenden Felder übereinstimmen sollen, kann man die S-Matrix als Zeitentwicklungsoperator der wechselwirkenden Algebra von sehr frühen zu sehr späten Zeiten auffassen.

Durch die Faktorisierungseigenschaft $U(r, t) = U(s, t)U(r, s)$ für $r \leq s \leq t$ des Zeitentwicklungsoperators U im Wechselwirkungsbild ist die folgende Kausalitätsforderung an die S-Matrix motiviert [3]:

$$S(f_1 + f_2 + f_3) = S(f_1 + f_2)S(f_2)^{-1}S(f_2 + f_3) , \quad (2.7.1)$$

falls eine Cauchy-Fläche existiert, so dass $\text{supp } f_1$ in der Zukunft und $\text{supp } f_3$ in der Vergangenheit liegt.

Der Zusammenhang mit dem Zeitentwicklungsoperator legt auch einen Ansatz für die Konstruktion der S-Matrix aus der freien Algebra, d.h. ohne die explizite Benutzung der wechselwirkenden Algebra, nahe. Diese störungstheoretische Definition der S-Matrix ist die für den Zeitentwicklungsoperator gültige Dyson-Reihe, siehe z.B. [38, Kapitel 3.5]

$$\begin{aligned} S(f) &= T \exp \left(i \int f(x) dx \right) \\ &= \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n T (f(x_1) \cdots f(x_n)) . \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Dabei ist T der Zeitordnungsoperator. Dieser wird üblicherweise dadurch definiert, dass man ein Produkt von Funktionalen $A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)$ in eine solche Reihenfolge bringt, dass die Zeitkomponenten der Argumente von links nach rechts abfallen:

$$T (A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)) = A_{\pi(1)}(x_{\pi(1)}) \cdots A_{\pi(n)}(x_{\pi(n)}) , \quad (2.7.3)$$

mit einer Permutation π der Menge $\{1, \dots, n\}$, so dass $x_{\pi(i)}^0 \geq x_{\pi(i+1)}^0$. Diese Vorschrift ist unstetig in der Zeit, so dass (2.7.3) keine wohldefinierte Distribution liefert. Nur wenn der Raum der Testfunktionen so eingeschränkt wird,

dass die Träger keine zusammenfallenden Punkte enthalten, ist die Zeitordnung (2.7.3) wohldefiniert.

Epstein und Glaser haben in [13] eine Methode entwickelt, die zeitgeordneten Produkte induktiv zu konstruieren. Diese Methode wurde in [3] verallgemeinert und in [23] erweitert. Die Kernidee ist dabei, die Kausalitätsbedingung (2.7.1) auszunutzen, um zeitgeordnete Produkte durch zeitgeordnete Produkte kleinerer Ordnung auszudrücken. Man charakterisiert die zeitgeordneten Produkte zunächst indirekt durch diese Bedingung und gewisse zusätzliche Forderungen. Dann kann man überprüfen, inwiefern die zeitgeordneten Produkte durch die Bedingungen bereits eindeutig festgelegt sind. Es stellt sich heraus [3, 23], dass die Mehrdeutigkeit, die bei dieser indirekten Konstruktion entsteht, genau der üblichen Renormierungsfreiheit entspricht.

Es sollen nun einige wichtige Schritte in der induktiven Konstruktion der zeitgeordneten Produkte genannt werden. Als erstes legt man die Bedingungen fest, die die zeitgeordnete Produkte erfüllen müssen. Falls in Ausdrücken der Form $T(A_1(x_1) \cdots A_n(x_n))$ nicht alle Punkte x_1, \dots, x_n zusammenfallen, so kann man immer Teilmengen durch Cauchy-Flächen voneinander trennen. Aus (2.7.1) und (2.7.2) ergibt sich dann die Forderung einer *kausalen Faktorisierungseigenschaft*:

$$T(A_1(x_1) \cdots A_n(x_n)) = T\left(\prod_{i \in I} A_i(x_i)\right) T\left(\prod_{j \in I^c} A_j(x_j)\right), \quad (2.7.4)$$

falls es eine Partition von $\{1, \dots, n\}$ in zwei nichtleere Teilmengen I und I^c gibt, so dass kein Punkt x_i , mit $i \in I$, in der Vergangenheit eines Punktes x_j , mit $j \in I^c$, liegt. D.h. $x_i \notin J_-(x_j) \forall i \in I, j \in I^c$.

Außerdem fordert man, dass die zeitgeordneten Produkte wohldefinierte operatorwertige Distributionen auf dem GNS-Hilbertraum eines quasifreien Hadamard-Zustands ω sind. Die zeitgeordneten Produkte sollen Elemente der erweiterten Wick-Polynom-Algebra \mathfrak{W} sein und symmetrisch unter dem Zeitordnungssymbol. Weiterhin wird eine Unitaritätsforderung und eine Forderung an den Kommutator eines zeitgeordneten Produkts mit einem freien Feld gestellt. Da in gekrümmten Raumzeiten keine Translationsinvarianz existiert, wird die sogenannte *mikrolokale Spektrumsbedingung* [3, 5] gestellt, die eine Einschränkung an die Wellenfrontmenge der zeitgeordneten Produkte ist. Sie kann als lokaler Ersatz für die Spektrumsbedingung an Quantenfeldtheorien im Minkowskiraum angesehen werden, welche aus der dort vorhandenen Translationsinvarianz folgt.

Nun kann man mit der induktiven Konstruktion beginnen. Für die untersten Ordnungen setzt man $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ und $T(A(x)) = A(x)$. Dann nimmt man induktiv an, dass die zeitgeordneten Produkte bis zu einer gewissen

Ordnung konstruiert sind und alle gestellten Bedingungen erfüllen. Es stellt sich heraus, dass die zeitgeordneten Produkte der nächst höheren Ordnung hierdurch bereits bis auf die totale Diagonale $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n | x_1 = \dots = x_n\}$ eindeutig festgelegt sind. Das heißt, man erhält Distributionen auf $\mathcal{D}(M^n \setminus \Delta_n, \mathcal{V})$, die wieder die gestellten Bedingungen erfüllen. Der nächste Schritt ist es nun, diese Distributionen auf ganz M^n fortzusetzen. Dies ist die Renormierung. Da diese Arbeit sich nicht mit Renormierungsproblemen beschäftigt, wird hier nicht näher auf die Theorie der Fortsetzung von Distributionen eingegangen. Wichtig ist, dass die S-Matrix im Sinne formaler Potenzreihen in der Kopplungskonstanten konstruiert werden kann und dass sie die geforderten Eigenschaften besitzt, insbesondere (2.7.1).

Auf gekrümmten Raumzeiten sind die Renormierungsfreiheiten zunächst größer als im Minkowskiraum. Wie in Abschnitt 2.3 erwähnt, liegt dies am Wegfall der Poincaré-Symmetrie. Bei der Fortsetzung von Distributionen treten Mehrdeutigkeiten in Form von lokalen Termen auf, die in jeder Ordnung zu den renormierten Größen addiert werden können. Beispielsweise haben Hollands und Wald in [23] gezeigt, dass Wickpotenzen $\varphi^k(x)$ der Ordnung k durch die Renormierungsbedingungen bis auf Terme der Form $\sum_{i=0}^{k-2} C_{k-i}(x)\varphi_i(x)$ eindeutig festgelegt sind. Ohne einen Ersatz für die Bedingung der Poincaré-Invarianz können die Funktionen C_{k-i} ein beliebiges Verhalten haben, d.h. sie stellen eine unendliche Menge von Renormierungsparametern dar. Hollands und Wald haben in [23] zusätzliche Bedingungen angegeben, die die Mehrdeutigkeiten in der Renormierung stark reduzieren. Diese Bedingungen betreffen das Verhalten der zeitgeordneten Produkte unter Skalentransformationen und die Stetigkeit unter Variationen der Metrik und der Parameter m und ξ . Eine weitere wichtige Forderung ist, dass die zeitgeordneten Produkte (und auch die Wickpolynome selbst, die unter dem Zeitordnungssymbol stehen) *lokal kovariante Felder* sein müssen. Der Zusammenhang dieser Forderung mit dem Begriff der natürlichen Transformation wurde in Abschnitt 2.3.3 dargestellt. Die Forderung nach kovarianten Feldern übersetzt sich in Bedingungen an die C_{k-i} . Diese müssen nun Polynome in der Metrik, dem Krümmungsskalar und seinen Ableitungen, sowie der Masse m und der Krümmungskopplung ξ sein. Die beiden anderen Forderungen reduzieren die Freiheiten weiter, so dass in jeder Ordnung der Störungstheorie nur eine endliche Anzahl von Renormierungsparametern übrig bleibt.

Es wurde deutlich, dass die S-Matrix störungstheoretisch konstruiert werden kann. Dabei ist der Begriff des lokal kovarianten Feldes von zentraler Bedeutung, der eng mit der funktoriellen Formulierung der Quantenfeldtheorie in Abschnitt 2.3 verknüpft ist.

2.7.2 Die Algebra der wechselwirkenden Felder

Mit Hilfe der S-Matrix lässt sich auch die Algebra der wechselwirkenden Felder konstruieren. Zunächst werden die sogenannten *relativen S-Matrizen* definiert:

$$S_g(f) \stackrel{\text{def}}{=} S(g)^{-1}S(f+g) . \quad (2.7.5)$$

Man hält nun g fest und betrachtet $S_g(f)$ als Funktional von f . Diese Objekte haben die Eigenschaft, dass sie selbst wieder Lösungen der Kausalitätsbedingung (2.7.1) sind:

$$\begin{aligned} S_g(f_1 + f_2 + f_3) &= S(g)^{-1}S(f_1 + f_2 + f_3 + g) \\ &= S(g)^{-1}S(f_1 + f_2 + g)S(f_2 + g)^{-1}S(f_2 + f_3 + g) \\ &= S_g(f_1 + f_2)S(f_2 + g)^{-1}S(g)S(g)^{-1}S(f_2 + f_3 + g) \\ &= S_g(f_1 + f_2)S_g(f_2)^{-1}S_g(f_2 + f_3) , \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

falls eine Cauchy-Fläche existiert, so dass $\text{supp } f_1$ in der Zukunft und $\text{supp } f_3$ in der Vergangenheit liegt. Insbesondere erfüllen die relativen S-Matrizen die Kommutatorrelation

$$[S_g(f), S_g(h)] = 0 \quad (2.7.7)$$

falls $\text{supp } f$ und $\text{supp } g$ raumartig getrennt sind⁷. Die perturbativ konstruierten relativen S-Matrizen $S_g(f)$ sind Potenzreihen in f , wobei jeder Summand eine Potenzreihe in g ist. Man definiert nun das wechselwirkende Feld A_g , für $A \in \mathcal{V}$ als die erste Ordnung von dieser Potenzreihe in A :

$$A_g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta}{\delta h(x)} S_g(hA) . \quad (2.7.8)$$

Damit hat man die wechselwirkenden Felder als Potenzreihen in der Wechselwirkung g definiert, die lokale Vertauschungsrelationen (2.7.7) erfüllen. Für eine raumzeitunabhängige Kopplung, also konstantes g , ist dies gerade Bogoliubovs Definition der wechselwirkenden Felder [2].

Die *Algebra der wechselwirkenden Felder* in einem Raumzeitgebiet \mathcal{O} wird erzeugt von relativen S-Matrizen $S_g(f)$ mit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathcal{V})$. Sei \mathcal{O}' eine Umgebung eines global hyperbolischen Gebiets, welches \mathcal{O} enthält. Wenn die Wechselwirkung außerhalb von \mathcal{O}' variiert wird, ändert sich die algebraische Struktur der wechselwirkenden Algebra $\mathfrak{A}_g(\mathcal{O})$ nicht. Denn in diesem Fall verschwindet die Differenz der Wechselwirkungen $g - g'$ in \mathcal{O}' . Daher kann man $g - g'$ zerlegen in $g - g' = g_+ + g_-$, so dass es Cauchy-Flächen Σ und

⁷Zwei Teilmengen $A, B \subset M$ heißen raumartig getrennt, wenn es zu keinem $(x, y) \in A \times B$ eine kausale Kurve gibt, die x und y verbindet. In diesem Fall existieren Cauchy-Flächen Σ und Σ' , so dass $\text{supp } h \subset J_-(\Sigma)$, $\text{supp } f \subset J_+(\Sigma)$, $\text{supp } h \subset J_+(\Sigma')$ und $\text{supp } f \subset J_-(\Sigma')$. Damit folgt die Kommutatoreigenschaft aus (2.7.1).

