

ALBERT-LUDWIGS UNIVERSITÄT FREIBURG  
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

# Homologie und die Feldalgebra des quantisierten Maxwellfeldes

## Diplomarbeit

vorgelegt von  
**Benjamin Lang**  
geboren am 24.09.1984 in Troisdorf

Freiburg

Dezember 2010 (mit Errata und Bemerkungen April 2011)

---

Erstgutachter: Herr Prof. Dr. K. Fredenhagen  
Zweitgutachter: Herr Prof. Dr. J.J. van der Bij

# Errata und Bemerkungen

## April 2011

### Errata Satz 4.1.2

Im Beweis der Richtung „ $\Leftarrow$ “ ist ein Vorzeichenfehler.  $\Lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C})$  soll eine Lösung von

$$-\delta d\Lambda = \square\Lambda = +\delta A$$

sein. Dementsprechend sind

$$+\delta A_+ := +\chi^+ \delta A$$

$$+\delta A_- := +\chi^- \delta A$$

zu definieren, woraus sich

$$\Lambda := +G_+ \delta A_+ + G_- \delta A_-$$

ergibt.

### Bemerkungen zu 4.2.1 und 4.2.2

In Gesprächen mußte ich feststellen, daß es nicht so deutlich geschrieben steht, was ich als Phasenräume für das Vektorpotential betrachte, als ich zunächst dachte. Ich danke Dr. C.J. Fewster sehr für die aufklärenden Gespräche. Aus diesem Grund möchte ich hier nochmal deutlicher herausstellen, was ich als Phasenraum des Vektorpotentials ansehe.

Der Vektorraum

$$\mathcal{PH} := \left\{ [A] \mid A \text{ löst } -\delta dA = 0 \text{ und } A \sim A' \text{ für eine Lösung } A' \text{ von Satz 4.1.1} \right\},$$

wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  definiert wird durch

$$A \sim A' :\iff \exists \Lambda \in \Omega^0(M, \mathbb{C}) \text{ sodaß } A' = A + d\Lambda,$$

wird mit der symplektischen Form

$$s([A], [A']) := \int_{\Sigma} \iota^{pb}(A \wedge *dA' - A' \wedge *dA) = \int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge *\Pi' - \mathcal{A}' \wedge *\Pi,$$

wobei  $\mathcal{A} := \iota^{pb}A$ ,  $\mathcal{A}' := \iota^{pb}A'$ ,  $\Pi := *^{-1}\iota^{pb} * dA$ ,  $\Pi' := *^{-1}\iota^{pb} * dA'$  ( $-\delta dA = 0 = -\delta dA' \implies \delta\Pi = 0 = \delta\Pi'$ ) ein symplektischer Vektorraum.

**Beweis:** Seien  $A, \tilde{A}$  zwei Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse  $[A] \in \mathcal{PH}$ , insbesondere gilt  $A \sim \tilde{A} \iff \tilde{A} = A + d\Lambda$  für ein  $\Lambda \in \Omega^0(M, \mathbb{C})$ . Wir folgern  $\Pi = \tilde{\Pi}$  und, da die äußere Ableitung mit dem Zurückziehen vertauscht,  $\mathcal{A} \sim \tilde{\mathcal{A}}$ , wobei  $\mathcal{A} \sim \tilde{\mathcal{A}} \iff \exists \lambda \in \Omega^0(\Sigma, \mathbb{C})$  sodaß  $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + d\lambda$ . Aufgrund der Definition von  $\mathcal{PH}$  ist  $\Pi$  kompakt getragen und  $\mathcal{A}$  ist immer äquivalent zu einer kompakt getragenen 1-Form auf  $\Sigma$ . Deswegen ist das Integral immer wohldefiniert und wegen

$$\begin{aligned} s([A], [A']) &= \int_{\Sigma} \tilde{\mathcal{A}} \wedge *\Pi' - \mathcal{A}' \wedge *\tilde{\Pi} = \int_{\Sigma} (\mathcal{A} + d\lambda) \wedge *\Pi' - \mathcal{A}' \wedge *\Pi \\ &= \int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge *\Pi' - \mathcal{A}' \wedge *\Pi + \int_{\Sigma} \lambda \wedge *\delta\Pi' = \int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge *\Pi' - \mathcal{A}' \wedge *\Pi, \end{aligned}$$

ist  $s$  wohldefiniert und unabhängig von dem gewählten Repräsentanten. Weiter ist  $s$  nicht ausgeartet, denn fixiere  $[A] \in \mathcal{PH}$  und nehme  $s([A], [A']) = 0$  für alle  $[A'] \in \mathcal{PH}$  an. Insbesondere gilt dann auch  $s([A], [A']) = \int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge *\Pi' - \mathcal{A}' \wedge *\Pi = 0$  für alle  $(\mathcal{A}', \Pi') \in \Omega_0^1(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{0,\delta}^1(\Sigma, \mathbb{C})$ . Sei  $[A'] \in \mathcal{PH}$  so, daß  $\Pi' = 0$ , dann gilt  $s([A], [A']) = -\int_{\Sigma} \mathcal{A}' \wedge *\Pi = 0$  für alle  $\mathcal{A}' \in \Omega_0^1(\Sigma, \mathbb{C})$ . Die symmetrische Paarung von Differentialformen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma} : \Omega_0^p(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_0^p(\Sigma, \mathbb{C})$ ,  $\langle \omega, \eta \rangle_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \omega \wedge *\eta$  ist nicht ausgeartet und aus diesem Grund kann  $s([A], [A'])$  nur dann Null für alle  $[A'] \in \mathcal{PH}$  ergeben, wenn  $\Pi = 0$  ist. Sei jetzt  $[A'] \in \mathcal{PH}$  so, daß  $\mathcal{A}' \sim 0$ . Insbesondere gilt dann  $\mathcal{A}' = d\lambda$  für ein  $\lambda \in \Omega^1(\Sigma, \mathbb{C})$ . Es folgt  $s([A], [A']) = \int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge *\Pi' = 0$  für alle  $\Pi' \in \Omega_{0,\delta}^1(\Sigma, \mathbb{C})$ . Weil  $\Pi'$  kogeschlossen ist, gilt die Identität erst recht für alle koexakten  $\Pi'$ . Für diese existiert wiederum eine kompakt getragene 2-Form  $\mathcal{V}' \in \Omega_0^2(\Sigma, \mathbb{C})$  mit  $\Pi' = \delta\mathcal{V}'$ . Deshalb ergibt sich  $\int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge *\delta\mathcal{V}' = 0$  für alle  $\mathcal{V}' \in \Omega_0^2(\Sigma, \mathbb{C})$ . Nach dem Integrationsssatz von Stokes ergibt sich somit  $\int_{\Sigma} d\mathcal{A} \wedge *\mathcal{V}' = 0$  und wegen der Nichtentartetheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma}$  folgt  $d\mathcal{A} = 0$ . Da  $\mathcal{A}$  in diesem Fall geschlossen ist, erhält man mit der Poincarédualität 5.1.2, daß  $\mathcal{A}$  exakt sein muß.  $\int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge *\Pi' = 0$  für alle  $\Pi' \in \Omega_{0,\delta}^1(\Sigma, \mathbb{C})$  bedeutet nun aber auch  $\int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge *\Pi' = 0$  für alle  $*\Pi' \in \Omega_{0,d}^2(\Sigma, \mathbb{C})$  und deshalb ergibt die Poincarédualität die Exaktheit von  $\mathcal{A}$ . Zusammengefaßt ist also  $s([A], [A']) = 0$  für alle  $[A'] \in \mathcal{PH}$  genau dann, wenn  $\mathcal{A}$  exakt ist und  $\Pi = 0$ . Die Exaktheit von  $\mathcal{A}$  ergibt  $\mathcal{A} \sim 0$  und daher  $0 \in [A]$ , also  $[0] = [A]$ .

### Bemerkung zu 6.1.3

Die universelle Algebra ist eindeutig bis auf \*-Isomorphismus.

### Bemerkung zu 6.1.4

Wegen  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{\mathbf{F}}_i(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_{2c}(M_i, \mathbb{C})$  können die Beweise von  $\widehat{\mathbf{F}}(\delta\eta) = 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C})$  und  $\widehat{\mathbf{F}}(-d\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  deutlich verkürzt werden: Sei  $\eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C})$ , dann

$$\widehat{\mathbf{F}}(\delta\eta) = \widehat{\mathbf{F}}\left(\delta\left(\sum_{j \in J} \varphi_j \eta\right)\right) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}(\delta(\varphi_j \eta)) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j(\delta(\varphi_j \eta)) = 0,$$

da  $\varphi_j \eta \in \Omega_{3c}(M_j, \mathbb{C})$ . Für  $\theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  gilt

$$\widehat{\mathbf{F}}(-d\theta) = \widehat{\mathbf{F}}\left(-d\left(\sum_{j \in J} \varphi_j \theta\right)\right) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}(-d(\varphi_j \theta)) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j(-d(\varphi_j \theta)) = 0,$$

da  $\varphi_j \theta \in \Omega_{1c}(M_j, \mathbb{C})$ .

### Errata Satz 6.4.1

Ich danke Prof. Claudio Dappiaggi für die Aufdeckung meines Fehlers. Im Gegensatz zur Aussage des Satzes stellt das quantisierte Maxwellfeld keine lokal kovariante Quazantenfeldtheorie dar, es sei denn man schränkt sich auf Mannigfaltigkeiten mit trivialer zweiten de Rham'schen Kohomologiegruppe ein. Mein Fehler lag in den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi_{pf}\omega = -d\theta &\implies \psi^{pb}\psi_{pf}\omega = \omega = -\psi^{pb}d\theta = -d\psi^{pb}\theta, \\ \psi_{pf}\omega = \delta\eta &\implies \psi^{pb}\psi_{pf}\omega = \omega = \psi^{pb}\delta\eta = \delta\psi^{pb}\eta, \end{aligned}$$

die zwar richtig gerechnet, aber daraus falsch von mir gefolgert wurde.  $\psi^{pb}\theta$  und  $\psi^{pb}\eta$  haben nicht notwendigerweise einen kompakten Träger! Man kann deswegen im Allgemeinen nicht  $\widehat{\mathbf{F}}(-d\psi^{pb}\theta) = 0 = \widehat{\mathbf{F}}(\delta\psi^{pb}\eta)$  folgern.

Das Scheitern liegt allgemeiner an der Injektivität der \*-Algebrenhomomorphismen.