Σ' gibt mit $\text{supp } g_+ \subset J_+(\Sigma)$, $\emptyset \subset J_-(\Sigma)$, $\text{supp } g_- \subset J_-(\Sigma')$, $\emptyset \subset J_+(\Sigma')$. Dann gilt wegen (2.7.1)

$$\begin{aligned}
S_g(f) &= S(g)^{-1}S(g+f) \\
&= S(g'+g_++g_-)^{-1}S(g'+g_++g_-+f) \\
&= S(g'+g_++g_-)^{-1}S(g'+g_++g_-)S(g'+g_-)^{-1}S(g'+g_-+f) \\
&= S(g'+g_-)^{-1} \mathbf{1} S(g'+f)S(g')^{-1}S(g'+g_-) \\
&= S(g'+g_-)^{-1}S(g')S(g')^{-1}S(g'+f)S(g'+f)S(g')^{-1}S(g'+g_-) \\
&= S_{g'}(g_-)^{-1}S_{g'}(f)S_{g'}(g_-) .
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

Es gibt also ein unitäres Element $V = S_{g'}(g_-)^{-1}$ aus der wechselwirkenden Algebra zur Wechselwirkung g' , so dass $S_g(f) = VS_{g'}(f)V^{-1}$ für alle $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}, \mathcal{V})$.

Da die Wechselwirkung g kompakten Träger haben muss, damit $S(g)$ existiert, ist zunächst nicht klar, wie man die wechselwirkende Algebra $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(N)$ eines nichtkompakten Gebiets N definieren kann. Dabei soll \mathcal{L} eine konstante Wechselwirkungslagrangedichte aus \mathcal{V} sein, also nicht durch Multiplikation mit einer Testfunktion abgeschnitten werden. Die Konstruktion von $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(N)$ wird hier wie in [12] durchgeführt. Man verwendet wieder den induktiven Limes, ähnlich wie in Abschnitt 2.3, der in Anhang A erklärt wird. Dazu ist es zunächst notwendig, die Observablenalgebra $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ einer Raumzeitregion \mathcal{O} zu definieren. Die Algebren $\mathfrak{A}_{g\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ mit Testfunktionen g , die in einer Umgebung von \mathcal{O} gleich Eins sind, kommen hierfür in Frage. Wie in (2.7.9) gezeigt wurde, ist ihre algebraische Struktur unabhängig von der Wahl von g . Dies nutzt man für die Definition aus, indem man das Bündel

$$\bigcup_{g \in \mathcal{G}(\mathcal{O})} g \times \mathfrak{A}_{g\mathcal{L}}(\mathcal{O}) \tag{2.7.10}$$

betrachtet, wobei $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ die Menge der Testfunktionen ist, die in einer Umgebung von \mathcal{O} identisch Eins sind. In diesem Bündel betrachtet man Schnitte

$$A = (A_g)_{g \in \mathcal{G}(\mathcal{O})}, \quad A_g \in \mathfrak{A}_{g\mathcal{L}}(\mathcal{O}), \tag{2.7.11}$$

die die Bedingung $VA_g = A_{g'}V$ erfüllen, falls V der Erzeuger einer unitären Transformation nach (2.7.9) ist. Auf diese Weise hat man genau die Felder in einem Schnitt zusammengefasst, die physikalisch äquivalent sind. Insbesondere definieren die wechselwirkenden Felder $S_{g\mathcal{L}}(f) \in \mathfrak{A}_{g\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ zulässige Schnitte durch

$$(S_{\mathcal{L}}(f))_g \stackrel{\text{def}}{=} S_{g\mathcal{L}}(f) . \tag{2.7.12}$$

Die Observablenalgebra $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ wird nun definiert als die Algebra dieser Schnitte, mit punktweiser Multiplikation und Addition. Zu einer Inklusion

$\mathcal{O}_1 \hookrightarrow \mathcal{O}_2$ erhält man eine Injektion $i_{12} : \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ der entsprechenden Algebren, indem man die Schnitte aus $A_g \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O})$ auf Testfunktionen einschränkt, die sogar in einer Umgebung von \mathcal{O}' identisch Eins sind. Dies definiert wieder ein induktives System, denn aus $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3$ folgt $i_{23} \circ i_{12} = i_{13}$ und $i_{11} = \text{id}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_1)}$. Daher kann man wieder den induktiven Limes bilden und die wechselwirkende Algebra der gesamten Raumzeit definieren:

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}) . \quad (2.7.13)$$

Kapitel 3

Beweis des Zeitschichtaxioms für die Wick-Polynome

In diesem Kapitel wird die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms für die in Abschnitt 2.6 definierten Algebren $\mathfrak{W}(M)$ der Wick-Polynome bewiesen. Dies ist einerseits von generellem Interesse, da das Zeitschichtaxiom eine fundamentale Forderung an jede physikalische Quantenfeldtheorie ist, wie in Abschnitt 2.3 dargestellt wurde. Andererseits enthält die Algebra der Wick-Polynome auch die zeitgeordneten Produkte, die, wie in Abschnitt 2.7 beschrieben, die Grundlage für die störungstheoretische Definition wechselwirkender Quantenfeldtheorien bilden. In Kapitel 4 werden die Ergebnisse dieses Kapitels daher für den Beweis der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms in wechselwirkenden Theorien benötigt.

3.1 Die Cauchy-Entwicklung von Distributionen

Die grundlegende Idee dieses Beweises stammt aus einer Bemerkung über die Cauchy-Entwicklung von Distributionen in [16]. Dort wird gezeigt, dass man eine Distribution u , die die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, bereits überall kennt, wenn man sie auf einer Cauchy-Fläche kennt. Diese Überlegung wird nun nachvollzogen. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}(M)$ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung, falls $u(g) = 0$ für jede Testfunktion g der Form $g = (\square + m^2)h$ mit einer Testfunktion h . Sei nun f eine Testfunktion. Man wählt eine Cauchy-Fläche Σ_{t_1} in der Vergangenheit von $\text{supp}(f)$ und eine weitere Cauchy-Fläche Σ_{t_0} in der Vergangenheit von Σ_{t_1} . Sei eine glatte Funktion $\chi \in \mathcal{C}^\infty$ so gewählt, dass $\chi(x) = 1$ für $x \in J_+(\Sigma_{t_1})$ und $\chi(x) = 0$ für $x \in J_-(\Sigma_{t_0})$. Sei L die avancierte Lösung der Klein-Gordon-Gleichung mit f als Quelle, also $(\square + m^2)L = f$. Mit der avancierten Green's Funktion Δ^{av} des Klein-Gordon-Operators erhält man $L(x) = \int dx \Delta^{av}(x, y) f(y)$. Sei $l = \chi L$. Der Träger

von l ist nach Proposition C.3 in einem Kompaktum enthalten, denn er ist enthalten in der Vergangenheit des Kompaktums $\text{supp } f$, geschnitten mit der vergangenheitskompakten Menge $\text{supp } \chi$. Also ist l eine Testfunktion. Man definiert nun die Testfunktion

$$g = f - (\square + m^2)l . \quad (3.1.1)$$

Es gilt $\text{supp } (g) \subset J_+(\Sigma_{t_0}) \cap J_-(\Sigma_{t_1})$, d.h. g ist nur zwischen den Cauchy-Flächen Σ_{t_0} und Σ_{t_1} von Null verschieden. Dies sieht man wie folgt: Für $x \in J_-(\Sigma_{t_0})$ gilt, dass $f(x) = 0$ und $l(x) = 0$, da l mit χ abgeschnitten wurde. Für $x \in J_+(\Sigma_{t_1})$ ist $\chi(x) = 1$, also $(\square + m^2)l(x) = f(x)$, also $g(x) = 0$. Da u die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt, gilt aber $u(f) = u(g + (\square + m^2)l) = u(g)$. Man kennt also $u(f)$ für beliebige Testfunktionen, wenn man es für alle Testfunktionen mit Träger in der Umgebung einer Cauchy-Fläche kennt.

Im nächsten Abschnitt wird diese Konstruktion so verallgemeinert, dass sie auf die Testdistributionen $f \in \mathcal{T}^\bullet(M)$ der Wick-Polynome anwendbar ist. Dazu muss das Argument in zwei Hinsichten angepasst werden: Erstens muss berücksichtigt werden, dass die Distributionen nun von n Raumzeitvariablen abhängen. Die Operationen aus obiger Überlegung müssen daher in geeigneter Weise auf alle Argumente angewendet werden. Zweitens muss sichergestellt werden, dass man wieder Distributionen erhält, die die Bedingungen an die Wellenfrontmenge erfüllen. Dies geschieht mit Hilfe des Theorems über die Ausbreitung von Singularitäten von Hörmander.

3.2 Der Beweis

Im Folgenden sei M stets eine global hyperbolische Raumzeit. Zur Vereinfachung der Darstellung wird wieder die in Abschnitt 2.1 eingeführte Schreibweise verwendet: Zur Metrik \mathbf{g} auf M sei K wie bisher der Klein-Gordon-Operator

$$K = \square - \xi R - m^2 \quad (3.2.1)$$

mit $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$. Dabei ist ∇ die durch \mathbf{g} induzierte kovariante Ableitung. ξ ist die Kopplung an die skalare Krümmung R und m die Masse. Wenn K nur auf das i -te Argument einer Distribution in n Raumzeitvariablen angewendet werden soll, wird dafür der Differentialoperator K_i verwendet, mit¹

$$K_i : \mathcal{C}^\infty(M^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M^n) ,$$

¹In Ausdrücken der Form A_1, \dots, A_n bedeutet ein $\widehat{}$ über dem i -ten Term dessen Auslassung:

$$A_1, \dots, \widehat{A_i}, \dots, A_n \stackrel{\text{def}}{=} A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n . \quad (3.2.2)$$

Analoges gilt für Produkte.

$$(K_i \Phi)(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (K \Phi^{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n})(x_i), \quad (3.2.3)$$

für $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(M^n)$, mit $\Phi^{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n} \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\Phi^{x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n}(x) = \Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (3.2.4)$$

Außerdem sei für eine glatte Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die Funktion $\phi_i \in \mathcal{C}^\infty(M^n)$,

$$\phi_i(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_i). \quad (3.2.5)$$

Die Elemente der Algebra $\mathfrak{W}(M)$ sind charakterisiert durch die Äquivalenzklassen $[f] = f + \mathcal{T}_K^\bullet(M)$, wobei $f \in \mathcal{T}^\bullet(M)$ eine zulässige Test-Distribution ist. Die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms ist also gezeigt, wenn man zu jedem $f \in \mathcal{T}^\bullet(M)$ ein $g \in \mathcal{T}^\bullet(M)$ in derselben Äquivalenzklasse angeben kann, so dass der Träger von g in einer beliebig vorgegebenen Umgebung einer Cauchy-Fläche liegt. Dies ist der Inhalt der folgenden

Proposition 3.2.1. *Sei $f \in \mathcal{T}^n(M)$. Sei N eine Umgebung einer Cauchy-Fläche Σ in der Vergangenheit von $\text{supp } f$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{T}^n(M)$, welches die Eigenschaften*

$$(i) \quad g = f + i \text{ mit } i \in \mathcal{T}_K^\bullet(M) \cap \mathcal{T}^n(M)$$

$$(ii) \quad \text{supp } g \subset N \quad .$$

besitzt.

Beweis. Es existiert ein Kompaktum $C \subset M$, so dass $\text{supp } f \subset C^n$. Sei Σ_1 eine Cauchy-Fläche in der Vergangenheit von C und sei Σ_0 eine weitere Cauchy-Fläche in der Vergangenheit von Σ_1 . Sei außerdem $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine glatte Funktion, so dass

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in J_+(\Sigma_1) , \\ 0 & \text{für } x \in J_-(\Sigma_0) . \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Man definiert nun mit Hilfe der avancierten Green's Funktion Δ^{av} des Klein-Gordon Operators den Operator $\alpha_i : \mathcal{T}^n(M) \rightarrow \mathcal{T}^n(M)$ durch

$$(\alpha_i f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - K_i \chi(x_i) \int dy \Delta^{av}(x_i, y) f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (3.2.7)$$

Sei nun $g \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 \cdots \alpha_n f$. Im Folgenden wird gezeigt, dass $g \in \mathcal{T}^n(M)$ und dass g die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt.

Um zu beweisen, dass $g \in \mathcal{T}^n(M)$, muss gezeigt werden, dass g eine symmetrische Distribution mit kompaktem Träger ist, deren Wellenfrontmenge

die Bedingung (2.6.7) erfüllt. Die Symmetrie folgt offensichtlich aus der Definition von g , denn auf jede Komponente der symmetrischen Distribution f wird der gleiche Operator angewendet. Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge an. Dass g kompakten Träger hat, sieht man wie folgt: Aufgrund der Trägereigenschaften von Δ^{av} liegt der Träger von g in $(J_-(C) \cap \text{supp } \chi)^n$. Da jedoch $\text{supp } \chi$ vergangenheitskompakt ist, folgt mit Proposition C.3, dass diese Menge in einem Kompaktum enthalten ist.

Für den Beweis der Wellenfrontmengeneigenschaft² genügt es, zu zeigen dass die Anwendung von α_i auf f für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Wellenfrontmenge nicht in unzulässiger Weise verändert. Da die Anwendung von Differentialoperatoren und die Multiplikation mit glatten Funktionen die Wellenfrontmenge aber nicht vergrößern, genügt es sogar, zu zeigen dass $WF(\Delta_i^{av} f) \cap \overline{V_-^n \cup V_+^n} = \emptyset$, mit

$$(\Delta_i^{av} f)(x_1, \dots, x_n) = \int dy \Delta^{av}(x_i, y) f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (3.2.8)$$

K_i ist ein eigentlich getragener Differentialoperator auf M^n mit reellem, homogenen Hauptsymbol

$$k_i(X, \Xi) = g_{x_i}(\xi_i, \xi_i) \quad (3.2.9)$$

für $(X, \Xi) \in T^*(M^n)$, $X = (x_1, \dots, x_n)$, $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und mit der Metrik g auf M . Per Definition der avancierten Green's Funktion gilt $K_i \Delta_i^{av} f = f$. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung von Hörmanders Theorem über die Ausbreitung von Singularitäten erfüllt (Satz B.2.2 im Anhang). Angenommen $(X_0, \Xi_0) \in WF(\Delta_i^{av} f) \cap \overline{V_-^n \cup V_+^n}$. Aus Hörmanders Theorem folgt dann, dass $(X_0, \Xi_0) \in \text{Char } K_i$, d.h. $k_i(X_0, \Xi_0) = 0$. Sei γ die eindeutig bestimmte Kurve in $T^*(M^n)$, für die $\gamma(0) = (X_0, \Xi_0)$ und $\gamma'(t) = H_{k_i}(\gamma(t))$ gilt, mit dem Hamilton'schen Vektorfeld H_{k_i} zur Hamiltonfunktion k_i . γ hat die Form

$$\gamma(t) = \left((q_1(t), \dots, q_n(t)), (p_1(t), \dots, p_n(t)) \right) \quad (3.2.10)$$

mit $(q_j(t), p_j(t)) \in T^*(M) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, t \in \mathbb{R}$. Die Kurve γ ist also eine Bicharakteristik von K_i . Nach [35, Proposition 4.2] sind die Bicharakteristiken des Klein-Gordon-Operators Nullgeodäten-Streifen, d.h. Kurven in T^*M von der Form $(s(t), l(t))$, wobei s eine Nullgeodäte ist und $l(t)$ der zu $s'(t)$ duale Vektor. Da $k_i(X, \Xi)$ nur von x_i und ξ_i abhängt, ist nur die i -te Komponente von $H_{k_i}(X, \Xi)$ von Null verschieden, d.h. $(q_j(t), p_j(t)) = (q_j(0), p_j(0)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ für $i \neq j$. Also ist (q_i, p_i) ein Nullgeodäten-Streifen in $T^*(M)$. Insbesondere ist p_i immer lichtartig. Also gilt $\gamma(t) \in \overline{V_-^n \cup V_+^n} \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Aus der

²In diesem Teil des Beweises wird Hörmanders Satz über die Ausbreitung von Singularitäten verwendet. Dieser ist als Satz B.2.2 im Anhang wiedergegeben. Die verwendeten Begriffe aus der Differentialgeometrie und aus der Theorie der Differentialoperatoren werden dort ebenfalls erläutert.

Annahme über $WF(f)$ folgt daher $\gamma(\mathbb{R}) \cap WF(f) = \emptyset$. Mit Hörmanders Theorem folgt nun

$$\gamma(\mathbb{R}) \subset WF(\Delta_i^{av} f) . \quad (3.2.11)$$

Wegen Proposition C.1 existiert eine Cauchy-Fläche Σ , so dass $\text{supp } \Delta_i^{av} f \subset (J_-(\Sigma))^n$. Da q_i eine kausale Kurve in M ist, gilt $J_+(\Sigma) \cap q_i(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Also folgt

$$(q_1(\mathbb{R}), \dots, q_n(\mathbb{R})) \not\subset \text{supp } \Delta_i^{av} f . \quad (3.2.12)$$

Doch dies steht im Widerspruch zu (3.2.11), also muss

$$WF(\Delta_i^{av} f) \cap \overline{V_-^n \cup V_+^n} = \emptyset$$

gelten, was zu zeigen war .

Die Eigenschaft (i) ist also offensichtlich erfüllt: i hat die richtige Wellenfrontmenge, wie eben gezeigt. Dass es dann auch in $\mathfrak{T}_K^\bullet(M)$ liegt, sieht man an der Definition der α_i , denn in jedem Summanden steht mindestens ein Klein-Gordon Operator. Um die stärkere Trägereigenschaft (ii) zu zeigen, definiert man eine Familie von Teilmengen $(J_i^s)_{(i,s) \in \{1, \dots, n\} \times \{+, -\}}$ durch

$$\begin{aligned} J_i^+ &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \in J_+(\Sigma_{t_1}) \setminus \Sigma_{t_1} \right\}, \\ J_i^- &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \in J_-(\Sigma_{t_0}) \setminus \Sigma_{t_0} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Dies ist eine offene Überdeckung von $M^n \setminus (J_-(\Sigma_{t_1}) \cap J_+(\Sigma_{t_0}))^n$, denn falls ein x_i nicht in $J_-(\Sigma_{t_1}) \cap J_+(\Sigma_{t_0})$ liegt, so muss x entweder in J_i^+ oder in J_i^- liegen. Also existiert nach [8, Theorem 3.2] eine Zerlegung der Eins $(\varepsilon_i^s)_{(i,s) \in \{1, \dots, n\} \times \{+, -\}}$, so dass

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^s &\in \mathcal{C}^\infty \left(M^n \setminus (J_-(\Sigma_{t_1}) \cap J_+(\Sigma_{t_0}))^n \right), \\ \sum_{i,s} \varepsilon_i^s(x) &= 1 \quad \forall x \in M^n \setminus (J_-(\Sigma_{t_1}) \cap J_+(\Sigma_{t_0}))^n, \\ \text{supp } \varepsilon_i^s &\subset J_i^s . \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Für $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(M^n)$ mit $\text{supp } \Phi \cap (J_-(\Sigma_{t_1}) \cap J_+(\Sigma_{t_0}))^n = \emptyset$, gilt $\Phi = \sum_{i,s} \varepsilon_i^s(x) \Phi$, also folgt aus der Linearität von Distributionen

$$(\alpha_1 \dots \alpha_n f_n)(\Phi) = \sum_i (\alpha_1 \dots \alpha_n f_n)(\varepsilon_i^+ \Phi) + \sum_i (\alpha_1 \dots \alpha_n f_n)(\varepsilon_i^- \Phi) . \quad (3.2.15)$$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 \dots \alpha_n f_n)(\varepsilon_i^+ \Phi) \\ &= (\alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_n f_n)(\varepsilon_i^+ \Phi) - (K_i \chi_i(\Delta_i^{av} \alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_n f_n))(\varepsilon_i^+ \Phi) \\ &= (\alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_n f_n)(\varepsilon_i^+ \Phi) - (K_i(\Delta_i^{av} \alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_n f_n))(\varepsilon_i^+ \Phi) \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

wobei die $\chi_i \varepsilon_i^+ = \varepsilon_i^+$ und die Notation $\chi_i(x_1, \dots, x_n) = \chi(x_i)$ verwendet wurden. Die erste Summe in (3.2.15) verschwindet also. Die Summanden der zweiten haben die Form

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \dots \alpha_n f_n)(\varepsilon_i^- \Phi) \\ &= (\alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_n f_n)(\varepsilon_i^- \Phi) - (K_i \Delta_i^{av} \alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_n f_n) (\chi_i \varepsilon_i^- \Phi) . \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Die Terme auf der rechten Seite verschwinden einzeln. Der erste ist Null, da $\text{supp } \varepsilon_i^- \Phi \subset M^{i-1} \times J_-(\Sigma_{t_0}) \times M^{n-i}$ aber $\text{supp } \alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_n f_n \subset M^{i-1} \times X \times M^{n-i}$ und $X \cap J_-(\Sigma_{t_0}) = \emptyset$. Der zweite verschwindet, da $\chi_i \varepsilon_i^- = 0$. Also verschwinden alle Terme auf der rechten Seite von (3.2.15). Damit ist die Trägereigenschaft gezeigt, denn zu jeder Umgebung N einer Cauchy-Fläche lassen sich die Cauchy-Flächen Σ_{t_0} und Σ_{t_1} so wählen, dass $S = J_+(\Sigma_{t_0}) \cap J_-(\Sigma_{t_1}) \subset N$. Wenn nun, wie eben gezeigt, $g(\Phi)$ verschwindet falls $\text{supp } \Phi \cap S^n = \emptyset$, dann ist per Definition des Trägers einer Distribution $\text{supp } g \subset S^n$. \square

Mit diesem Ergebnis ist es nun leicht, die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms auch für die konkrete Hilbertraumdarstellung $\mathfrak{W}(M)$ zu zeigen:

Satz 3.2.2. *Sei M eine global hyperbolische Raumzeit und sei N eine Umgebung einer Cauchy-Fläche Σ von M . Dann gilt*

$$\mathfrak{W}(N) = \mathfrak{W}(M) . \quad (3.2.18)$$

Beweis. Sei

$$\mathfrak{W}(M) \ni F(\varphi) = \sum_{n=0}^k \int : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) : f_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

Benutzt man 3.2.1 für jedes f_n , so hat man $g_n \in \mathcal{T}^n(N)$, $n \in \{1, \dots, k\}$ mit $\text{supp } g_n \subset N$. Die g_n definieren also Elemente

$$G(\varphi) = \sum_{n=0}^k \int : \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) : g_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

in $\mathfrak{W}(N)$. Aufgrund der Eigenschaft (i) in Proposition 3.2.1 folgt $F(\varphi) = G(\varphi)$ aus der Gültigkeit der Klein-Gordon-Gleichung in $\mathfrak{W}(M)$. \square

Kapitel 4

Beweis des Zeitschichtaxioms in perturbativ konstruierten wechselwirkenden Theorien

4.1 Rückführung auf die Aussage

$$\mathfrak{A}_0(N) \subset \mathfrak{A}_g(N)$$

In Abschnitt 2.7 wurde die störungstheoretische Konstruktion wechselwirkender Theorien vorgestellt. Die wechselwirkenden Felder sind Potenzreihen von sogenannten zeitgeordneten Produkten. Bei diesen handelt es sich um lokale Quantenfelder aus den freien Algebren $\mathfrak{A}_0(\mathcal{O})$ in einem Raumzeitgebiet \mathcal{O} , deren erzeugende Funktionale die lokalen S-Matrizen sind. Genauer ist $\mathfrak{A}_0(\mathcal{O})$ die folgenabgeschlossene, unitale $*$ -Algebra, die von Elementen $S(g)$ mit $\text{supp } g \subset \mathcal{O}$ erzeugt wird. Hier wird angenommen, dass das Netz der Algebren $\mathfrak{A}_0(\mathcal{O})$ das Zeitschichtaxiom erfüllt. In der Störungstheorie ist dies der Fall, denn dort stimmt \mathfrak{A}_0 mit \mathfrak{W} überein und für \mathfrak{W} wurde die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms in Kapitel 3 gezeigt.

Die S-Matrizen besitzen eine kausale Faktorisierungseigenschaft, die ausdrückt, dass der Effekt von zeitlich aufeinander folgenden Wechselwirkungen als das Produkt der einzelnen Effekte geschrieben werden kann. Für den hier zu erbringenden Beweis ist diese Eigenschaft von zentraler Bedeutung, daher wird sie an dieser Stelle noch einmal explizit wiederholt.