Angenommen man bettet mittels  $\psi$  eine global hyperbolische Raumzeit  $(M, g)$  aus  $\mathfrak{Man}$  mit  $H_{dR}^2 M \neq 0$  in eine global hyperbolische Raumzeit  $(M', g')$  aus  $\mathfrak{Man}$  mit  $H_{dR}^2 M' = 0$  ein, dann ist der \*-Algebrenhomomorphismus  $\mathfrak{F}_u \psi$  nicht injektiv. Angenommen  $0 \neq \omega \in H_{dR}^2 M$ , dann gilt wegen  $H_{dR}^2 M' = 0$

$$\widehat{\mathbf{F}}(\omega) \neq 0, \text{ aber } \mathfrak{F}_u \psi(\widehat{\mathbf{F}}(\omega)) = \widehat{\mathbf{F}}'(\psi_{pf}\omega) = 0,$$

da das Drücken mit der äußeren Ableitung vertauscht.  $\psi_{pf}\omega$  wird glatt durch Null fortgesetzt als geschlossene (und damit exakte) 2-Form auf  $M'$  betrachtet.

Deswegen sind alle in dieser Diplomarbeit vorliegenden und von mir getroffenen Aussagen, daß das quantisierte Maxwellfeld eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie darstellt, falsch und hinfällig.

---

## Abstract

The aim of this thesis is to discuss the quantised Maxwell field on curved spacetimes by the means of the field strength tensor.

We show that the initial value problem for the field strength tensor is well posed on any globally hyperbolic spacetime regardless of its topology and without introducing potentials.

The field algebra of the field strength tensor is constructed via the universal algebra of a system of local field algebras. Assuming locality, we prove that the commutation relation is given by Lichnerowicz's commutator.

We analyse the structure of the field algebra of the field strength tensor and conclude the existence of a non-trivial center in the case of a vanishing second de Rham's cohomology group. Non-trivial elements of the center are constructed and it is shown that they can be understood as non-trivial electric and magnetic fluxes.

Furthermore, show that the time slice axiom is fulfilled and the algebra of the cauchy hypersurface is specified. The isomorphism from the algebra of the cauchy hypersurface to the field algebra of the field strength tensor is constructed, too. Finally, we verify that the quantised maxwell field defines a locally covariant quantum field theory.

Throughout this thesis, we point out the role of de Rham's cohomology and singular homology for (quantised) electromagnetism on curved spacetimes.

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das quantisierte Maxwellfeld auf gekrümmten Raumzeiten im Sinne von Feldstärken behandelt.

Es wird gezeigt, daß der elektromagnetische Feldstärketensor ein wohldefiniertes Anfangswertproblem auf einer beliebigen global hyperbolischen Raumzeit definiert, unabhängig von der Topologie der Raumzeit und ohne die Einführung von Potentialen. Wir konstruieren die Feldalgebra des Feldstärketensors durch die universelle Algebra eines Systems lokaler Feldalgebren und beweisen so, daß die Kommutatorrelation durch den Lichnerowiczkommutator gegeben wird.

Wir untersuchen die Struktur der Feldalgebra des Feldstärketensors und stellen fest, daß im Fall einer nicht verschwindenden 2-ten de Rham-Kohomologiegruppe ein nicht triviales Zentrum existiert. Wir konstruieren nicht triviale Zentrumselemente und zeigen, daß sich diese als nicht triviale elektrische und magnetische Flüsse interpretieren lassen.

Weiter wird die Erfüllung des Zeitschichtaxiom gezeigt und sowohl die Algebra der Cauchyhyperfläche als auch der Algebrenisomorphismus von dieser in die Feldalgebra des Feldstärketensors konstruiert. Zum Abschluß zeigen wir, daß das so quantisierte Maxwellfeld eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie ist.

Durch die ganze Arbeit hindurch wird die Rolle der de Rham-Kohomologie und der singulären Homologie für die Behandlung des Elektromagnetismus auf gekrümmten Raumzeiten betont.

---



---

*In nova fert animus mutatas dicere formas  
corpora. Di, coeptis -nam vos mutastis et illas-  
aspirate meis primaque ab origine mundi  
ad mea perpetuum deducite tempora carmen!*

-Prooemium aus Ovids Metamorphosen

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>13</b>
<b>1 Algebraische Quantenfeldtheorie</b>	<b>20</b>
1.1 Algebra in der AQFT . . . . .	20
1.2 Der Haag-Kastler Rahmen . . . . .	23
1.3 Lokal kovariante Quantenfeldtheorie . . . . .	25
<b>2 Die Maxwellgleichungen und ihre Formulierungen</b>	<b>30</b>
2.1 Integrale Form . . . . .	30
2.2 Differentielle Form . . . . .	32
2.3 Differentialgeometrische Formulierung . . . . .	32
2.4 Kovariante Formulierung . . . . .	38
2.5 Differentialgeometrische, kovariante Form . . . . .	40
2.6 Konsistenzrechnung . . . . .	42
2.7 Maxwellfeld auf Lorentzmannigfaltigkeiten . . . . .	43
<b>3 Das Cauchyproblem des Feldstärketensors</b>	<b>49</b>
3.1 Vorüberlegungen . . . . .	50
3.2 Cauchyproblem des Feldstärketensors . . . . .	53
3.3 Beweis des Cauchyproblems . . . . .	54
3.4 Fundamentallösung . . . . .	63
3.5 Zur Feldalgebra des Feldstärketensors I . . . . .	64
<b>4 Die Quantisierung des Vektorpotentials</b>	<b>67</b>
4.1 Das Cauchyproblem des Vektorpotentials . . . . .	68
4.2 Klassische Phasenräume . . . . .	72
4.3 Quantisierung . . . . .	80
4.4 Zur Feldalgebra des Feldstärketensors II . . . . .	86
<b>5 Exakte Formen und Homologie</b>	<b>90</b>
5.1 de Rham-Kohomologie . . . . .	90

5.2	Singuläre Homologie . . . . .	94
5.3	Integration von Formen über Ketten . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Die Quantisierung des Feldstärketensors</b>	<b>107</b>
6.1	Die universelle Algebra der Feldstärken . . . . .	107
6.2	Das Zentrum der Feldalgebra . . . . .	116
6.3	Zeitschichtaxiom . . . . .	119
6.4	Quantisiertes Maxwellfeld als lokal kovariante QFT . . . . .	124
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>126</b>
	<b>Anhang</b>	<b>128</b>
<b>A</b>	<b>Glatte Mannigfaltigkeiten</b>	<b>128</b>
A.1	Grundbegriffe . . . . .	128
A.2	Eingebettete Untermannigfaltigkeiten . . . . .	130
A.3	Vektorbündel . . . . .	135
A.4	Multilineare Algebra . . . . .	137
A.5	Tensorfelder und Differentialformen . . . . .	139
<b>B</b>	<b>Semi-Riemannsche Differentialgeometrie</b>	<b>144</b>
B.1	Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten . . . . .	144
B.2	Lineare Zusammenhänge . . . . .	145
B.3	Der Levi-Civita Zusammenhang . . . . .	148
B.4	Der Riemanntensor . . . . .	151
B.5	Kalkül mit Epsilonsymbolen . . . . .	153
B.6	Der Hodge-*-Operator . . . . .	157
B.7	Das Kodifferential . . . . .	162
B.8	Der Wellenoperator . . . . .	165
B.9	Komplexwertige Differentialformen . . . . .	172
<b>C</b>	<b>Lorentzgeometrie</b>	<b>176</b>
C.1	Erste Definitionen . . . . .	176
C.2	Kausale Strukturen . . . . .	178
C.3	Global hyperbolische Raumzeiten . . . . .	181
C.4	Angepaßte Koordinatensysteme . . . . .	184
C.5	Normal hyperbolische Differentialgleichungen . . . . .	188
C.6	Wellengleichung von Differentialformen . . . . .	191
	<b>Verwendete Literatur</b>	<b>195</b>

# Einleitung und Motivation

Diese Arbeit befasst sich mit der Quantisierung des Maxwellfeldes auf gekrümmten Raumzeiten im Rahmen der *Algebraischen Quantenfeldtheorie* (AQFT) und mit den dabei auftretenden algebraischen Strukturen.

## Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten

Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten, kurz QFTCS für den englischen Ausdruck „*quantum field theory on curved spacetimes*“, ist die Theorie quantisierter Felder im Gravitationsfeld, wobei die Gravitation klassisch gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) durch eine gekrümmte Lorentzmannigfaltigkeit beschrieben wird. Die QFTCS ist eine angemessene Theorie zur Behandlung von Quanteneffekten, bei denen Gravitation zwar berücksichtigt werden soll, die Quantennatur der Gravitation aber vernachlässigt werden kann. Dies sollte erwartungsgemäß für Größenordnungen über der Plancklänge,  $10^{-35}m$ , der Fall sein. Im Größenbereich der Plancklänge und kleiner erwartet man, daß die QFTCS ihre Aussagegültigkeit verliert, da eine klassische Metrik und damit die Beschreibung der Raumzeit als 4-dimensionale Lorentzmannigfaltigkeit unangemessen werden kann. Dies sind jedoch nur Mutmaßungen und genaue Kriterien können erst angegeben werden, wenn eine volle quantisierte Theorie der Gravitation vorliegt. Die QFTCS sollte sich dann als semiklassische Näherung dieser Quantengravitation erweisen.

Dies hat scheinbar den bitteren Beigeschmack, als brauche man eine vollwertige Quantentheorie der Gravitation, um QFTCS letztendlich zu legitimieren. Dies berücksichtigt aber nicht die Lehre der ART, nämlich daß wir nach den Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

in einer gekrümmten Raumzeit leben. Wenn man also Materie als Quantenfelder in unserem Universum behandeln möchte, dann ist man gezwungen QFTCS zu berücksichtigen. In diesem Sinne ist QFTCS fundamentaler als

die Quantenfeldtheorie auf der flachen Minkowskiraumzeit und wir sollten die Lehren der QFTCS ernst nehmen, auch wenn diese unserer Intuition auf der Minkowskiraumzeit widerspricht. Trotz der klassischen Behandlung der Gravitation hat die QFTCS die bisher tiefsten Einsichten in die Natur der Quantengravitation ermöglicht, z.B. Hawkingstrahlung, Unruheffekt und Rückwirkungen zwischen Metrik und Feldern.