Kausale Faktorisierungseigenschaft. Seien $f, g, h \in \mathcal{D}(M, \mathcal{V})$. Es existiere eine Cauchy-Fläche Σ , so dass $\text{supp } f$ im Inneren von $J_+(\Sigma)$ und $\text{supp } h$ im Inneren von $J_-(\Sigma)$ enthalten ist. Dann gilt

$$S(f + g + h) = S(f + g)S(g)^{-1}S(g + h) \quad (4.1.1)$$

Bemerkung. Zusammen mit der Normierungsbedingung $S(0) = \mathbf{1}$ ist dies die einzige Eigenschaft der perturbativ konstruierten S-Matrix, die für den

Beweis der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms benötigt wird. In gewisser Weise ist dieser Beweis daher von der störungstheoretischen Formulierung unabhängig. Wenn es gelingt, die S-Matrizen nichtperturbativ zu konstruieren, gilt der Beweis, solange die Bedingung (4.1.1) und die Normierungsbedingung erfüllt sind und die freie Algebra das Zeitschichtaxiom erfüllt.

Die Algebra $\mathfrak{A}_g(\mathcal{O})$ der wechselwirkenden Felder im Raumzeitgebiet \mathcal{O} wurde in Abschnitt 2.7 mit Hilfe der relativen S-Matrizen

$$S_g(f) \stackrel{\text{def}}{=} S(g)^{-1}S(g+f) \quad (4.1.2)$$

definiert. $\mathfrak{A}_g(\mathcal{O})$ ist die folgenabgeschlossene unitale $*$ -Algebra, die von den $S_g(f)$ mit $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$ erzeugt wird. Für diese Algebren lautet das Zeitschichtaxiom:

Sei N eine global hyperbolische Umgebung einer Cauchy-Fläche Σ von M . Sei $\mathcal{O} \subset M$ eine offene, global hyperbolische Teilmenge von M . Dann gilt

$$\mathfrak{A}_g(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}_g(N) . \quad (4.1.3)$$

Dabei soll sowohl in N als auch in \mathcal{O} dieselbe Wechselwirkung g herrschen, d.h. $N, \mathcal{O} \subset \text{supp } g$. Im Allgemeinen besitzt eine Cauchy-Fläche aber keine kompakte Umgebung. Man kann jedoch $\mathfrak{A}_g(N)$ auch für eine glatte Funktion $g \in \mathcal{E}(M, \mathcal{V})$ in konsistenter Weise definieren, wenn $\text{supp } g$ *vergangenheitskompakt*¹ ist. Wegen Proposition C.3 ist dann auch für jedes kompakte Gebiet $K \subset M$ die Menge $J_-(K) \cap \text{supp } g$ in einem kompakten Gebiet enthalten. Man kann daher stets eine Testfunktion b finden, die in $J_-(K)$ mit g übereinstimmt. Für f mit Träger im Inneren von K definiert man dann wechselwirkende Felder zur Wechselwirkung g durch

$$S_g(f) = S_b(f) . \quad (4.1.4)$$

Bei der Wahl von b besteht zwar große Freiheit. Die S_g hängen aber nicht von dieser Wahl ab, denn angenommen \tilde{b} stimmt ebenfalls mit g in der Vergangenheit von K überein. Dann gilt für die Differenz $c = \tilde{b} - b$, dass es eine Cauchy-Fläche gibt, so dass $\text{supp } f$ in der Vergangenheit und $\text{supp } c$ in der Zukunft liegt. Daraus folgt aber mit (4.1.1)

$$\begin{aligned} S_{\tilde{b}}(f) &= S(c+b)^{-1}S(c+b+f) \\ &= S(b+c)^{-1}S(b+c)S(b)^{-1}S(b+f) \\ &= S_b(f) . \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Wie oben erwähnt, möchte man die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms für die Algebren $\mathfrak{A}_0(\mathcal{O})$ der Wick-Polynome ausnutzen. Durch die Störungstheorie kann man jedes Element $S_g(f)$ von $\mathfrak{A}_g(\mathcal{O})$ durch freie Felder ausdrücken.

¹Eine Teilmenge $V \subset M$ heißt **vergangenheitskompakt**, falls für beliebiges $x \in M$ die Menge $J_-(x) \cap V$ in einer kompakten Menge enthalten ist.

Da für diese aber das Zeitschichtaxiom gilt, kann man $S_g(f)$ sogar als freies Feld aus $\mathfrak{A}_0(N)$ schreiben. Man hat also $\mathfrak{A}_g(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}_0(N)$. Wenn man nun umgekehrt die freien Felder in der Umgebung einer Cauchy-Fläche durch die wechselwirkenden Felder in dieser Umgebung ausdrücken könnte, dann hätte man

$$\mathfrak{A}_g(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}_0(N) \subset \mathfrak{A}_g(N) . \quad (4.1.6)$$

Zu zeigen ist also die letzte Inklusion. (Dabei ist zu beachten, dass wegen des Zeitschichtaxioms $\mathfrak{A}_0(N) \subset \mathfrak{A}_0(N')$ für jede Umgebung N' von Σ .) Daher ist nun das Ziel, freie Felder durch wechselwirkende Felder auszudrücken. Dazu kann man versuchen, relative S-Matrizen (also wechselwirkende Felder) so miteinander zu multiplizieren, dass die Wechselwirkung kompensiert wird. Es hat sich herausgestellt [9], dass ein funktionierender Beweis mit dieser Grundidee möglich ist. Diese Konstruktion wird im folgenden Abschnitt durchgeführt.

4.2 Der Beweis

Sei Σ eine Cauchy-Fläche von M und seien N, N' Umgebungen von Σ , so dass $N' \subset N$. Sei K ein kausal abgeschlossenes Kompaktum im Inneren von N' . Sei außerdem Σ_1 eine Cauchy-Fläche in der Vergangenheit von N . Die beschriebene geometrische Konstruktion ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Wechselwirkung $g \in \mathcal{E}(M, \mathcal{V})$ habe Träger im Inneren der Zukunft von Σ_1 . Sei nun $g' \in \mathcal{E}(M, \mathcal{V})$ mit $\text{supp } g' \subset N$, so dass g' mit g in N' übereinstimmt. Sei $b' \in \mathcal{D}(M, \mathcal{V})$ eine Testfunktion mit $\text{supp } b' \subset N$, die mit g' in $J_-(K)$ übereinstimmt. Zu $f \in \mathcal{D}(M, \mathcal{V})$ mit Träger im Inneren von K definiert man nun

$$S_{g,g'}(f) = S_g(-b')^{-1} S_g(-b' + f) . \quad (4.2.1)$$

Diese Definition ist wieder unabhängig von der Wahl von b' , denn angenommen \tilde{b}' stimmt ebenfalls mit b' in $J_-(K)$ überein und hat Träger in N . Dann gibt es eine Cauchy-Fläche, so dass der Träger von $c' = \tilde{b}' - b'$ in der Zukunft und $\text{supp } f$ in der Vergangenheit liegt. Mit (4.1.1) folgt dann

$$\begin{aligned} S_g(-\tilde{b}')^{-1} S_g(-\tilde{b}' + f) &= S_g(-c' - b')^{-1} S_g(-c' - b' + f) \\ &= S_g(-c' - b')^{-1} S_g(-c' - b') S_g(-b')^{-1} S_g(-b' + f) \\ &= S_g(-b')^{-1} S_g(-b' + f) , \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

denn die relativen S-Matrizen besitzen nach (2.7.6) auch die kausale Faktorisierungseigenschaft. Damit die in (4.2.1) definierten Produkte von S-Matrizen wohldefiniert sind, muss $S_g(\bullet) = S_b(\bullet)$ gesetzt werden. Dabei muss b in der Vergangenheit eines ausreichend großen kompakten Gebietes L mit g übereinstimmen. L muss in seinem Inneren den Träger von b' enthalten.

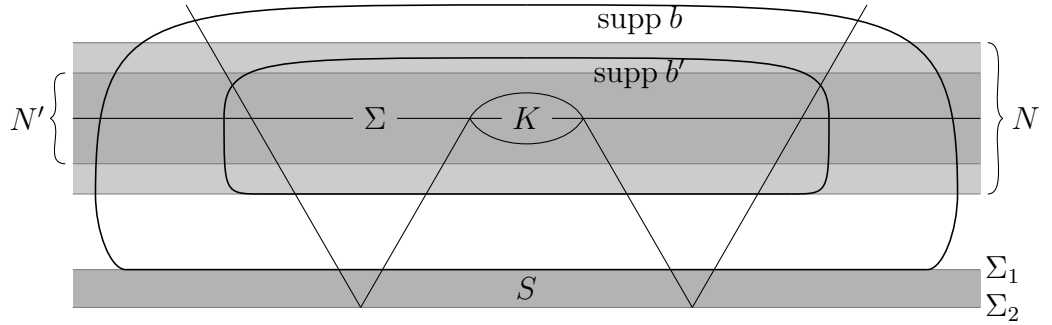
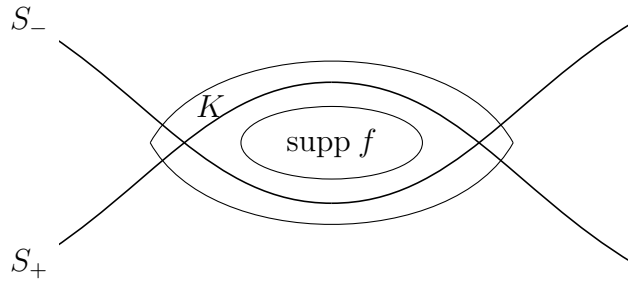


Abbildung 4.1: Die im Beweis benutzte geometrische Konfiguration

Setzt man nun in (4.2.1) die Definition der relativen S-Matrizen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} S_{g,g'}(f) &= \left(S(b)^{-1} S(b-b') \right)^{-1} S(b)^{-1} S(b-b'+f) \\ &= S(b-b')^{-1} S(b-b'+f) . \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Es gilt $b = b'$ in K . Daher existieren Cauchy-Flächen S_+, S_- mit $\text{supp } f \subset J_-(S_+) \cap J_+(S_-)$ und eine Zerlegung $b-b' = b_+ + b_-$, so dass $\text{supp } b_+ \subset J_+(S_+)$ und $\text{supp } b_- \subset J_-(S_-)$ (siehe Abbildung 4.2).

Abbildung 4.2: Zur Existenz der Zerlegung $b - b' = b_+ + b_-$.

Damit erhält man durch zweimalige Anwendung von (4.1.1)

$$\begin{aligned} S_{g,g'}(f) &= S(b-b')^{-1} S(b-b'+f) \\ &= S(b-b')^{-1} S(b-b') S(b_-)^{-1} S(b_- + f) \\ &= S(b_-)^{-1} S(f) S(b_-) . \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Die bisherige Konstruktion lässt sich nun in zwei Beobachtungen zusammenfassen: Sei \mathcal{O}_1 eine relativ kompakte Menge mit Abschluss $K \subset N'$. Dann gilt für jedes Element $A \in \mathfrak{A}_0(\mathcal{O}_1)$ der freien Algebra in \mathcal{O}_1 wegen (4.2.4) einerseits

$$S(b_-)^{-1} A S(b_-) \in \mathfrak{A}_g(N) , \quad (4.2.5)$$

denn $S_{g,g'}(f)$ ist ein Produkt von wechselwirkenden Feldern aus $\mathfrak{A}_g(N)$. Hierbei muss b_- natürlich wieder aus geeignet gewählten b, b' konstruiert sein, die alle genannten Bedingungen erfüllen. Eine solche Wahl ist immer möglich und das Ergebnis (4.2.5) hängt nicht von dieser Wahl ab. Andererseits ist $S(b_-)^{-1}AS(b_-)$ ein Produkt von freien Feldern. Mit Hilfe des Zeitschichtaxioms lässt es sich für jede beliebig kleine Umgebung N'' von Σ , deren Abschluss in N' enthalten ist, schreiben als Element der freien Algebra in N'' , genauer gilt

$$S(b_-)^{-1}AS(b_-) \in \mathfrak{A}_0(\tilde{\mathcal{O}}) \quad (4.2.6)$$

mit $\tilde{\mathcal{O}} = N'' \cap J_+(J_-(K) \cap N)$. Die Formel für das Lokalisationsgebiet $\tilde{\mathcal{O}}$ folgt dabei aus den Trägereigenschaften, die im Beweis des Zeitschichtaxioms für freie Felder in Kapitel 3 gezeigt wurden.

Insgesamt definiert diese Konstruktion einen *Endomorphismus* α von $\mathfrak{A}_0(M)$, dessen Bild in $\mathfrak{A}_g(N)$ enthalten ist. Dabei ist die Wirkung von α auf ein $S(\tilde{f}) \in \mathfrak{A}_0(M)$ folgendermaßen erklärt: Wegen des Zeitschichtaxioms für die freie Algebra existiert ein $S(f) \in \mathfrak{A}_0(N')$ (d.h. $\text{supp } f \subset N'$) mit $S(\tilde{f}) = S(f)$. Man setzt nun

$$\alpha(S(f)) = S_{g,g'}(f) . \quad (4.2.7)$$

Es wurde außerdem bereits deutlich, dass für jedes relativ kompakte Gebiet $\mathcal{O}_2 \subset M$ der Endomorphismus α durch Konjugation mit einem invertierbaren Element $U \in \mathfrak{A}_0(M)$ realisiert ist. Dieses ist gerade $U = S(b_-)^{-1}$, wobei wieder b_- aus geeignet gewählten b, b' konstruiert ist. Insbesondere ist α injektiv.