Ein weiterer Grund, sich mit QFTCS auseinanderzusetzen, ist die Aussicht auf neue qualitative Effekte, die nicht notwendigerweise in der Größenordnung der Plancklänge stattfinden und daher durchaus in den heutigen Laboren nachgewiesen werden können. Genauso wie das Einbeziehen der Speziellen Relativitätstheorie in die Quantenmechanik die theoretische Vorhersage von Antiteilchen ermöglichte, könnte QFTCS neue und schon heute messbare qualitative Gesichtspunkte mit in die Physik bringen.

Um QFTCS zu behandeln, muß man zuerst einige Methoden aus der Quantenfeldtheorie auf der Minkowskiraumzeit wieder „verlernen“. Üblicherweise stützt sich diese auf die Zerlegung einer Lösung der klassischen Feldgleichungen in Teile positiver und negativer Frequenzen sowie die Konstruktion einer Darstellung der Kommutatorrelationen mit einem Fockraum. Die Benutzung eines Fockraumes als Darstellungsraum entspricht einem Teilchenbild der quantisierten Theorie, und die Feldoperatoren werden dann durch Kombinationen von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf diesem gegeben. Der hier angedeutete Vorgang läuft etwa so ab, daß zuerst die Zustände (=Vektoren im Fockraum) konstruiert werden und dann die Observablen als selbstadjungierte Operatoren auf diesem Hilbertraum. Die Konstruktion des Fockraumes ist aber mit rein willkürlichen Wahlen verbunden. Für endliche Freiheitsgrade stellt dies kein Problem dar, da man nach dem Stone-von Neumann Theorem unitär äquivalente Darstellungen erhält. Dieser glückliche Umstand liegt in einer Feldtheorie, die unendlich viele Freiheitsgrade hat, nicht mehr vor, und verschiedene Wahlen führen zu verschiedenen unitär inäquivalenten Darstellungen, also zu verschiedenen Teilchenbildern. Auf dem Minkowskiraum hat man noch die Möglichkeit, einen ganz bestimmten Fockraum auszuzeichnen, da man die Poincaréinvarianz zur Verfügung hat. Diese spielt die Hauptrolle bei der Auszeichnung einer dieser unitär inäquivalenten Darstellungen, d.h. physikalisch bei der Auswahl eines bevorzugten, eindeutigen Vakuumzustands und der damit verbundenen Definition des Begriffs eines „Teilchens“. Gekrümmte Raumzeiten weisen i.A. aber keine Symmetrien auf und deswegen gibt es auf allgemeinen gekrümmten Raumzeiten keinen ausgezeichneten, eindeutig bestimmten Vakuumzustand. Das Teilchenbild zerbricht! Auf gekrümmten Raumzeiten gibt es keinen unzweifelhaften Begriff von Teilchen!

Dies führt zwangsweise dazu, daß neue physikalische sowie mathemati-

sche Ansätze gefunden werden müssen, um QFTCS zu behandeln und diese müssen Quantenfeldtheorie als das behandeln, was sie ist: *Eine Theorie quantisierter Felder und keine verkleidete Theorie von Teilchen!* Felder dienen dazu, daß Prinzip der *Lokalität* in die Physik einzubinden und sind keine Synonyme für Teilchen. Der Teilchenbegriff ist nicht fundamental, weder für die Formulierung noch für die Interpretation einer Quantenfeldtheorie! Diese Schlußfolgerung wird vor allem durch den Unruheffekt bestärkt.

Als einführende Literatur zu QFTCS und für mehr und detailliertere Information verweisen wir auf [Wal94], [Wal06] und [Wal09]. Zur Rolle von Feldern in der Quantenfeldtheorie siehe auch [Haa96].

### **Algebraische Quantenfeldtheorie**

Die AQFT, eingeleitet durch die Arbeit [HK64] von R. Haag und D. Kastler, ist nun sowohl vom physikalischen als auch vom mathematischen Standpunkt aus hervorragend dafür gewappnet, die Herausforderung der ART an die Quantenfeldtheorie anzunehmen und mit den bereits beschriebenen Problemstellungen fertig zu werden. Sie dreht gewissermaßen den Spieß zwischen Observablen und Zuständen um, indem die Observablen als abstrakte Elemente einer Algebra konstruiert werden und die Zustände als lineare Funktionale auf dieser Algebra. Dadurch ist man in der Lage, alle Zustände, insbesondere diejenigen, die in unitär inäquivalenten Quantenfeldtheorien (damit sind die Hilbertraumdarstellungen der Kommutatorrelationen gemeint) auftreten, auf einmal zu behandeln. Das bedeutet ultimativ, daß eine Definition der Theorie gefunden wurde, die ohne eine speziell ausgewählte Konstruktion auskommt. Darüber hinaus werden durch den Fokus auf den algebraischen Inhalt der Theorie im Prinzip alle unitär inäquivalenten Quantenfeldtheorien auf einmal beschrieben, da diese auf dieselben algebraischen Strukturen führen. Die Formulierung mittels einer Hilbertraumdarstellung erhält man durch die GNS-Darstellung der Algebra der Observablen zurück. Dadurch ist man sogar in der Lage, Darstellungen zu beschreiben, die keine Fockraumdarstellungen sind.

Diese Aussagen werden wir in Kapitel 1, in welchem wir die Methoden der AQFT vorstellen, mit mehr Inhalt füllen. Ein Lehrbuch zur AQFT ist z.B. [Haa96], aber auch [Wal94].

### **Quantisierung des Maxwellfeldes und QED**

Als erste Arbeit über das quantisierte elektromagnetische Feld kann wohl die Arbeit von P. Jordan und W. Pauli von 1928 gelten, die sich als Fortführung von P.A.M. Diracs Arbeiten zur Quantentheorie von Emission, Absorption

und Dispersion von Strahlung aus dem Jahr 1927 sieht. In der Arbeit von P. Jordan und W. Pauli werden zum ersten Mal die elektromagnetischen Feldstärken, nicht die Potentiale, mit relativistisch invarianten Methoden quantisiert und auch Kommutatorrelationen angegeben. Die dort betrachtete Theorie ist aber diejenige eines reinen elektromagnetischen Strahlungsfeldes ohne geladene Teilchen und berücksichtigt daher noch keine Wechselwirkungen.

Die Weiterentwicklung dieser Theorie und die Ausweitung auf die Behandlung von Wechselwirkung mit Materie wurden von vielen weiteren Physikern vorangetrieben, u.a. von W. Pauli, W. Heisenberg, L. Landau, R. Peierls und E. Fermi. Mit den Arbeiten von S. Tomonaga, J. Schwinger, R.P. Feynman und F.J. Dyson gipfelten die Bemühungen, das elektromagnetische Feld zu quantisieren und eine Quantentheorie der Wechselwirkung von elektromagnetischen Feldern mit Materie zu erlangen, in der Geburt der QED, der *Quantenelektrodynamik*. Tomonagas Arbeiten sind dabei deutlich früher als 1946 anzusiedeln, da sie schon bereits 1943 in japanischer Ausgabe vorhanden waren. F.J. Dyson zeigte u.a., daß R.P. Feynmans diagrammatische Pfadintegralformulierung der Quantenelektrodynamik äquivalent zu der Operatormethode von S. Tomonaga und J. Schwinger ist. S. Tomonaga, J. Schwinger und R.P. Feynman wurden 1965 für ihre Arbeiten gemeinsam mit dem Nobelpreis für Physik geehrt.

Wegen der Ausweitung auf Wechselwirkungen liegt der Fokus in der QED auf dem Potential und insbesondere auch auf einer Interpretation des quantisierten Maxwellfeldes als Theorie von Teilchen, den *Photonen*. Wie die Arbeiten von S.N. Gupta und K. Bleuler aber deutlich machten, war die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes mit der QED noch nicht vollständig gelöst worden. Obwohl die QED extrem präzise Vorhersagen liefert, wie z.B. das anomale magnetische Moment des Elektrons und die Lambverschiebung, gibt es viele Aspekte, die mathematisch betrachtet nicht auf festen Füßen stehen.

## **Das quantisierte Maxwellfeld in der AQFT**

Im Rahmen einer axiomatischen Quantenfeldtheorie wurden zuerst nur Teilaspekte des quantisierten Maxwellfeldes behandelt, in den meisten Standardlehrbüchern wurde es sogar direkt von Beginn an aus der Behandlung ausgeschlossen. Die Gründe dafür sind mannigfaltig. An erster Stelle kann wohl genannt werden, daß das Maxwellfeld zwei Arten der Beschreibung zuläßt, nämlich einmal durch die Feldstärken und einmal durch Potentiale, die aber nicht eindeutig sind und Eichtransformationen erlauben. Weiter gibt es Schwierigkeiten mit dem Lagrangeschen Formalismus, woraus Pro-



bleme bei einer kanonischen Quantisierung entstehen. Zusätzlich muß man beim quantisierten Maxwellfeld den singulären Fall der Darstellung der Poincarégruppe für verschwindende Massen betrachten. Nicht vergessen sollte man auch das Auftreten von indefiniten Skalarprodukten bei Lorentzinvarianten Beschreibungen, so wie beim Gupta-Bleuler Formalismus. Alles in allem sieht sich also eine mathematisch rigorose Behandlung des quantisierten Maxwellfeldes vielen und komplizierten Schwierigkeiten gegenüber.

Die erste systematische und detaillierte Arbeit über das quantisierte Maxwellfeld in der axiomatischen Quantenfeldtheorie wurde erst 1974 von F. Strocchi und A.S. Wightman [SW74] erstellt, die eine Hilbertraumformulierung benutzt. Ein anderer Ansatz wurde ab 1977 von P.J.M. Bongaarts mit [Bon77] und [Bon82] verfolgt. In diesen beiden Arbeiten wird eine algebraische Formulierung der axiomatischen Quantenfeldtheorie nach H.J. Borchers benutzt, sowohl die Feldalgebra der Potentiale als auch die Feldalgebra der Feldstärketensoren konstruiert und deren Eigenschaften behandelt. Durch die algebraische Formulierung durch Borchers-Uhlmann Algebren erreicht P.J.M. Bongaarts eine rigorose axiomatische Formulierung des Quantenfeldes der Photonen, mit der von wenigen grundlegenden Prinzipien ausgehend und in systematischer Weise oft heuristisch angenommene oder unzusammenhängende Ergebnisse aus der damaligen Literatur ableitbar sind. Unserer Ansicht nach bekamen diese Arbeiten aber nicht die Aufmerksamkeit, die sie verdient hatten. Ein anderer algebraischer Ansatz wurde von A.L. Carey, J.M. Gaffney und C.A. Hurst mit [CGH77], ein wenig früher als P.J.M. Bongaarts erste Arbeit, gemacht. In diesem Ansatz wird die Formulierung der Quantenfeldtheorie durch Weylalgebren nach I.E. Segal verfolgt, es werden jedoch „nur“ die Potentiale quantisiert und diskutiert. In der Arbeit [GH85] von H.B.G.S. Grundling und C.A. Hurst aus dem Jahr 1985 wurden diese Methoden erweitert, um ganz allgemein Systeme mit Eichfreiheiten auf algebraische Weise zu quantisieren. Als Beispiel wird die Quantisierung des elektromagnetischen Potentials diskutiert.

Den bisher genannten Arbeiten ist aber gemein, daß sie auf den Minkowskiraum bezogen sind. Eine rigorose Quantisierung des freien Maxwellfeldes auf gekrümmten Raumzeiten wurde erst 1992 von J. Dimock in einer sehr eleganten Art und Weise in [Dim92] veröffentlicht. J. Dimock quantisiert in dieser Arbeit auf global hyperbolischen Raumzeiten mit trivialer Topologie und kompakter Cauchyhyperfläche die Potentiale ganz im Geiste der AQFT. Darüber hinaus gibt J. Dimock auch an, wie man die Feldalgebra der Feldstärketensoren konstruiert und leitet für diese denjenigen Kommutator ab, den A. Lichnerowicz schon 1961 in [Lic61] fand. Wir denken, daß wir nicht zu weit gehen, wenn wir behaupten, daß diese Arbeit *der* Meilenstein für die Quantisierung des Maxwellfeldes war. Weitere Arbeiten zu diesem The-

ma folgten rasch, so z.B. die Arbeiten von E.P. Furlani [Fur95] und [Fur99] und von A. Corichi die Arbeit [Cor98] über die Fockraumquantisierung des Maxwellfeldes. Mit quantisierten Yang-Mills Feldern im Allgemeinen befaßte sich S. Hollands in [Hol08]. Das Thema von Zuständen des Maxwellfeldes wurde u.a. von C.J. Fewster und M.J. Pfenning in [FP03] (Quantenungleichungen und Hadamardzustände von Spin-1 Felder) und von W. Junker und F. Lledó [JL] (eichinvariante Hadamardzustände des quantisierten Potentials) in Angriff genommen. Der aktuellste Artikel über die Quantisierung des Maxwellfeldes auf gekrümmten Raumzeiten ist [Pfe09] von M.J. Pfenning. In dieser Arbeit wird J. Dimocks Methode zur Quantisierung des Potentials, welches als 1-Form aufgefaßt wird, auf beliebige p-Formen auf beliebig dimensional global hyperbolischen Raumzeiten verallgemeinert.

### Das quantisierte Maxwellfeld und Topologie

Allgemein ist zu bemerken, daß sich viele Arbeiten über das quantisierte Maxwellfeld auf die Behandlung des Vektorpotentials beziehen und nicht auf die Feldstärken selbst. Um über das Potential zu den Feldstärken zu gelangen, werden dann Einschränkungen an die Topologie der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit gemacht. Dies vermeidet die Komplikation, daß es einen Feldstärketensor geben kann, der global nicht durch ein einziges Potential darstellbar ist. Wie in dieser Arbeit ausführlich diskutiert werden wird, ist die Existenz eines solchen Feldstärketensors eine Frage der Topologie.

Die wichtige Rolle der Topologie des zugrunde liegenden Raums für den Elektromagnetismus ist schon lange bekannt, spätestens seit der sehr ausführlichen Arbeit [MW57] von C.W. Misner und J.A. Wheeler zu diesem Thema. Die Ideen dieser Arbeit wurden u.a. von R. Sorkin in [Sor77] aufgegriffen und später in [Sor79] dazu verwendet, daß quantisierte Maxwellfeld auf mehrfach zusammenhängenden Räumen zu betrachten. R. Sorkin quantisiert dabei die Feldstärken, ohne Potentiale einzuführen. Die erste Arbeit über das quantisierte Maxwellfeld auf physikalisch wichtigen gekrümmten Raumzeiten ist nach unserem Wissen aber [AS80] von A. Ashtekar. A. Ashtekar betrachtet als Raumzeit die Schwarzschild-Kruskal Raumzeit und zeigt explizit die Existenz eines Feldstärketensors, der nicht global durch ein Potential dargestellt werden kann. Mit den Methoden der AQFT wird der Feldstärketensor quantisiert und eine Fockraumdarstellung konstruiert. Die Kommutatorrelation in der Feldalgebra des Feldstärketensors gibt A. Ashtekar mit Hilfe des Lichnerowiczkommutators, siehe [Lic61], an. Die nicht triviale Topologie der Schwarzschild-Kruskal Raumzeit führt letztendlich dazu, daß eine 2-Parameter Familie von unitär inäquivalenten Darstellungen der kanonischen Kommutatorrelationen vorliegt und damit auf Superauswahlsektoren führt.

Die zwei Parameter können als elektrische und magnetische Ladung interpretiert werden. Ein Schritt in die Richtung die Quantisierung des Maxwellfeldes auf allgemeinen gekrümmten Raumzeiten zu verstehen, ist die Diplomarbeit von M. Küskü [KÖ1]. In dieser wird das Cauchyproblem des quellenfreien Maxwellfeldes auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten beliebiger Topologie behandelt.

### **Kurzfassung der vorliegenden Arbeit**

Diese Arbeit soll im Geiste der zuletzt genannten Arbeiten und der AQFT sein. Wir wollen allgemeine global hyperbolische Raumzeiten betrachten, also insbesondere auch solche mit beliebigen Topologien, und die Auswirkungen der Topologie auf das quantisierte Maxwellfeld untersuchen. Auf solchen reichen die Potentiale alleine nicht mehr aus, um die ganze Physik beschreiben zu können. Wir empfinden es daher als unabdingbar, eine Theorie zur Verfügung zu haben, die ohne Potentiale auskommt und die Feldstärken direkt quantisiert.

Im ersten Kapitel 1 stellen wir kurz die AQFT vor, in Kapitel 2 zeigen wir, wie die Maxwellgleichungen auf Lorentzmannigfaltigkeiten verallgemeinert werden können. In Kapitel 3 widmen wir uns dann dem Cauchyproblem des Maxwellfeldes auf global hyperbolischen Raumzeiten und zeigen dessen Wohlgestelltheit (Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung). Um eine Idee für den Kommutator der Feldstärkeoperatoren zu bekommen, befassen wir uns in Kapitel 4 mit der Quantisierung des elektromagnetischen Vektorpotentials. Bevor wir dann in Kapitel 6 die Feldalgebra des Feldstärketensors besprechen, führen wir in Kapitel 5 die dafür notwendigen Begriffe und Aussagen aus der Theorie der de Rham'schen Kohomologie und singulären Homologie ein. Für den Leser, der mit den verwendeten mathematischen Methoden der Lorentzgeometrie, global hyperbolischen Raumzeiten und normal hyperbolischen Differentialoperatoren auf global hyperbolischen Raumzeiten nicht vertraut ist, haben wir einen sehr ausführlichen mathematischen Anhang hinzugefügt, auf den wir im Verlauf der Arbeit auch häufig verweisen werden. Für den Leser, der sich mit den genannten Bereichen auskennt, mag dieser Anhang als Übersicht unserer verwendeten Konventionen dienen.

An Kritiken, Anmerkungen, Anregungen, übersehenen Fehlern usw. ist der Autor dieser Arbeit sehr interessiert und möchte den werten Leser darum bitten, solche an die folgende E-mail Adresse zu schicken:

sultan\_of\_swing@gmx.de

# Kapitel 1

## Algebraische Quantenfeldtheorie

In diesem Kapitel werden die Objekte und die Methoden der Algebraischen Quantenfeldtheorie vorgestellt. Wie in der Einleitung bereits angesprochen, liegt der Fokus auf den Observablen, die als Elemente einer abstrakten Algebra aufgefaßt werden, und ihren algebraischen Relationen. Lehrbücher zur AQFT sind u.a., wie bereits genannt, [Haa96] und [Wal94], deren Vorgehensweisen und Methoden wir in dieser Arbeit folgen werden.

### 1.1 Algebra in der AQFT

Wir starten mit grundlegenden Definitionen. Als Referenz verweisen wir auf [BGP07] und [BF09].

#### 1.1.1 Definition (Algebra)

*Eine  $\mathbb{K}$ -Algebra  $A$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $A$  zusammen mit einer  $\mathbb{K}$ -bilinearen Abbildung*

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto \cdot(a, b) = a \cdot b = ab. \end{aligned}$$

Durch die Bilinearität von „ $\cdot$ “ sind automatisch die Distributivgesetze der Multiplikation von Vektoren erfüllt und die Kommutativität der Multiplikation mit Körperelementen. Eine Algebra muß per Definition kein Einselement enthalten und auch Inverse bzgl. „ $\cdot$ “ müssen nicht existieren. Ist „ $\cdot$ “ assoziativ, so heißt die Algebra *assoziativ*.

### 1.1.2 Definition (Involution)

Sei  $A$  eine  $\mathbb{C}$ -Algebra. Eine Abbildung  $*$  :  $A \rightarrow A$ ,  $a \mapsto *(a) = a^*$  heißt Involution auf  $A$  genau dann, wenn  $\forall a, b \in A, \forall z \in \mathbb{C}$  gelten:

$$(INVO1) \quad (a + b)^* = a^* + b^*.$$

$$(INVO2) \quad (za)^* = \bar{z}a^*.$$

$$(INVO3) \quad (ab)^* = b^*a^*.$$

$$(INVO4) \quad (a^*)^* = a.$$

### 1.1.3 Verschiedene Algebren

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns nur mit zwei Sorten von Algebren:

- Eine  $*$ -Algebra ist eine  $\mathbb{C}$ -Algebra mit einer Involution  $*$ . Da wir nur assoziative Algebren betrachten werden, meinen wir mit einer  $*$ -Algebra immer eine assoziative  $*$ -Algebra
- Eine  $C^*$ -Algebra ist eine  $*$ -Algebra mit einer Norm  $\|\cdot\|$ , so daß die Algebra bzgl. dieser Norm vollständig ist und für alle  $a, b \in A$  gelten

$$\begin{aligned} \|ab\| &\leq \|a\|\|b\|, \\ \|aa^*\| &= \|a\|^2, \\ \|a^*\| &= \|a\|. \end{aligned}$$

### 1.1.4 Definition (Zustand)

Ein lineares Funktional  $Z : A \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ein Zustand auf einer  $*$ -Algebra  $A$  mit Eins genau dann, wenn

$$\begin{aligned} Z(1_A) &= 1 \quad (\text{Normiertheit}), \\ Z(a^*a) &\geq 0 \quad (\text{Positivität}) \end{aligned}$$

erfüllt werden.