Der letzte Schritt ist es nun zu zeigen, dass α sogar bijektiv ist. Denn dann lässt sich jedes freie Feld $S(f)$ aus $\mathfrak{A}_0(N')$ schreiben als $S(f) = \alpha(S(f')) \in \mathfrak{A}_g(N)$ für ein $S(f') \in \mathfrak{A}_0(N')$ und die Inklusion $\mathfrak{A}_0(N) \subset \mathfrak{A}_g(N)$ ist bewiesen.

Da $g - g'$ in N' verschwindet, gibt es eine Zerlegung $g - g' = g_+ + g_-$, wobei der Träger von g_+ in der Zukunft und der Träger von g_- in der Vergangenheit von N' liegt. Für f mit $\text{supp } f \subset N'$ ist nun $\alpha(S(f)) = S_{g_-}(f)$. Dieser Endomorphismus wird für festes Lokalisationsgebiet von f durch Konjugation mit dem Element $S(b_-)^{-1}$ realisiert, wobei b_- mit g_- in der Vergangenheit einer ausreichend großen Teilmenge von Σ übereinstimmt. Man erhält die Umkehrabbildung, indem man diese Bedingung an b_- verstärkt: Sei Σ_2 eine Cauchy-Fläche in der Vergangenheit von Σ_1 und sei $S = J_-(\Sigma_1) \cap J_+(\Sigma_2)$. Man verlangt nun, dass b_- sogar in der Zukunft von $J_-(K) \cap S$ mit g_- übereinstimmt, siehe Abbildung 4.1. Aufgrund des Zeitschichtaxioms für die freien Felder gilt $\mathfrak{A}_0(K) \subset \mathfrak{A}_0(J_-(K) \cap S)$. Aber $\mathfrak{A}_0(J_-(K) \cap S)$ wird von Elementen $S(h)$ mit $h \in \mathcal{D}(M, \mathcal{V})$ und $\text{supp } h \subset J_-(K) \cap S$ erzeugt. Für jedes solche h liegt nun $\text{supp } h$ in der Vergangenheit von Σ_1 und $\text{supp } b_-$ in der Zukunft. Da $\alpha(S(f))$ durch Konjugation mit $S(b_-)^{-1}$ definiert ist, definiert

man die Umkehrung als Konjugation mit $S(b_-)$:

$$\alpha_{b_-}^{-1}(S(h)) = S(b_-)S(h)S(b_-)^{-1} . \quad (4.2.8)$$

Wegen der stärkeren Bedingung an b_- hängt diese Definition nicht mehr von der Wahl von b_- ab, denn angenommen $\widetilde{b_-}$ stimmt ebenfalls in der Zukunft von $J_-(K) \cap S$ mit $\widetilde{g_-}$ überein. Dann gibt es eine Cauchy-Fläche, so dass der Träger von $c_- = \widetilde{b_-} - b_-$ in der Vergangenheit und $\text{supp } h$ in der Zukunft liegt. Dann gilt wegen 4.1.1

$$\begin{aligned} \alpha_{\widetilde{b_-}}^{-1}(S(h)) &= S(\widetilde{b_-})S(h)S(\widetilde{b_-})^{-1} \\ &= S(\widetilde{b_-} + h)S(\widetilde{b_-})^{-1} \\ &= S(c_- + b_- + h)S(c_- + b_-)^{-1} \\ &= S(b_- + h)S(b_-)^{-1}S(c_- + b_-)S(c_- + b_-)^{-1} \\ &= S(b_-)S(h)S(b_-)^{-1} \\ &= \alpha_{b_-}^{-1}(S(h)) . \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Also existiert das Inverse von α auf $\mathfrak{A}_0(J_-(K) \cap S) \supset \mathfrak{A}_0(K)$ für alle kompakten Gebiete $K \subset N'$ und folglich überall.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Das Zeitschichtaxiom ist eine der fundamentalen Forderungen, die eine algebraische Quantenfeldtheorie erfüllen muss. Es sagt aus, dass die Observablenalgebra einer Umgebung einer Cauchy-Fläche bereits die Observablenalgebra der gesamten Raumzeit enthält. Dies entspricht dem allgemeinen physikalischen Prinzip, dass man aus dem Kenntnis von Messgrößen in der Gegenwart Vorhersagen über zukünftige Messungen ableiten kann.

In dieser Arbeit wurde die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms in störungstheoretisch konstruierten, wechselwirkenden algebraischen skalaren Quantenfeldtheorien bewiesen. Der erste Teil des Beweises bestand darin, die Gültigkeit des Zeitschichtaxioms für die erweiterte Algebra der Wick-Polynome zu beweisen.

Die zentralen Aussagen dieser Arbeit wurden vor dem Hintergrund der funktoriellen Formulierung der Quantenfeldtheorie gemacht, die einen besonders klaren Einblick in die Struktur der Theorie ermöglicht. In Unterabschnitt 2.3.2 wurde nachvollzogen, wie man innerhalb dieser Formulierung die Observablenalgebra einer Cauchy-Fläche als inversen Limes konstruieren kann. Diese Konstruktion wurde in Abschnitt 2.4.2 mit der konkret gegebenen Algebra der Cauchy-Daten des freien Feldes in Verbindung gebracht. Es ist eine interessante Frage, ob man eine solch konkrete Konstruktion auch für die Wick-Polynome und schließlich für die störungstheoretisch definierten wechselwirkenden Felder durchführen kann. Mit Hilfe des Zeitschichtaxioms hätte man dann die Aussage, dass die wechselwirkende Algebra der ganzen Raumzeit in der Algebra jeder beliebigen Cauchy-Fläche enthalten ist.

Eine weitere interessante Aufgabe für die Zukunft ist die Weiterverfolgung des in Abschnitt 2.3.4 vorgestellten Ansatzes von Brunetti und Fredenhagen zur Quantengravitation. Dieser Ansatz hängt von der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms ab und bei seiner Umsetzung könnte die in dieser Arbeit entwickelte Beweismethode von Nutzen sein.

Anhang A

Einige Grundbegriffe der Kategorientheorie

A.1 Kategorien und Funktoren

Hier werden zwei grundlegende Begriffe der Kategorientheorie „Kategorie“ und „Funktork“ eingeführt. Ein Standardwerk auf diesem Gebiet ist [32].

Seien O, M Mengen und sei $P \subseteq O \times M \times O$. Dann heißt (O, M, P) ein *Graph*. O ist die Menge der *Objekte*, die Menge P heißt die Menge der *Pfeile* (diese werden auch als *Morphismen* bezeichnet) und M ist die Menge der *Marken*. Ein Pfeil besteht also aus einem Objekt als Anfangspunkt, einer Marke und einem Objekt als Endpunkt. Die Marken dienen dazu, verschiedene Pfeile zwischen den selben Objekten zu unterscheiden. Zu einem Graphen (O, M, P) sei

$$K = \left\{ (f = (a_1, m_1, e_1), g = (a_2, m_2, e_2)) \in P \mid e_1 = a_2 \right\}$$

die Menge der komponierbaren Pfeile.

Definition A.1.1. Sei (O, M, P) ein Graph. Seien

$$\begin{aligned} \circ : K &\rightarrow P && \text{„Komposition“ ,} \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1 : O &\rightarrow P && \text{„Identität“ ,} \\ a &\mapsto 1_a \end{aligned}$$

Abbildungen. $(O, M, P, \circ, 1)$ heißt **Kategorie**, wenn die folgenden Gesetze gelten:

- (i) Für $f = (a_1, m_1, e_1)$, $g = (a_2, m_2, e_2) \in K$ sei $f \circ g = (a_3, m_3, e_3)$. Dann gilt $a_1 = a_3$ und $e_2 = e_3$.
- (ii) Für $f, g, h \in K$ gilt $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
- (iii) Für $a \in O$ sei $1_a = (a_1, m_1, e_1)$. Dann gilt $a_1 = a = e_1$.
- (iv) Für $f = (a_1, m_1, e_1) \in P$ gilt $1_{a_1} \circ f = f = f \circ 1_{a_1}$.

Eine Kategorie besteht also aus Objekten und Pfeilen, wobei jeder Pfeil von einem Objekt zu einem Objekt zeigt. Wenn der Endpunkt eines Pfeils mit dem Anfangspunkt eines zweiten Pfeils übereinstimmt, dann soll es einen Pfeil geben, der vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des zweiten Pfeils zeigt. Diese Komposition von Pfeilen soll assoziativ sein. Außerdem soll es zu jedem Objekt einen Pfeil geben, der dort anfängt und endet. Dieser Pfeil soll in der Komposition mit anderen Pfeilen als Identität wirken. Die Objekte einer Kategorie C bezeichnen wir auch mit $\text{Obj}(C)$. Zu $a, b \in \text{Obj}(C)$ bezeichnen wir mit $\text{hom}_C(a, b)$ die Pfeile aus C , die von a nach b zeigen.

Definition A.1.2. Seien C, D Kategorien. Sei F eine Abbildung, welche die Objekte von C auf Objekte von D und die Morphismen von C auf Morphismen von D abbildet. Das Tripel (C, F, D) heißt **Funktor**, wenn die folgenden Gesetze gelten:

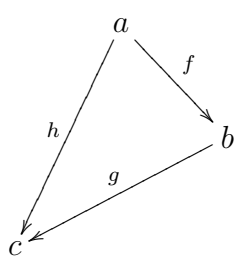
- (i) Sei $f = (a, m, e)$ ein Morphismus von C und sei $F(f) = (a', m', e')$. Dann gilt $F(a) = a'$ und $F(e) = e'$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & e \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ F(a) & \xrightarrow{F(f)} & F(e) \end{array}$$

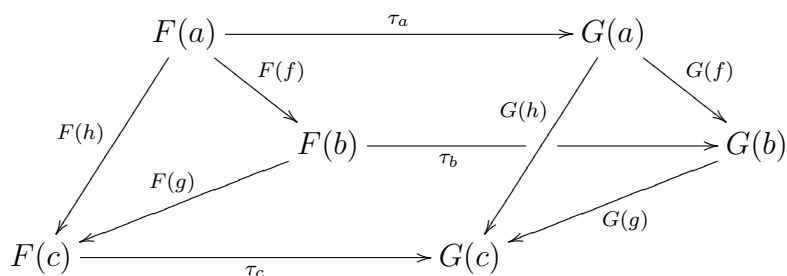
kommutiert.

- (ii) Für alle Objekte a von C gilt $F(1_a) = 1_{F(a)}$.
- (iii) Für alle komponierbaren Morphismen (f, g) von C gilt $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Ein Funktor ist also eine Abbildung zwischen zwei Kategorien, die die Morphismen respektiert. Außerdem ist sie kovariant, d.h. sie respektiert Identitäten und ist distributiv über der Komposition von Morphismen. Man spricht daher auch von einem *kovarianten Funktor*. Man kann Funktoren so auffassen, dass sie die Strukturen in einer Kategorie in eine andere Kategorie übertragen.



(1)

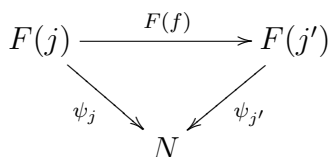


(2)

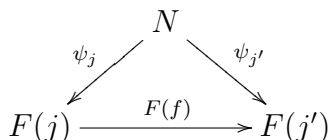
A.3 Kolimes und Limes

Seien J, C Kategorien und $F : J \rightarrow C$ ein Funktor.

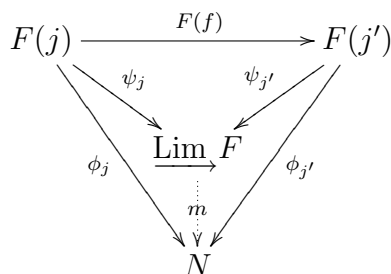
Definition A.3.1. Ein **Kegel von F nach $N \in \text{Obj}(C)$** ist eine Familie von Morphismen $\psi_j : F(j) \rightarrow N$ in C , indiziert durch Objekte $j \in \text{Obj}(J)$, so dass für alle $j, j' \in \text{Obj}(J)$ und für jeden Morphismus $f : j \rightarrow j'$ in $\text{hom}_J(j, j')$ das Diagramm



kommutiert. Ein **Kegel von N nach F** ist analog definiert, mit dem Unterschied, dass die Morphismen umgekehrt werden:



Definition A.3.2. Ein **Kolimes** von F ist ein Objekt $\varinjlim F \in \text{Obj}(C)$ aus C , zusammen mit einem universellen Kegel ψ_j von F nach $\varinjlim F$, d.h. zu jedem Kegel von einem Objekt $N \in \text{Obj}(C)$ nach F gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus m in $\text{hom}_C(\varinjlim F, N)$, so dass das Diagramm



für alle $j, j' \in \text{Obj}(J)$ und für jeden Morphismus $f : j \rightarrow j'$ in $\text{hom}_J(j, j')$ kommutiert.

Um die Existenz des Kolimes in einem Spezialfall zu zeigen, benötigt man folgende

Definition A.3.3. Sei I eine gerichtete Menge¹. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Algebren, indiziert durch die Elemente von I . Außerdem gebe es eine Familie $(F_{ij})_{i \triangleleft j}$ von Homomorphismen $F_{ij} : A_i \rightarrow A_j$. Dann heißt das Paar $((A_j), (f_{ij}))$ ein **induktives System**, falls

$$\begin{aligned} F_{jk} \circ F_{ij} &= F_{ik} \quad \text{für } i \triangleleft j \triangleleft k \text{ und} \\ F_{ii} &= \text{id}_{A_i} . \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Ein beliebiger Funktor muss keinen Kolimes besitzen. Wenn die Indexkategorie J aber die zusätzliche Struktur hat, dass sie eine gerichtete Menge definiert und wenn $\text{Obj}(C)$ aus Algebren² besteht (mit entsprechenden Homomorphismen als Morphismen), existiert ein Kolimes. Genauer muss gelten, dass die Richtung durch die Existenz von Morphismen gegeben ist, d.h. für $j_1, j_2 \in \text{Obj}(J)$ gilt $j_1 \triangleleft j_2$, falls $\text{hom}_J(j_1, j_2)$ aus genau einem Element ψ_{j_1, j_2} besteht. Dass dies eine Richtung ist, bedeutet nun, dass zu beliebigen $j_1, j_2 \in \text{Obj}(J)$ stets ein $j_3 \in \text{Obj}(J)$ existiert, so dass $j_1 \triangleleft j_3$ und $j_2 \triangleleft j_3$. In der beschriebenen Situation definiert der Funktor F dann nämlich ein *induktives System*: Zu $j_1, j_2 \in \text{Obj}(J)$ mit $j_1 \triangleleft j_2$ existiert ein Morphismus $F(\psi_{j_1, j_2}) \in \text{hom}_C(F(j_1), F(j_2))$, so dass die folgenden Eigenschaften gelten

- (i) $F(\psi_{j_1, j_1}) = 1_{F(j_1)}$
- (ii) $F(\psi_{j_2, j_3}) \circ F(\psi_{j_1, j_2}) = F(\psi_{j_1, j_3})$ für $j_1 \triangleleft j_2 \triangleleft j_3$.

Der Kolimes ist nun der sogenannte *induktive Limes*³ des beschriebenen induktiven Systems. Die Konstruktion des induktiven Limes geht aus von der *disjunkten Vereinigung*

$$\coprod_{j \in \text{Obj}(J)} F(j) \equiv \{(j, x) \mid j \in \text{Obj}(J), x \in F(j)\} . \tag{A.3.2}$$

¹Eine gerichtete Menge ist eine Menge M mit einer transitiven, reflexiven Relation \triangleleft , die die zusätzliche Eigenschaft besitzt, dass es zu zwei beliebigen $m, n \in M$ ein $s \in M$ gibt, so dass $m \triangleleft s$ und $n \triangleleft s$.

²Diese Konstruktion ist auch für allgemeinere algebraische Strukturen wie z.B. Gruppen möglich. Wichtig ist nur, dass die Morphismen Homomorphismen dieser Strukturen sind. In dieser Arbeit ist nur der Fall, in dem $\text{Obj}(C)$ aus Algebren besteht, von Belang. Zur Vereinfachung der Darstellung wird daher nur dieser Fall betrachtet.

³Der induktive Limes wird auch *direkter Limes* genannt. Die hier vorgeführte Konstruktion funktioniert ganz analog für jedes induktive System, auch wenn man es nicht aus einem Funktor konstruiert hat.

Auf dieser betrachtet man die Äquivalenzrelation

$$\left\{ (j_1, x) \sim (j_2, y) \mid \exists j_3 \in \text{Obj}(J) : F(\psi_{j_1, j_3})(x) = F(\psi_{j_2, j_3})(y) \right\} . \quad (\text{A.3.3})$$

Dann gilt $\varinjlim F = \coprod_{j \in \text{Obj}(J)} F(j) / \sim$. Um das einzusehen, muss man sich zuerst davon überzeugen, dass der induktive Limes ein Objekt aus C ist. Als konkretes Beispiel sei $C = \mathbf{Obs}$ die Kategorie der unitalen $*$ -Algebren mit injektiven $*$ -Homomorphismen als Morphismen. Dann erklärt man das Produkt durch

$$[(j_1, x)] \cdot [(j_2, y)] = \left[(j_3, F(\psi_{j_1, j_3})(x) \cdot F(\psi_{j_2, j_3})(y)) \right] \quad (\text{A.3.4})$$

für ein beliebiges $j_3 \in \text{Obj}(J)$ mit $j_1 \triangleleft j_3$ und $j_2 \triangleleft j_3$. Die Summe definiert man analog und setzt $\left([(j_1, x)] \right)^* = [(j_1, x^*)]$. Das Einselement ist $(j_1, \mathbf{1}) \sim (j_2, \mathbf{1}) \forall j_1, j_2 \in \text{Obj}(J)$. Offensichtlich definiert dies wieder eine unitalen $*$ -Algebra.

Eine Familie von Morphismen wird definiert durch

$$\begin{aligned} \psi_j &: F(j) \rightarrow \varinjlim F \\ x &\mapsto [(j, x)] . \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

Diese definiert einen Kegel von F nach $\varinjlim F$, denn sei $j \triangleleft j'$, dann ist $(j, x) \sim (j', F(\psi_{j, j'})(x))$ und es gilt

$$\psi_j(x) = [(j, x)] = \left[(j', F(\psi_{j, j'})(x)) \right] = \psi_{j'}(F(\psi_{j, j'})(x)) . \quad (\text{A.3.6})$$

Dieser Kegel ist auch universell, denn sei ϕ_j ein anderer Kegel von F nach $N \in \text{Obj}(C)$, dann muss

$$\phi_j(x) = \phi_{j'}(F(\psi_{j, j'})(x)) \quad \forall j \triangleleft j', x \in F(j) \quad (\text{A.3.7})$$

gelten. Daher setzt man $m\left(\left[(j, x)\right]\right) = \phi_j(x)$. Dadurch ist m wohldefiniert, denn sei $(j, x) \sim (j', y)$, d.h. es existiert ein $k \in J$, so dass $j \triangleleft k$, $j' \triangleleft k$ und $F(\psi_{j, k})(x) = F(\psi_{j', k})(y)$. Dann gilt

$$m\left(\left[(j, x)\right]\right) = \phi_j(x) = \phi_k(F(\psi_{j, k})(x)) = \phi_{j'}(y) = m\left(\left[(j', y)\right]\right) . \quad (\text{A.3.8})$$

Mit dem so definierten m kommutieren die Teildiagramme links unten und rechts unten im Diagramm von Definition A.3.2: $\phi_j = m \circ \psi_j$. Damit kommutieren alle Teildiagramme.

Es gibt einen zum Kolimes dualen Begriff, den sogenannten *Limes* (im Sinne der Kategorientheorie). Er ist ganz ähnlich definiert, der Unterschied besteht darin, dass man die Pfeile im universellen Kegel umdreht. Genauer macht man die folgende

Definition A.3.4. Ein **Limes** von F ist ein Objekt $\varprojlim F \in \text{Obj}(C)$ zusammen mit einem universellen Kegel ψ_j von $\varprojlim F$ nach F . Als Diagramm ausgedrückt bedeutet dies, dass es zu jedem anderen Kegel von $N \in \text{Obj}(C)$ nach F einen eindeutig bestimmten Morphismus m in $\text{hom}_C(N, \varprojlim F)$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \\
 \phi_j \swarrow & \vdots & \searrow \phi_{j'} \\
 & \varprojlim F & \\
 \psi_j \swarrow & & \searrow \psi_{j'} \\
 F(j) & \xrightarrow{F(f)} & F(j')
 \end{array}$$

Wie im Fall des Kolimes muss ein beliebiger Funktor $F : J \rightarrow C$ keinen Limes besitzen. Wenn F aber ein *inverses System* definiert, dann ist der Limes von F der sogenannte *inverse Limes* dieses Systems. Diese beiden Begriffe entsprechen dem induktiven System bzw. induktiven Limes im Falle des Kolimes und sind ähnlich definiert:

Definition A.3.5. Sei J eine gerichtete Menge. Sei $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie von Algebren, indiziert durch die Elemente von J . Außerdem gebe es eine Familie $(F_{ij})_{i \triangleleft j}$ von Homomorphismen $F_{ij} : A_j \rightarrow A_i$. Dann heißt das Paar $((A_j), (F_{ij}))$ ein **inverses System**, falls

$$\begin{aligned}
 F_{hi} \circ F_{ij} &= F_{hj} \quad \text{für } h \triangleleft i \triangleleft j \text{ und} \\
 F_{ii} &= \text{id}_{A_i} .
 \end{aligned} \tag{A.3.9}$$

Der inverse Limes⁴ eines inversen Systems ist nun die folgende Teilmenge des direkten Produkts der A_i :

$$\varprojlim A_i = \left\{ (a_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} A_i \mid f_{ij}(a_j) = a_i \text{ falls } i \triangleleft j \right\} . \tag{A.3.10}$$

Es ist klar, dass dies mit den komponentenweisen Verknüpfungen wieder eine Algebra ist. Anders als beim induktiven System sind die Homomorphismen F_{ij} entgegen der Richtung $i \triangleleft j$ gerichtet.

Sei nun wieder $F : J \rightarrow C$ ein Funktor mit der Indexkategorie J und einer Kategorie von Algebren C . Unter bestimmten Bedingungen kann man den Limes von F als inversen Limes erklären. Dies ist analog zum Fall des Kolimes, der unter bestimmten Bedingungen als induktiver Limes erklärt ist, wie weiter oben ausgeführt wurde. Der Unterschied besteht nun darin, dass

⁴Der inverse Limes wird auch *projektiver Limes* genannt.

die Richtung auf J invertiert sein muss. Genauer soll $j_1 \triangleleft j_2$ für $j_1, j_2 \in \text{Obj}(J)$ gelten, falls $\text{hom}_J(j_2, j_1)$ genau ein Element ψ_{j_2, j_1} enthält. Die Bedingung an J ist nun, dass hierdurch tatsächlich eine Richtung gegeben ist. Wenn dies der Fall ist, definiert F ein inverses System:

Zu $h, i, j \in \text{Obj}(J)$ mit $h \triangleleft i \triangleleft j$ gilt $\psi_{ih} \circ \psi_{ji} = \psi_{jh}$, da J eine Kategorie ist. Aus der Kovarianzeigenschaft des Funktors F folgt nun

$$F(\psi_{ih}) \circ F(\psi_{ji}) = F(\psi_{jh}) . \quad (\text{A.3.11})$$

daher definiert man $F_{j_1, j_2} = F(\psi_{j_2, j_1})$ und erhält $F_{hi} \circ F_{ij} = F_{hj}$. Die Eigenschaft $F_{ii} = \text{id}_{F(i)}$ folgt ebenfalls aus der entsprechenden Eigenschaft des Funktors F .

Der kategorientheoretische Limes von F ist nun der inverse Limes dieses inversen Systems. In Unterabschnitt 2.3.2 wird dies für den Spezialfall der Observablenalgebra einer Cauchy-Fläche gezeigt. Der Beweis hängt aber nur davon ab, dass der Funktor in der besprochenen Weise ein inverses System definiert. Daher kann er ohne Schwierigkeiten auf den hier behandelten allgemeinen Fall angewendet werden.