### 1.1.5 Definition (Algebrenhomomorphismus)

Seien  $A$  und  $B$  zwei  $\mathbb{K}$ -Algebren, dann heißt eine Abbildung  $\phi : A \rightarrow B$  ein Algebrenhomomorphismus genau dann, wenn für alle  $a, b \in A$  und für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gelten:

$$(AH1) \quad \phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\phi(a) + \mu\phi(b).$$

$$(AH2) \quad \phi(a \cdot b) = \psi(a) \cdot \phi(b).$$

Ein *\*-Morphismus* ist ein Algebrenhomomorphismus  $\phi : A \longrightarrow B$  von *\*-Algebren*, der  $\phi(a^*) = \phi(a)^*$  für alle  $a \in A$  erfüllt.

### 1.1.6 Definition (Darstellung)

Eine Darstellung einer *\*-Algebra*  $A$  ist eine dichte Teilmenge  $\mathcal{D}$  eines Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  zusammen mit einem *\*-Morphismus*

$$\rho : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D}),$$

wobei  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  den Raum der linearen Operatoren  $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$  bezeichnet.

Eine wichtige Rolle in der AQFT spielt das sogenannte Weylsystem, was es ermöglicht jedem symplektischen Vektorraum (=Phasenraum der Theorie) eine  $\mathcal{C}^*$ -Algebra mit Eins eindeutig zuzuordnen. Diese  $\mathcal{C}^*$ -Algebra enthält dann die Information über die „exponentierte“ Version der Kommutatorrelationen.

### 1.1.7 Definition (Weylsystem)

Ein Weylsystem eines symplektischen Vektorraumes  $(V, s)$  besteht aus einer  $\mathcal{C}^*$ -Algebra mit Eins  $A$  und einer Abbildung  $W : V \longrightarrow A$ , sodaß für alle  $u, v \in V$  gelten:

$$(WS1) \quad W(0_V) = 1_A.$$

$$(WS2) \quad W(-u) = W(u)^*.$$

$$(WS3) \quad W(u)W(v) = \exp\left(\frac{-is(u,v)}{2}\right)W(u+v).$$

Für ein Weylsystem gilt, daß  $W(u)$  unitär für alle  $u \in V$  ist, d.h. es gilt  $W(u)W(u)^* = 1_A = W(u)^*W(u)$ . Weiter ist die Familie  $\{W(u)\}_{u \in V}$  linear unabhängig.

### 1.1.8 Definition (Weylalgebra)

Eine Weylalgebra oder CCR-Darstellung  $\mathfrak{W}$  eines symplektischen Vektorraumes  $(V, s)$ , wobei CCR abkürzend für den englischen Ausdruck „canonical commutator relation“ steht, ist ein Weylsystem, sodaß  $\mathfrak{W}$  die von den Elementen  $W(u), u \in V$ , erzeugte  $\mathcal{C}^*$ -Algebra ist.

### 1.1.9 Satz (Existenz und Eindeutigkeit)

*Zu jedem symplektischen Vektorraum  $(V, s)$  existiert eine Weylalgebra  $\mathfrak{W}$ , und diese ist eindeutig bis auf  $*$ -Isomorphismus.*

Auch wenn die symplektische Abbildung  $s$  entartet ist, gibt es eine Weylalgebra, die in einem gewissen Sinne eindeutig bis auf einen  $*$ -Isomorphismus ist. Für die Details verweisen wir auf [MSTV73] und [BHR04].

## 1.2 Der Haag-Kastler Rahmen

Das fundamentale Objekt beim algebraischen Ansatz der Quantenfeldtheorie ist das Netz der lokalen Observablen, eine Zuordnung, bei der offene, relativ kompakte und kausal abgeschlossene Teilmengen  $\mathcal{O}$  einer Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  einer  $\mathcal{C}^*$ -Algebra mit Eins oder allgemeiner einer  $*$ -Algebra mit Eins  $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$  zugeordnet werden. Für eine bessere mathematische Definiertheit wird aber meistens eine  $\mathcal{C}^*$ -Algebra gefordert. Damit so eine physikalische Theorie beschrieben wird, muß das Netz der lokalen Observablen gewisse Axiome erfüllen, wie sie für die Minkowskiraumzeit von R. Haag und D. Kastler in [HK64] aufgestellt und von J. Dimock in [Dim80] auf Lorentzmannigfaltigkeiten verallgemeinert wurden:

(AQFT1) (Netz der lokalen Observablen)

*Für jede offene, relativ kompakte und kausal abgeschlossene Teilmenge  $\mathcal{O}$  gibt es eine  $*$ -Algebra mit Eins  $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ . Die Zuordnung*

$$\mathcal{O} \longmapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O})$$

*nennt man das Netz der lokalen Observablen.*

(AQFT2) (Isotonie)

*Ist  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ , so gilt  $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ .*

(AQFT3) (Lokalität)

*Sind  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}'$  raumartig getrennt, d.h. es gibt keine kausale Kurve, die einen Punkt aus  $\mathcal{O}$  mit einem Punkt aus  $\mathcal{O}'$  verbindet, dann gilt*

$$[\mathfrak{A}(\mathcal{O}), \mathfrak{A}(\mathcal{O}')] = 0.$$

(AQFT4) (Kausalität)

*Ist  $\mathcal{O}$  kausal abhängig von  $\mathcal{O}'$ , d.h.  $\mathcal{O}$  liegt in der Cauchyentwicklung von  $\mathcal{O}'$ ,  $\mathcal{O} \subset D^M(\mathcal{O}')$ , dann gilt  $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ .*

Aus dem Netz der lokalen Observablen kann man mit Hilfe der Inklusionen

$$\iota_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}', \quad \text{für } \mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$$

eine eindeutig bestimmte  $*$ -Algebra  $\mathfrak{A}_{lok}$  konstruieren, die *Algebra der lokalen Observablen*. Ist das Netz  $\mathcal{O} \mapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O})$  ein gerichtetes System, d.h. für  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$  gibt es ein  $\tilde{\mathcal{O}}$  mit  $\mathcal{O} \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$  und  $\mathcal{O}' \subseteq \tilde{\mathcal{O}}$ , dann gilt

$$\mathfrak{A}_{lok} = \bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O}).$$

Besteht das Netz sogar aus  $C^*$ -Algebren, was häufig gefordert wird, dann besitzt  $\mathfrak{A}_{lok}$  eine eindeutige  $C^*$ -Norm und man betrachtet den Abschluß bzgl. dieser Norm

$$\mathfrak{A}_{qlok} = \overline{\mathfrak{A}_{lok}} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})}.$$

Die so erhaltene  $C^*$ -Algebra  $\mathfrak{A}_{qlok}$  nennt man die *Algebra der quasilokalen Observablen*. Bei den nun folgenden Axiomen ist bei einem Netz von  $C^*$ -Algebren  $\mathfrak{A}_{lok}$  durch  $\mathfrak{A}_{qlok}$  zu ersetzen.

(AQFT5) (Kovarianz)

*Für jeden isometrischen Diffeomorphismus  $\kappa : (M, g) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  gibt es einen  $*$ -Automorphismus  $\alpha_{\kappa} : \mathfrak{A}_{lok} \longrightarrow \mathfrak{A}_{lok}$ , der für alle  $\mathcal{O}$*

$$\alpha_{\kappa}(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(\kappa(\mathcal{O})),$$

$$\alpha_{\kappa}(1_{\mathfrak{A}(\mathcal{O})}) = 1_{\mathfrak{A}(\kappa(\mathcal{O}'))},$$

$$\alpha_{\kappa_1} \circ \alpha_{\kappa_2} = \alpha_{\kappa_1 \circ \kappa_2}$$

*erfüllt.*

(AQFT6) (Primitivität)

*Für  $\mathfrak{A}_{lok}$  gibt es eine injektive, irreduzible Darstellung.*

Die lokalen Algebren  $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$  erzeugt man durch den Feldoperator der jeweiligen Theorie, indem man diesen über geeignete Teilmengen der Mannigfaltigkeit verschmiert. Hierdurch faßt man auch explizit den Feldoperator als operatorwertige Distribution auf, wie es von der Axiomatischen Quantenfeldtheorie gefordert wird. Quantenfelder an einem Punkt sind mit Schwierigkeiten verbunden, wie sie etwa in [Haa96] oder [BLT75] beschrieben werden. Für ein Netz von  $C^*$ -Algebren verwendet man die „exponentierte“ Form der verschmierten Feldoperatoren bzw. die Weylalgebra des klassischen Phasenraumes. Dies klingt alles noch sehr abstrakt und wir werden diese Aussagen in Kapitel 4, insbesondere in den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.3, mit mehr Inhalt füllen und verständlicher machen.



### 1.2.1 GNS-Darstellung

Der algebraische Rahmen der Quantenfeldtheorie enthält und verallgemeinert die Beschreibung mit Hilberträumen und selbstadjungierten Operatoren. Grundpfeiler hierfür ist der folgende Satz:

*Sei  $Z$  ein Zustand auf einer  $*$ -Algebra mit Eins  $A$ . Dann existiert eine dichte Teilmenge  $\mathcal{D}_Z$  eines Hilbertraums  $\mathcal{H}_Z$ , ein  $*$ -Morphismus  $\rho_Z : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D})$  und ein normierter Vektor  $\Omega_Z \in \mathcal{H}_Z$  mit*

$$Z(a) = \langle \Omega_Z, \rho_Z(a)\Omega_Z \rangle_Z \quad \forall a \in A,$$

$$\mathcal{D}_Z = \left\{ \rho_Z(a)\Omega_Z \mid a \in A \right\},$$

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z$  das hermitesche Produkt auf  $\mathcal{H}_Z$  bezeichnet.  $(\mathcal{D}_Z, \rho_Z, \Omega_Z)$  heißt das GNS-Tripel und es ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Diese *GNS-Darstellung*, benannt nach Gelfand, Naimark und Segal, stellt den Zusammenhang zwischen der AQFT und dem üblichen Zugang zur Quantenfeldtheorie her, indem sie eine Formulierung in der Sprache von Hilberträumen und selbstadjungierten Operatoren liefert. Hat man einen Zustand  $Z$  auf einer  $C^*$ -Algebra  $A$ , so liefert die GNS-Darstellung eine Darstellung  $\rho_Z : A \rightarrow \mathcal{BLO}(\mathcal{H}_Z)$ , also eine Darstellung durch beschränkte lineare Operatoren.