Anhang B

Grundbegriffe der mikrolokalen Analysis

B.1 Die Wellenfrontmenge

In diesem Abschnitt wird die Beschreibung von Singularitäten von Distributionen durch sogenannte Wellenfrontmengen erläutert. Diese Theorie wurde von Hörmander und Duistermaat entwickelt [27, 28]. Die Singularitäten einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ auf einer glatten Mannigfaltigkeit X lassen sich lokalisieren, indem man u mit einer Testfunktion $\phi \in \mathcal{D}(X)$ multipliziert und überprüft, ob ϕu eine glatte Funktion ist¹. Man definiert den singulären Träger von u entsprechend durch

$$\text{sing supp } u = \bigcap_{\{\phi \in \mathcal{C}^\infty(X) \mid \phi u \in \mathcal{C}^\infty\}} \{x \mid \phi(x) = 0\} . \quad (\text{B.1.1})$$

Das bedeutet, $\text{sing supp } u$ sind diejenigen Punkte, an denen man u mit Null multiplizieren muss, um eine glatte Funktion zu erhalten.

Diese Lokalisierung von Singularitäten kann nun verfeinert werden, indem man die Fouriertransformierte von u betrachtet und an jedem Punkt diejenigen Wellenvektoren bestimmt, die für das singuläre Verhalten von u verantwortlich sind. Da die Fouriertransformation nur im \mathbb{R}^n erklärt ist, wird diese genauere Beschreibung zunächst für Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ durchgeführt. Später wird erläutert, wie dieses Konzept auf Distributionen auf glatten Mannigfaltigkeiten ausgedehnt werden kann. Nach [27, Theorem 7.1.14] ist die Fouriertransformierte einer Distribution $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ eine glatte Funktion. Wenn diese in allen Richtungen schnell abfällt, dann war schon u eine glatte Funktion. Dies hängt damit zusammen, dass die Fouriertransformation ein Isomorphismus des Schwartzraums $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Man interessiert sich

¹ ϕu wird mit der glatten Funktion u_c identifiziert, wenn $\int u_c \psi = (\phi u)(\psi)$ für alle $\psi \in \mathcal{D}(X)$.

nun für diejenigen Richtungen, in denen \hat{u} *nicht* schnell abfällt, da diese für den singulären Charakter von u verantwortlich sind:

Definition B.1.1. Zu $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ sei $\Sigma(u)$ der Kegel² aller $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, die keine kegelförmige Umgebung V besitzen, so dass

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists C_N \in \mathbb{R} : |\hat{u}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} \quad \forall \xi \in V . \quad (\text{B.1.2})$$

Hörmander hat gezeigt, dass für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\Sigma(\phi u) \subset \Sigma(u)$. Diese Tatsache kann man ausnutzen, um zu bestimmen, welche Richtungen an welchen Punkten Singularitäten hervorrufen. Sei für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Sigma_x(u) = \bigcap_{\phi} \Sigma(\phi u) , \quad (\text{B.1.3})$$

wobei die Schnittmenge über alle $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi(x) \neq 0$ gebildet wird. Man betrachtet also nur die Richtungen, die eine Singularität am Punkt x erzeugen. Man kann nun alle Informationen über die Singularitäten einer Distribution in einem Objekt zusammenfassen:

Definition B.1.2. Zu einer offenen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(A)$ ist die **Wellenfrontmenge** definiert durch

$$WF(u) = \left\{ (x, \xi) \in A \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \mid \xi \in \Sigma_x(u) \right\} . \quad (\text{B.1.4})$$

Es soll nun die Wellenfrontmenge einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ auf glatten Mannigfaltigkeiten X definiert werden [27]. Seien zunächst allgemein X, Y, Z glatte Mannigfaltigkeiten und seien ϕ, ψ Diffeomorphismen, so dass $X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z$. Zu einem Vektor $t \in T_x X$ ist der *push-forward* von t durch ϕ definiert als der Vektor $\phi_* t \in T_{\phi(x)} Y$, für den gilt

$$(\phi_* t) f = t f \circ \phi \quad (\text{B.1.5})$$

für jede glatte Funktion f auf Y . Es gilt für jede glatte Funktion g auf Z

$$((\psi \circ \phi)_* t) g = t g \circ \psi \circ \phi = (\phi_* t)(g \circ \psi) = (\psi_*(\phi_* t)) g , \quad (\text{B.1.6})$$

also $(\psi \circ \phi)_* t = \psi_*(\phi_* t)$. Für Kovektoren $k \in T_{\phi(x)}^* Y$ definiert man den *pull-back* von k durch ϕ als den Kovektor $\phi^* k \in T_x^* X$ für den gilt

$$\langle t, \phi^* k \rangle = \langle \phi_* t, k \rangle \quad (\text{B.1.7})$$

²Ein Kegel V im \mathbb{R}^n ist eine Teilmenge, für die gilt: Für alle $\xi \in V$ ist $\lambda \xi \in V$ für alle $\lambda > 0$.

für jedes $t \in T_x X$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle t, (\psi \circ \phi)^* k \rangle &= \langle (\psi \circ \phi)_* t, k \rangle \\
&= \langle \psi_*(\phi_* t), k \rangle \\
&= \langle \phi_* t, \psi^* k \rangle \\
&= \langle t, \phi^*(\psi^* k) \rangle,
\end{aligned} \tag{B.1.8}$$

also

$$(\psi \circ \phi)^* k = \phi^*(\psi^* k). \tag{B.1.9}$$

Man kann analog auch den pull-back für Tangentialvektoren und den push-forward von Kotangentialvektoren definieren. All diese Abbildungen sind offensichtlich linear. Man kann auch zeigen, dass pull-back und push-forward zueinander invers sind, d.h. man erhält Isomorphismen.

Für die Definition von $WF(u)$ benötigt man obige Zusammenhänge in einem Spezialfall. Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $\kappa_i : X \supset X_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ Karten von X , mit $S \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ ist eine Familie u_κ von Distributionen im \mathbb{R}^n , genauer ist $u_\kappa \in \mathcal{D}'(\kappa(X_\kappa))$ für jede Karte $\kappa : X \supset X_\kappa \rightarrow \mathbb{R}^n$ von X . Damit dies wohldefiniert ist, fordert man

$$u_{\kappa_2} = (\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})^* u_{\kappa_1} \tag{B.1.10}$$

in $\kappa_2(S)$. Dabei ist der pull-back $(\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})^* u_{\kappa_1}$ nach [27, Theorem 8.2.4] stets wohldefiniert, da $\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Das eben genannte Theorem liefert auch einen Zusammenhang zwischen den Wellenfrontmengen von pull-back und ursprünglicher Distribution:

$$WF(u_{\kappa_2}) = (\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})^* WF(u_{\kappa_1}). \tag{B.1.11}$$

Dabei ist der pull-back der Wellenfrontmenge, als eine Teilmenge des Kotangentialbündels, durch den oben besprochenen pull-back von Kotangentialvektoren erklärt. Man definiert nun $WF(u)$ dadurch, dass man für jedes Koordinatengebiet X_κ setzt

$$WF(u) \cap T^* X_\kappa = \kappa^* WF(u_\kappa). \tag{B.1.12}$$

Um zu entscheiden, ob $WF(u)$ hierdurch wohldefiniert ist, muss man überprüfen, ob $WF(u) \cap T^* S$ unabhängig davon ist, ob man κ_1 oder κ_2 benutzt. Es gilt mit (B.1.11) in $\kappa_2(S)$

$$\begin{aligned}
\kappa_2^* WF(u_{\kappa_2}) &= \kappa_2^* \left((\kappa_1 \circ \kappa_2^{-1})^* WF(u_{\kappa_1}) \right) \\
&= \kappa_2^* \left(\kappa_2^{-1*} (\kappa_1^* WF(u_{\kappa_1})) \right) \\
&= \left(\kappa_2^{-1} \circ \kappa_1 \right)^* (\kappa_1^* WF(u_{\kappa_1})) \\
&= \kappa_1^* WF(u_{\kappa_1}),
\end{aligned} \tag{B.1.13}$$

wobei zweimal (B.1.9) verwendet wurde.

B.2 Das Produkt von Distributionen und die Ausbreitung von Singularitäten

Einige für die vorliegende Arbeit besonders wichtige Aussagen bezüglich der Wellenfrontmenge werden nun angegeben. Die erste beantwortet die Frage, wann das Produkt zweier Distributionen wohldefiniert ist.

Satz B.2.1 (Theorem 8.2.10 in [27]). *Seien $u, v \in \mathcal{D}'(X)$, dann kann das Produkt uv als pull-back des Tensorprodukts $u \otimes v$ mit der Diagonalabbildung $\delta : X \rightarrow X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ definiert werden, solange nicht $(x, \xi) \in WF(u)$ und $(x, -\xi) \in WF(v)$ für irgendein (x, ξ) . Wenn das Produkt definiert ist, gilt*

$$WF(uv) \subset \{(x, \xi + \eta) \mid (x, \xi) \in WF(u) \text{ oder } \xi = 0, (x, \eta) \in WF(v) \text{ or } \eta = 0\}. \quad (\text{B.2.1})$$

Der folgende Satz von Hörmander ist zentral für den Beweis der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms für die Wick-Polynome in Kapitel 3. Er verwendet einige Begriffe aus der Theorie der Pseudo-Differentialoperatoren und der Differentialgeometrie. Diese werden nun kurz erläutert.

Ein allgemeinerer Begriff eines Differentialoperators ist der eines Pseudo-Differentialoperators. Diese können die Eigenschaft besitzen, *eigentlich getragen* (engl. *properly supported*) zu sein. In der vorliegenden Arbeit wird stets nur der Klein-Gordon-Operator betrachtet. Wie alle echten Differentialoperatoren besitzt er diese Eigenschaft automatisch. Daher wird hier nicht weiter auf die Theorie der Pseudo-Differentialoperatoren eingegangen.

Man kann das Kotangentenbündel einer Mannigfaltigkeit M als den Phasenraum eines klassischen physikalischen Systems auffassen. Dabei übernimmt M die Rolle des Ortsraumes und die Kotangentenvektoren an jedem Punkt sind die möglichen Impulse. Zu einer gegebenen Hamiltonfunktion H definiert man nun das sogenannte *Hamiltonsche Vektorfeld* X_H dadurch, dass seine Integralkurven genau die Trajektorien physikalischer Bewegungen sind. Eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow T^*M$ heißt dabei Integralkurve von X_H , falls

$$\dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entlang der Integralkurven von X_H ist H konstant, d.h. $H(\gamma(t))$ ist unabhängig von t , falls γ eine Integralkurve von X_H ist. Vektorfelder erzeugen über ihre Integralkurven einen Fluss, d.h. zu einem $(x, \xi) \in T^*M$ definiert die Integralkurve γ mit $\gamma(0) = (x, \xi)$ eine Wirkung der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf T^*M durch $\phi((x, \xi), t) = \gamma(t)$.

Da die physikalischen Bewegungen in kanonischen Koordinaten durch die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (\text{B.2.2})$$

gegeben sind, gilt

$$H_X = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q^i} \right). \quad (\text{B.2.3})$$

Die folgenden Definitionen bezüglich Differentialoperatoren sind [35] entnommen. Sei D ein Differentialoperator der Form $\sum_{|\alpha| \leq s} a_\alpha(x) \partial^\alpha$. Dabei sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex und $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ bezeichne die entsprechenden mehrfachen Ableitungen nach den lokalen Koordinaten $x = (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist der *Hauptteil* von D definiert als $\sum_{|\alpha|=s} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ und das *Hauptsymbol* von D ist die Funktion $q(x, k) = \sum_{|\alpha|=s} a_\alpha(x) k^\alpha$ auf dem Kotangentenbündel T^*M . Es trägt also immer nur die höchste Ordnung zum Hauptteil und zum Hauptsymbol bei. Für den Klein-Gordon-Operator $\square + m^2$ erhält man beispielsweise das Hauptsymbol $g_{\mu\nu}(x) k^\mu k^\nu$.

Man definiert die *charakteristische Menge* von D als $\text{Char } D = \{(x, \xi) \in T^*M \mid q(x, \xi) = 0\}$. Man kann nun als Hamiltonfunktion formal das Hauptsymbol q von D wählen. Diejenigen Kurven in T^*M , die durch den Hamiltonschen Fluss erzeugt werden (also die Integralkurven von X_q), für die $q = 0$ gilt, heißen dann *Bicharakteristiken* von D .

Wenn D ein eigentlich getragener Differentialoperator ist, so nennt man D von *reellem Prinzipaltyp*, falls sein Hauptteil q reell und homogen ist und wenn keine Bicharakteristik von D im Kotangentenbündel einer kompakten Teilmenge von M enthalten ist. Radzikowski hat in [35, Proposition 4.3] gezeigt, dass der Klein-Gordon-Operator auf einer global hyperbolischen Mannigfaltigkeit von reellem Prinzipaltyp ist.