## 1.3 Lokal kovariante Quantenfeldtheorie

Neben dem Haag-Kastler Rahmen gibt es auch eine neue und modernere Formulierung der AQFT in der Sprache der Kategorientheorie als *lokal kovariante Quantenfeldtheorie* (lcQFT). Diese Formulierung wurde von R. Brunetti, K. Fredenhagen und R. Verch in [BFV03] eingeführt und bewirkt, daß die Struktur der Theorie noch klarer hervortritt. Mit diesem neuen Ansatz erhält man den Haag-Kastler Rahmen als einen Spezialfall. Wir möchten diesen modernen Ansatz nun gerne kurz vorstellen. Eine *Kategorie* KAT besteht aus drei Dingen:

- Aus einer Klasse  $\text{Obj}(KAT)$  von Objekten  $X, Y, Z, \dots$ , welche die Objekte der Kategorie heißen.
- Aus (möglicherweise leeren) Mengen  $\text{Mor}(X, Y)$ , definiert für jedes Paar  $X, Y$  von Objekten der Kategorie. Die Elemente von  $\text{Mor}(X, Y)$  heißen die *Morphismen* in der Kategorie von  $X$  nach  $Y$ .

- Aus Abbildungen  $\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \longrightarrow \text{Mor}(X, Z)$ , definiert für jedes Tripel  $X, Y, Z$  von Objekten der Kategorie. Für  $f \in \text{Mor}(X, Y)$  und  $g \in \text{Mor}(Y, Z)$  wird das Bild von  $(f, g)$  mit  $g \circ f$  bezeichnet; es heißt die *Komposition* von  $f$  und  $g$ .

Diese Daten müssen die folgenden drei Axiome erfüllen:

(KAT1) Die Morphismenmengen sind paarweise disjunkt.

(KAT2) Für  $f \in \text{Mor}(W, X)$ ,  $g \in \text{Mor}(X, Y)$  und  $h \in \text{Mor}(Y, Z)$  gilt

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) \quad (\text{Assoziativität}).$$

(KAT3) Zu jedem Objekt  $X$  gibt es ein Element  $id_X \in \text{Mor}(X, X)$  mit

$$f \circ id_X = f \quad \forall f \in \text{Mor}(X, Y),$$

(Identität)

$$id_X \circ g = g \quad \forall g \in \text{Mor}(Y, X).$$

Sind  $\text{KAT}_1$  und  $\text{KAT}_2$  zwei Kategorien, dann ist ein *kovarianter Funktor* eine Abbildung

$$F : \text{KAT}_1 \longrightarrow \text{KAT}_2,$$

die jedem Objekt  $X \in \text{Obj}(\text{KAT}_1)$  ein Objekt  $F(X) \in \text{Obj}(\text{KAT}_2)$  zuordnet und jedem Morphismus  $f \in \text{Mor}_1(X, Y)$  einen Morphismus  $F(f) \in \text{Mor}_2(T(X), T(Y))$ , sodaß

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

für alle Objekte  $X \in \text{Obj}(\text{KAT}_1)$  gilt und

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

für alle Morphismen  $f$  und  $g$  in  $\text{KAT}_1$ , für die  $g \circ f$  definiert ist. Die Kategorien, die wir in dieser Arbeit im Rahmen der AQFT betrachten, sind die folgenden drei Kategorien:

- **Die Kategorie  $\mathfrak{Man}$**

Die Objekte dieser Kategorie sind die orientierten, 4-dimensionalen, global hyperbolischen Raumzeiten  $(M, g)$ . Gegeben  $(M_1, g_1), (M_2, g_2) \in \text{Obj}(\mathfrak{Man})$ , so sind die Morphismen aus  $\text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M_1, g_1), (M_2, g_2))$  die isometrischen Einbettungen  $\psi : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ , welche die

Orientierung und die Zeitorientierung der Raumzeit erhalten und für jede kausale Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M_2$  mit  $c(a), c(b) \in \psi(M_1)$  auch schon  $c(t) \in \psi(M_1)$  für alle  $t \in (a, b)$  erfüllen. Solch ein  $\psi$  nennt man *hyperbolische Einbettung*. Die Komposition der Morphismen ist die Komposition von Abbildungen und daher assoziativ. Die Identität in  $\text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M_g), (M, g))$  ist die Abbildung  $id_M : x \mapsto x, x \in M$ .

- **Die Kategorie  $C^*$ - $\mathfrak{Alg}$**

Dies ist die Kategorie, deren Objekte die  $C^*$ -Algebren mit Eins sind. Die Morphismen werden durch die 1-erhaltenden  $*$ -Monomorphismen gegeben, die Komposition der Morphismen ist wieder die Komposition von Abbildungen und daher assoziativ. Die Identität in  $\text{Mor}_{C^*\text{-}\mathfrak{Alg}}(A, A)$  ist für jedes Objekt  $A \in \text{Obj}(C^*\text{-}\mathfrak{Alg})$  gegeben durch die Identitätsabbildung  $id_A : a \mapsto a, a \in A$ .

- **Die Kategorie  $*$ - $\mathfrak{Alg}$**

Dies ist die Kategorie, deren Objekte die  $*$ -Algebren mit Eins sind. Die Morphismen, deren Komposition und die Identität sind wie bei  $C^*$ - $\mathfrak{Alg}$  gegeben.

Wir sind nun in der Lage anzugeben, was eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie ist (anstelle  $C^*$ - $\mathfrak{Alg}$  kann auch die Kategorie  $*$ - $\mathfrak{Alg}$  stehen):

- *Eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie ist ein kovarianter Funktor zwischen den zwei Kategorien  $\mathfrak{Man}$  und  $C^*$ - $\mathfrak{Alg}$ , geschrieben in Diagrammform:*

$$\begin{array}{ccc}
 (M, g) & \xrightarrow{\psi} & (M', g') \\
 \downarrow F & & \downarrow F \\
 F(M, g) & \xrightarrow{F(\psi)} & F(M', g')
 \end{array}$$

*zusammen mit den Kovarianzeigenschaften*

$$\begin{aligned}
 F(\psi \circ \psi') &= F(\psi) \circ F(\psi'), \\
 F(id_{(M, g)}) &= id_{F(M, g)}
 \end{aligned}$$

*für alle Morphismen  $\psi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M_1, g_1), (M_2, g_2))$ , alle Morphismen  $\psi' \in \text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M_2, g_2), (M_3, g_3))$  und alle Objekte  $(M, g) \in \text{Obj}(\mathfrak{Man})$ .*

- Eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie, beschrieben durch einen kovarianten Funktor  $F$ , heißt *kausal*, wenn Folgendes gilt:  
Wann immer zwei Morphismen  $\psi_i \in \text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M_i, g_i), (M, g))$ ,  $i = 1, 2$ , erfüllen, daß  $\psi_1(M_1)$  und  $\psi_2(M_2)$  kausal getrennt in  $(M, g)$  liegen, d.h. es gibt keine kausale Kurve von  $\psi_1(M_1)$  nach  $\psi_2(M_2)$ , hat man

$$\left[ F_{\psi_1}(F(M_1, g_1)), F_{\psi_2}(F(M_2, g_2)) \right] = 0.$$

- Eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie, die durch einen kovarianten Funktor  $F$  gegeben wird, gehorcht dem Zeitschichtaxiom genau dann, wenn

$$F_\psi(F(M, g)) = F(M', g')$$

für alle  $\psi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M, g), (M', g'))$  mit  $\psi(M)$  enthält eine Cauchyhyperfläche von  $(M', g')$  gilt.

### 1.3.1 Das Zeitschichtaxiom

Die Frage nach der Vorhersagbarkeit ist eine der wichtigsten Aspekte einer physikalischen Theorie. Kennt man die Konfigurationen eines physikalischen Systems in der Gegenwart zu einem gewissen Zeitpunkt  $t_0$ , so ist das Ziel einer physikalischen Theorie, Aussagen über die Zukunft bei  $t > t_0$  zu machen. Es wird also in einer physikalischen Theorie die Kenntnis der Zeitentwicklung des Systems angestrebt.

Die zeitliche Entwicklung eines physikalischen Systems wird durch die Bewegungsgleichungen, in der Feldtheorie heißen sie Feldgleichungen, gegeben, und die Frage nach der Zeitentwicklung des Systems ist gleichbedeutend mit der Wohlgestellttheit des Anfangswertproblems. Ein wohlgestelltes Anfangswertproblem bedeutet, daß die Bewegungsgleichungen eindeutig bei der Kenntnis von Anfangswerten (=Konfiguration des Systems zu einem Zeitpunkt  $t_0$ ) gelöst werden können. Mit Hilfe dieser eindeutigen Lösung ist das System zu jedem anderen Zeitpunkt  $t$  eindeutig vorhersagbar.

In der Quantenfeldtheorie treten aber Komplikationen mathematischer Natur auf, was hauptsächlich daran liegt, daß Quantenfelder operatorwertige Distributionen sind und Singularitäten aufweisen können. Dadurch sind einige Objekte aus der klassischen Feldtheorie in der Quantenfeldtheorie nicht mehr bedenkenlos wohldefiniert, und es bedarf ausgefeilterer mathematischer Methoden. Aber selbst dann ist die Frage der Wohlgestellttheit des Anfangswertproblems und damit die Kenntnis der Zeitentwicklung nur in Spezialfällen gelöst worden.

In der algebraischen Quantenfeldtheorie tritt nun das Zeitschichtaxiom an die Stelle der Forderung nach der Wohlgestelltheit des Anfangswertproblems. Es besagt kurz zusammengefaßt, daß die Observablenalgebra der gesamten Raumzeit  $M$  bekannt ist, sobald man die Observablenalgebra einer beliebigen Umgebung  $O(\Sigma)$  einer Cauchyhyperfläche  $\Sigma$  kennt,

$$\mathfrak{A}(O(\Sigma)) = \mathfrak{A}(M), \quad \Sigma \subset O(\Sigma) \Subset M.$$

Das Zeitschichtaxiom wurde bereits von R. Haag und B. Schroer in [HS62] als Postulat der Quantenfeldtheorie aufgestellt und besagt dort, daß man eindeutig den Zustand eines Systems durch Beobachtungen in einem beliebig kleinen Zeitintervall bestimmen kann.

Wie die moderne Formulierung von [BFV03] und [BF06] der algebraischen Quantenfeldtheorie mit Begriffen der Kategorientheorie als lokal kovariante Quantenfeldtheorie gezeigt hat, spielt das Zeitschichtaxiom bei einem in [BF06] neu entwickelten Ansatz zur Quantengravitation eine zentrale Rolle. Die Erfüllung des Zeitschichtaxioms ist für die Beschreibung der dynamischen Reaktion eines Quantenfeldes auf die lokale Änderung der Hintergrundmetrik wichtig. Ist das Zeitschichtaxiom erfüllt, so kann man eine sogenannte relative Cauchyevolution definieren, deren Funktionalableitung in Bezug auf die Metrik der Raumzeit die Bedeutung eines Energie-Impuls Tensors hat. Das bedeutet auch insbesondere, daß man einen Energie-Impuls Tensor ohne einen Lagrangschen Formalismus erhalten kann.

Das Zeitschichtaxiom ist also durchaus von allgemeinem Interesse in der Physik. Arbeiten, die das Zeitschichtaxiom für perturbative Quantenfeldtheorien auf global hyperbolischen Raumzeiten behandeln und dessen Gültigkeit für das skalare Feld in formal renormierten Störungstheorien zeigen, sind [Chi08] und [CF08]. Wir werden auf das Zeitschichtaxiom für das quantisierte Maxwellfeld im Abschnitt 6.3 eingehen.

# Kapitel 2

## Die Maxwellgleichungen und ihre Formulierungen

In diesem Kapitel diskutieren wir die Maxwellgleichungen in ihren verschiedenen Darstellungen, um sie dann in Abschnitt 2.7 auf gekrümmte Raumzeiten zu verallgemeinern. Bei der Formulierung der Maxwellgleichungen in integraler Form bis zu ihrer differentialgeometrischen Formulierung auf dem 4-dimensionalen Minkowskiraum folgen wir der Darstellung in [RF93].

### 2.1 Integrale Form

Die Maxwellgleichungen im Vakuum gehen in ihrer ursprünglichsten Gestalt zurück auf phänomenologische Gesetze, die Aussagen über die Erzeugung und die Ausbreitung der elektromagnetischen Felder machen, wohingegen das Lorentzkraftgesetz für eine Punktladung mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$

$$\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) = q\vec{E}(t, \vec{x}) + k_2 q \frac{v}{c} \vec{B}(t, \vec{x}) \quad (2.1.1)$$

oder allgemeiner das Gesetz für die Lorentzkraftdichte

$$\vec{f}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x})\vec{E}(t, \vec{x}) + k_2 \vec{j}(t, \vec{x}) \times \vec{B}(t, \vec{x}) \quad (2.1.2)$$

die Wirkung von elektrischen und magnetischen Feldern auf Ladungen und (Ladungs-)Ströme bestimmt.  $k_2$  ist hierbei eine Konstante, die erst durch die Festlegung eines Maßeinheitensystems für Ladung, elektrische und magnetische Feldstärke bestimmt wird. Die Maxwellgleichungen lauten im Einzelnen:

(i) **Gaußsches Gesetz:**

*Der Fluß des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche ist*

proportional zu der von dieser Fläche eingeschlossenen Gesamtladung, bzw. Ladungen sind die Quellen und Senken des elektrischen Feldes. Mathematisch präzisiert

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{N} df = k_1 Q_{ges.},$$

wobei  $k_1$  eine noch festzulegende Konstante ist und  $\vec{N}$  das eindeutig bestimmte, senkrecht auf  $\partial V$  stehende, nach außen weisende, normierte Vektorfeld.

(ii) **Abwesenheit magnetischer Ladungen:**

Der Fluß des magnetischen Feldes durch eine geschlossene Fläche verschwindet. Das magnetische Feld hat keine Quellen und Senken, es gibt keine magnetische Ladungen und die magnetischen Feldlinien sind stets geschlossen. In Formeln

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot \vec{N} df = 0,$$

wobei  $\vec{N}$  wieder das eindeutig bestimmte, senkrecht auf  $\partial V$  stehende, nach außen weisende, normierte Vektorfeld ist.

(iii) **Faradaysches Induktionsgesetz:**

Ein sich zeitlich ändernder, magnetischer Fluß erzeugt am Rande der von ihm durchsetzten Fläche ein elektrisches Wirbelfeld

$$\int_{\partial F} \vec{E} \cdot \vec{T} dl = -k_2 \frac{d}{dt} \int_F \vec{B} \cdot \vec{N} df,$$

wobei  $k_2$  die bereits erwähnte Konstante ist,  $\vec{N}$  das normierte, senkrecht auf  $F$  stehende Vektorfeld, welches die Orientierung von  $F$  festlegt und  $\vec{T}$  das eindeutig bestimmte, positiv orientierte, tangential an  $\partial F$  liegende, normierte Vektorfeld.

(iv) **Ampèresches Gesetz:**

Ein Strom oder ein sich zeitlich ändernder elektrischer Fluß erzeugt am Rande der von ihm durchsetzten Fläche ein magnetisches Wirbelfeld

$$\int_{\partial F} \vec{B} \cdot \vec{T} dl = k_3 \left( \int_F \vec{j} \cdot \vec{N} df + k_4 \frac{d}{dt} \int_F \vec{E} \cdot \vec{N} df \right),$$

wobei  $k_3$  und  $k_4$  noch festzulegende Konstanten sind,  $\vec{N}$  das senkrecht auf  $F$  stehende, normierte Vektorfeld, welches die Orientierung von  $F$  festlegt, sowie  $\vec{T}$  das eindeutig bestimmte, positiv orientierte, tangential an  $\partial F$  liegende, normierte Vektorfeld.

Die Wahl der Konstanten bestimmt die Maßeinheiten der Felder. Von einem relativistischen Standpunkt aus ist es sinnvoll die Einheiten so zu wählen, daß die elektrische und die magnetische Feldstärke dieselben Maßeinheiten haben. Für die weitere Betrachtung sind die Konstanten daher wie folgt festgelegt:

$$k_1 = 4\pi, \quad k_2 = \frac{1}{c}, \quad k_3 = \frac{4\pi}{c} \quad \text{und} \quad k_4 = \frac{1}{4\pi},$$

womit also das Gaußsche Maßsystem gewählt wurde. Damit ist aber die Theorie des Elektromagnetismus noch nicht vollständig beschrieben. Es fehlt noch die Bilanzgleichung der elektrischen Ladung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \dot{\rho} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.1.3)$$

## 2.2 Differentielle Form

Mit dem Satz von Stokes und dem Satz von Gauß erhält man aus der integralen Form der Maxwellgleichungen 2.1(i-iv) die differentielle Form

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho.$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

$$(iii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} = 0.$$

$$(iv) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

## 2.3 Differentialgeometrische Formulierung

Die Verwendung der Sätze von Stokes und Gauß sowie die in der integralen und differentiellen Form der Maxwellgleichungen verwendeten mathematische Objekte legen es nahe, die differentiellen Maxwellgleichungen in die Sprache der Differentialgeometrie zu übersetzen. Dies liefert eine koordinatenfreie Darstellung der Maxwellgleichungen und ermöglicht letztendlich eine Formulierung auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten.



Die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit ist im vorliegenden Fall sogar eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, bekanntlich der 3-dimensionale euklidische Raum  $(M, g) = (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eukl.}}) := (\mathbb{R}^3, \delta_{ij} d(id)^i \otimes d(id)^j)$  mit globaler Karte  $(\mathbb{R}^3, id = id_{\mathbb{R}^3})$ . Hierbei bedeuten die Differentiale und die partiellen Ableitungen nichts anderes als eine Umschreibung der aus der Analysis des  $\mathbb{R}^3$  bekannten Differentiale und Ableitungen

$$\begin{aligned} d(id)^i &= dx^i, \\ \partial_1^{id} &= \partial_1 = \partial_{x^1} = \frac{\partial}{\partial x^1} = \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \\ \partial_2^{id} &= \partial_2 = \partial_{x^3} = \frac{\partial}{\partial x^2} = \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \\ \partial_3^{id} &= \partial_3 = \partial_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x^3} = \partial_z = \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Diese Umformulierung ist rein zweckmäßig und dient der differentialgeometrischen Verallgemeinerung auf semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Das Lorentzkraftgesetz (2.1.1) bzw. das Gesetz der Lorentzkraftdichte (2.1.2) soll invariant unter Paritätstransformation und Zeitumkehr sein und daher transformieren sich das elektrische und das magnetische Feld gemäß

$$\begin{aligned} P : \begin{cases} \vec{E}(t, \vec{x}) \mapsto -\vec{E}(t, -\vec{x}) \\ \vec{B}(t, \vec{x}) \mapsto +\vec{B}(t, -\vec{x}) \end{cases} & \quad (\text{Parität}), \\ T : \begin{cases} \vec{E}(t, \vec{x}) \mapsto +\vec{E}(-t, \vec{x}) \\ \vec{B}(t, \vec{x}) \mapsto -\vec{B}(-t, \vec{x}) \end{cases} & \quad (\text{Zeitumkehr}). \end{aligned}$$

Aus diesem Grund entspricht nach [RF93] dem elektrischen Feld eine 1-Form und dem magnetischen Feld eine 2-Form auf dem 3-dimensionalen euklidischen Raum  $(\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eukl.}})$ :

$$\begin{aligned} E &= E_i dx^i \in \Omega_1 \mathbb{E}^3, \quad E_i := \delta_{ij} E^j, \\ B &= \frac{1}{2} \epsilon_{klm} B^k dx^l \wedge dx^m \in \Omega_2 \mathbb{E}^3. \end{aligned}$$

Eine Definition von Differentialformen findet sich in Abschnitt A.5. Der Ladungsdichte und der Stromladungsdichte entsprechen die folgenden Formen:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega_3 \mathbb{E}^3, \\ \tilde{j} &= \frac{1}{2} \epsilon_{klm} j^k dx^l \wedge dx^m \in \Omega_2 \mathbb{E}^3. \end{aligned}$$

Die Komponentenfunktionen  $E_i, B^k, \rho$  und  $j^k$  hängen nicht nur glatt vom Raum, sondern auch glatt von der Zeit ab.