Satz B.2.2 (Theorem 6.1.1 in [28]). *Sei $Q \in L^m(M)$ eigentlich getragen mit reellem Hauptteil q , welcher homogen vom Grad m sei. Falls $u \in \mathcal{D}'(M)$ und $Qu = f$ dann ist $WF(u) \setminus WF(f)$ enthalten in $q^{-1}(0)$ und ist invariant unter dem Hamilton'schen Vektorfeld H_q .*

Bemerkung. Die Aussage, dass $WF(u) \setminus WF(f)$ invariant unter dem Hamiltonschen Vektorfeld H_q ist, ist folgendermaßen zu verstehen: $WF(u) \setminus WF(f)$ ist invariant unter dem von H_q erzeugten und auf $T^*(M) \setminus WF(f)$ eingeschränkten Fluss.

Das bedeutet: Sei $(x_0, \xi_0) \in WF(u) \setminus WF(f)$. Durch den von H_q erzeugten Fluss ist eine eindeutig bestimmte Kurve γ in $T^*(M)$ gegeben mit $\gamma(0) = (x_0, \xi_0)$ und $\gamma'(t) = H_q(\gamma(t))$. Sei $I \subset \mathbb{R}$ das maximale Intervall, so dass $\gamma(I) \cap WF(f) = \emptyset$. Die Aussage ist nun, dass

$$\gamma(I) \subset WF(u). \quad (\text{B.2.4})$$

Dass dies die richtige Interpretation des Theorems ist, wird bei Betrachtung des Beweises klar. In [28, Seite 197 unten] wird für $\delta > 0$, so dass $(x_0, \xi_0) + t e_n \notin WF(f)$, wenn $|t| < \delta$, gezeigt, dass $(x_0, \xi_0) + t e_n \in WF(u)$. Dabei wurde die zu zeigende Aussage auf den Fall des Differentialoperators 1. Ordnung $D_n = \frac{d}{dx_n}$ in \mathbb{R}^n reduziert und e_n ist der Einheitsvektor in x_n -Richtung, der in diesem Fall das Hamiltonsche Vektorfeld an jedem Punkt ist.

Anhang C

Kausalitätsbeziehungen in global hyperbolischen Raumzeiten

Proposition C.1. *Sei M eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit, $\Sigma \subset M$ eine Cauchy-Fläche und $K \subset M$ kompakt. Dann existiert eine Cauchy-Fläche Σ_K von M , so dass $K \subset J_-(\Sigma_K)$.*

Beweis. Nach [1, Proposition 5] existiert

$$\begin{aligned}\Psi : M &\rightarrow \mathbb{R} \times \Sigma \\ x &\mapsto (t(x), \rho(x)),\end{aligned}\tag{C.1}$$

so dass

- (i) $S_t = \{z \in M \mid t(z) = t\}$ ist eine Cauchy-Fläche
- (ii) Die Kurve $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow M$, die durch $\Psi(\gamma_x(t)) = (t, x)$ charakterisiert wird, ist stetig und zeitartig in dem Sinne, dass $t < t' \Rightarrow \gamma_x(t) \ll \gamma_x(t')$

Dabei bedeutet $a \ll b$, dass es eine kausale, zukunftsgerichtete Kurve von a nach b gibt. Da K kompakt ist, existiert ein $x \in M$, so dass $t(x) = \max\{t(y) \mid y \in K\}$. Sei nun $y \in K$, dann gilt $t(y) \leq t(x)$. Falls $t(y) = t(x)$, so ist $y \in S_{t(x)} \subset I^-(S_{t(x)})$. Falls $t(y) < t(x)$, betrachten wir die Kurve $\gamma_{\rho(y)}$. Sie ist kausal, schneidet also $S_{t(x)}$. Für den Schnittpunkt gilt $\gamma_{\rho(y)}(t(y)) \ll S_{t(x)} \cap \gamma_{\rho(y)}$ wegen (ii). Also gilt $y \in I^-(S_{t(x)})$. Also gilt insgesamt $K \subset I^-(S_{t(x)})$. \square

Definition C.2. *Eine Teilmenge $V \subset M$ einer global hyperbolischen Raumzeit M heißt **vergangenheitskompakt**, falls für jeden Punkt $x \in M$ die Menge $J_-(x) \cap V$ in einem kompakten Gebiet enthalten ist.*

Die folgende Aussage wird im Beweis der Gültigkeit des Zeitschichtaxioms an zwei verschiedenen Stellen verwendet. Einerseits in Abschnitt 3 andererseits beim Beweis für die wechselwirkenden Theorien, in Abschnitt 4.

Proposition C.3. *Sei M eine global hyperbolische Raumzeit, $P \subset M$ vergangenheitskompakt und $K \subset M$ kompakt. Dann existiert eine kompakte Teilmenge von M , die $J_-(K) \cap P$ enthält.*

Beweis. Sei Σ eine Cauchy-Fläche in der Zukunft von K . Die Familie $(I_-(y))_{y \in \Sigma}$ ist eine offene Überdeckung von K , da $I_{\pm}(z)$ offen ist für jedes $z \in M$. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subset \Sigma$, so dass $(I_-(y))_{y \in Y}$ eine offene Überdeckung von K ist. Sei x ein Punkt in $I_-(K)$. Dann gilt $x \in I_-(y_i)$ für irgendein $i \in \{1, \dots, n\}$. (Dies gilt, da eine zeitartige, zukunftsgerichtete Kurve γ , von x nach $k \in K$ existiert. Da $k \in I_-(y_i)$ für irgendein i , kann γ zeitartig nach y_i verlängert werden.) Also gilt

$$I_-(K) \subset \bigcup_{y \in Y} I_-(y) \subset \bigcup_{y \in Y} J_-(y) . \quad (\text{C.2})$$

Weil $J_{\pm}(S) \subset \overline{I_{\pm}(S)}$ für jedes $S \subset M$ und da $J_-(z)$ abgeschlossen ist für jedes $z \in M$, gilt

$$J_-(K) \subset \overline{I_-(K)} \subset \overline{\bigcup_{y \in Y} J_-(y)} = \bigcup_{y \in Y} \overline{J_-(y)} = \bigcup_{y \in Y} J_-(y) . \quad (\text{C.3})$$

Bildet man nun die Schnittmenge mit P , so erhält man

$$J_-(K) \cap P \subset \left(\bigcup_{y \in Y} J_-(y) \right) \cap P \subset \bigcup_{y \in Y} (J_-(y) \cap P) , \quad (\text{C.4})$$

wobei die rechte Seite aufgrund der Annahme in einer endlichen Vereinigung kompakter Mengen enthalten ist. \square

Literaturverzeichnis

- [1] A. N. Bernal und M. Sánchez. On smooth cauchy hypersurfaces and geroch's splitting theorem. *Commun. Math. Phys.*, 243:461–470, 2003.
- [2] N. N. Bogoliubov und D. V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. John Wiley and Sons, New York, 3rd edition, 1976.
- [3] R. Brunetti und K. Fredenhagen. Microlocal analysis and interacting quantum field theories: Renormalization on physical backgrounds. *Commun. Math. Phys.*, 208:623, 2000.
- [4] R. Brunetti und K. Fredenhagen. Towards a background independent formulation of perturbative quantum gravity, 2006, arXiv:gr-qc/0603079v3.
- [5] R. Brunetti, K. Fredenhagen, und M. Köhler. The microlocal spectrum condition and wick polynomials of free fields on curved spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 180:633–652, 1996.
- [6] R. Brunetti, K. Fredenhagen, und R. Verch. The generally covariant locality principle – a new paradigm for local quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, 237:31–68, 2003.
- [7] C. Bär, N. Ginoux, und F. Pfäffle. *Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*. European Mathematical Society Publishing House, 2007.
- [8] S. Chern, W. Chen, und K. Lam. *Lectures on Differential Geometry*. World Scientific, 1999.
- [9] B. Chilian und K. Fredenhagen. The time slice axiom in perturbative quantum field theory in globally hyperbolic spacetimes, 2008, arXiv:0802.1642v2 [math-ph].
- [10] B. S. De Witt und R. W. Brehme. Radiation damping in a gravitational field. *Ann. of Phys.*, 9:220, 1965.

-
- [11] J. Dimock. Algebras of local observables on a manifold. *Commun. Math. Phys.*, 77:219–228, 1980.
- [12] M. Dütsch und K. Fredenhagen. Algebraic quantum field theory, perturbation theory and the loop expansion. *Communications in Mathematical Physics*, 219:5, 2001.
- [13] H. Epstein und V. Glaser. The role of locality in perturbation theory. *Ann Inst.H. Poincaré A*, 19:211, 1973.
- [14] K. Fredenhagen und M. Dütsch. Causal perturbation theory in terms of retarded products and a proof of the action ward identity. *Reviews in Mathematical Physics*, 16:1291–1348, 2004.
- [15] S. A. Fulling, F. J. Narcowich, und R. M. Wald. Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved space-time. II, *Ann. Phys. (NY)*, 136:243–272, 1981.
- [16] S. A. Fulling, M. Sweeny, und R. M. Wald. Singularity structure of the two-point function ind quantum field theory in curved spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 63:257–264, 1978.
- [17] W.-D. Garber. The connexion of duality and causal properties for generalized free fields. *Commun. Math. Phys.*, 42:195–208, 1975.
- [18] R. Geroch. Domain of dependence. *Journal of Mathematical Physics*, 11:437–449, 1970.
- [19] J. Glimm und A. Jaffe. A $\lambda\varphi^4$ quantum field theory without cutoffs i. *Phys. Rev.*, 176:1945–1951, 1968.
- [20] M. Goroff und A. Sagnotti. The ultraviolet behaviour of einstein gravity. *Nucl.Phys.*, B266:709, 1986.
- [21] R. Haag und D. Kastler. An algebraic approach to quantum field theory. *J.Math.Phys.*, 5:848, 1964.
- [22] R. Haag und S. Schroer. Postulates of quantum field theory. *J.Math.Phys.*, 3:248, 1962.
- [23] S. Hollands und R. M. Wald. Local wick polynomials and time ordered products of quantum fields in curved spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 223:289–326, 2001.
- [24] S. Hollands und R. M. Wald. Existence of local covariant time ordered products of quantum fields in curved spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 231:309, 2002.

- [25] S. Hollands und R. M. Wald. Conservation of the stress tensor in perturbative interacting quantum field theory in curved spacetimes. *Rev. Math. Phys.*, 17:227, 2005.
- [26] L. Hörmander. Fourier integral operators i. *Acta Mathematica*, 127:79–183, 1971.
- [27] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [28] L. Hörmander und J. Duistermaat. Fourier integral operators ii. *Acta Mathematica*, 128:183–269, 1972.
- [29] C. J. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*. World Scientific, 1999.
- [30] W. Junker. *Adiabatic Vakua and Hadamard States for Scalar Quantum Fields on Curved Spacetime*. Dissertation, Universität Hamburg, 1995.
- [31] B. Kay und R. Wald. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon. *Physics Reports*, 207:49–136, 1991.
- [32] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [33] R. Oloff. *Geometrie der Raumzeit*. Vieweg, 2004.
- [34] M. E. Peskin und D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [35] M. J. Radzikowski. Micro-local approach to the hadamard condition in quantum field theory on curved space-time. *Commun. Math. Phys.*, 179:529–553, 1996.
- [36] R. Schrader. Yukawa quantum field theory in two space-time dimensions without cutoffs. *Annals of Physics*, 70:412–457, 1972.
- [37] R. M. Wald. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. University of Chicago Press, Chicago, 1994.
- [38] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. University Press, Cambridge, UK, 2005.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Fredenhagen für die interessante Aufgabenstellung und die ausgezeichnete Betreuung danken.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe „Algebraische Quantenfeldtheorie“ danke ich für die schöne Zeit am DESY, ihre Hilfsbereitschaft und die gute Zusammenarbeit. Besonders Matthias Westrich, Nicola Pinamonti, Thomas-Paul Hack, Muharrem Küskü, Kay Keller, Claudio Dappiaggi und Marc Oliver Hoge danke ich für die zahlreichen spannenden Diskussionen.

Ich danke Bettina für ihre unermüdliche Unterstützung und liebevollen Beistand. Außerdem danke ich ihr für die Hilfe beim Korrigieren dieser Arbeit. Meine tiefe Dankbarkeit gilt meinen Eltern, die mir durch ihre bedingungslose Unterstützung ein sorgenfreies Studium ermöglicht haben.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere, diese Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben. Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, den 10.03.2008

Bruno Chilian