Mit Hilfe der äußeren Ableitung  $d$ , siehe Abschnitt A.5.6, und des Hodge-\*-Operators, siehe Abschnitt B.6, lassen sich die Maxwellgleichungen auf  $(\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eukl.}})$  nun koordinatenunabhängig formulieren:

(i)

$$d * E = 4\pi \tilde{\rho}.$$

(ii)

$$dB = 0.$$

(iii)

$$dE + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

(iv)

$$d * B - \frac{1}{c} \frac{\partial * E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \tilde{j}.$$

Aufgrund der Bijektivität des Hodge-\*-Operators lassen sich (i) und (iv) mit der 0-Form  $\rho \in \Omega_0 \mathbb{E}^3$  und der 1-Form  $\mathbf{j} = \delta_{kl} j^k dx^l \in \Omega_1 \mathbb{E}^3$  umschreiben zu

(i')

$$*^{-1} d * E = 4\pi \rho.$$

(iv')

$$*^{-1} d * B - \frac{1}{c} *^{-1} \frac{\partial * E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Da die Kombination  $*^{-1} d *$  häufig auftritt, faßt man sie zu einem Operator, der Koableitung  $\delta$ , zusammen. Diese wirkt durch  $\delta := (-1)^p *^{-1} d *$  auf p-Formen (für die Eigenschaften von  $\delta$  siehe B.7). Wie man durch Nachrechnen in Koordinaten überprüfen kann, sind die Formulierungen (i) und (iv) äquivalent zu (i') und (iv'). Weiter ist es bemerkenswert, daß der Hodge-\*-Operator nur bei den inhomogenen Maxwellgleichungen (i) und (iv) auftritt, sich die homogenen Maxwellgleichungen (ii) und (iii) hingegen ohne jeden Bezug auf die Metrik und Orientierung der Mannigfaltigkeit schreiben lassen. Mit dem Davorschalten von  $*^{-1}$  werden auch die Maxwellgleichungen (i) und (iv) von der Orientierung der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit unabhängig, wie man in Koordinaten nachrechnen kann. (i') und (iv') sind daher genauso wie (ii) und (iii) auch auf nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten gültig.

### 2.3.1 Potentiale

Das Lösen der Maxwellgleichungen wird durch die Einführung von Potentialen entscheidend vereinfacht. Ein Vektorpotential ist eine 1-Form  $A \in \Omega_1 \mathbb{E}^3$  mit  $dA = B$ . In „lokalen“ Koordinaten, als Karte ist  $(\mathbb{R}^3, id)$  gewählt, läßt sich dies wiederum schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon_{klm} B^k &= \frac{\partial A_m}{\partial x^l} \implies \epsilon_{klm} B^k = \frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m} \\ \implies B^3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}, \quad B^1 = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}, \quad B^2 = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \\ \implies \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A^1 = \delta^{1i} A_i = A_1 \\ A^2 = \delta^{2i} A_i = A_2 \\ A^3 = \delta^{3i} A_i = A_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zusätzlich erhält man damit aus 2.3(iii)

$$d\left(E + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0,$$

weswegen man das skalare Potential  $\Phi \in \Omega_0 \mathbb{E}^3$  einführt, welches

$$d\Phi = E + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

erfüllt. In der Karte  $(\mathbb{R}^3, id)$  ergibt sich somit

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Aus physikalischer Konvention wird jedoch  $-\Phi$  statt  $\Phi$  benutzt, so daß sich endgültig

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ergibt. Eingesetzt in die inhomogenen Maxwellgleichungen in differentieller Form (2.2)(i+iv) erhält man damit

$$\begin{aligned} \Delta \Phi + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= -4\pi \rho, \\ \Delta \vec{A} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Diese Gleichungen sind die inhomogenen Maxwellgleichungen (2.2)(i+iv), ausgedrückt durch die Potentiale. Drückt man die homogenen Maxwellgleichungen (2.2)(ii+iii) durch die Potentiale aus, so sind diese automatisch erfüllt.

Bis jetzt wurde aber noch nichts über die Existenz des Vektorpotentials und des skalaren Potentials gesagt. Ob es zu jedem magnetischen Feld  $B$  immer ein Vektorpotential  $A$  mit  $dA = B$  gibt und immer ein skalares Potential  $\Phi$  existiert, welches  $d\Phi = E + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$  erfüllt, soll in dieser Arbeit noch ausführlich geklärt werden. Es wird sich dabei herausstellen, daß die Sprache der Differentialformen hervorragend dazu geeignet ist, diese Fragen auf beliebigen glatten Mannigfaltigkeiten zu klären, was nochmals die Nützlichkeit der differentialgeometrischen Formulierung der Maxwellgleichungen unterstreicht. An dieser Stelle sei gesagt, daß in dem hier vorliegenden Fall des euklidischen Raumes  $\mathbb{E}^3$  die Existenz des Vektorpotentials und des skalaren Potentials gesichert ist. Aus 2.3(ii) ergibt sich sofort mit Hilfe des Poincarélemmas 5.1.6, daß  $B$  exakt ist, d.h.  $B = dA$  bzw.  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  für eine 1-Form  $A \in \Omega_1 \mathbb{E}^3$ . Genauso erhält man mit dem Poincarélemma 5.1.6 die Existenz eines skalaren Potentials  $\Phi \in \Omega_0 \mathbb{E}^3$ .

### 2.3.2 Eichtransformationen

Die zuvor eingeführten Potentiale sind aber keinesfalls eindeutig durch  $E$  und  $B$  bestimmt. Es führen alle Vektor- und skalare Potentiale zu denselben Feldstärken, welche durch die Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \vec{A} &\longmapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi(t, \vec{x}), \\ \Phi &\longmapsto \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi(t, \vec{x})}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

auseinander hervorgehen, wobei  $\chi$  eine sonst beliebige Funktion von  $t$  und  $\vec{x}$  sein darf. Diese vorliegende Situation nennt man Eichfreiheit, da man den Potentialen zusätzliche Bedingungen aufzwingen kann, ohne die resultierende Physik zu ändern; man spricht dann von der Wahl einer Eichung. Die Eichtransformationen, die mit einer gewählten Eichbedingung verträglich sind, heißen residuale Eichtransformationen. Wichtig ist die Coulombeichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0,$$

mit residualen Eichtransformationen (2.3.2) und der Nebenbedingung

$$\Delta \chi = 0.$$

Eine weitere sehr wichtige Eichung ist die Lorenzeichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \tag{2.3.3}$$

mit residualen Eichtransformationen (2.3.2) und der Nebenbedingung

$$\square\chi := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta\chi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial (x^i)^2} = 0.$$

Aus den inhomogenen Maxwellgleichungen (2.3.1) erhält man in Lorenzei-  
 chung die inhomogenen Wellengleichungen der Potentiale

$$\square\Phi = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \square\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (2.3.4)$$

### 2.3.3 Maxwellfeld aus den Potentialen

Man kann jetzt die ganze Situation umdrehen, indem man die Differential-  
 gleichungen 2.Ordnung (2.3.1) für  $\Phi$  und  $\vec{A}$  löst, womit man die inhomogenen  
 Maxwellgleichungen ausgedrückt durch die Potentiale gelöst hat. Ferner ist  
 noch die Eichfreiheit zu beachten, welche den Lösungsvorgang erheblich ver-  
 einfachen kann. Man kann so anstatt (2.3.1) zu lösen, in Lorenzei-  
 chung und (2.3.4) lösen. Mit den Feldstärken definiert durch

$$\begin{aligned} \vec{B} &:= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{E} &:= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

erhält man somit eine Lösung der Maxwellgleichungen (2.2)(i-iv).

### 2.3.4 Elektrische und magnetische Ladung

Sei  $E \in \Omega_1\mathbb{E}^3$  ein elektrisches und  $B \in \Omega_2\mathbb{E}^3$  ein magnetisches Feld, sodaß die  
 Maxwellgleichungen 2.3(i-iv) erfüllt werden. Die mit dem elektrischen Feld  $E$   
 assoziierte Ladung in einem Volumen  $V \subset \mathbb{E}^3$  ist gegeben durch das Integral

$$Q_{\text{elektr.}} = \int_V * \rho \stackrel{2.3(i')}{=} \frac{1}{4\pi} \int_V d * E \stackrel{\text{Stokes}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \iota_{\partial V}^{pb} * E,$$

wobei  $\iota_{\partial V}^{pb}$  das Zurückholen nach  $\partial V$  mittels  $\iota$  bezeichne, siehe auch Definition  
 A.5.5. Analog ist die magnetische Ladung in einem Volumen  $V \subset \mathbb{E}^3$ , die mit  
 $B$  assoziiert wird

$$Q_{\text{magn.}} = 0 \stackrel{2.3(ii)}{=} \int_V dB \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial V} \iota_{\partial V}^{pb} B.$$

Mit ein wenig Bereitschaft zur Verallgemeinerung kann man  $\partial V$  als einen  
 2-Zykel  $z \in Z_2^\infty(\mathbb{E}^3; \mathbb{R})$  auffassen, siehe Definition 5.2.4 und Abschnitt 5.3.

$\partial V$  ist nämlich eine randlose, geschlossene Fläche in  $\mathbb{E}^3$ , d.h. es gilt  $\partial\partial V = 0$ . Allgemeiner definiert man nun für jeden glatten 2-Zykel  $z$  in  $\mathbb{E}^3$  die mit  $E$  assoziierte elektrische und die mit  $B$  assoziierte magnetische Ladung von  $z$  durch die Integrale

$$\begin{aligned} Q_{\text{elektr.}}(z) &:= \frac{1}{4\pi} \int_z *E, \\ Q_{\text{magn.}}(z) &:= \frac{1}{4\pi} \int_z B. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Kann das magnetische Feld  $B$  aus einem Vektorpotential  $A$  durch  $dA = B$  abgeleitet werden, dann ist das zweite Integral immer Null, weil

$$Q_{\text{magn.}}(z) = \frac{1}{4\pi} \int_z B = \frac{1}{4\pi} \int_z dA = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial z} A = 0 \quad \forall z \in Z_2^\infty(\mathbb{E}^3; \mathbb{R})$$

oder mit anderen Worten: *Die Existenz eines Vektorpotentials impliziert, daß es keine magnetische Ladung gibt!* Siehe auch [MW57] zu diesem Thema.

## 2.4 Kovariante Formulierung

Da die Lichtgeschwindigkeit für jeden Beobachter gleich ist, was den Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie darstellt, kann man vermuten, daß die Maxwellgleichungen, die ja Licht als elektromagnetische Welle beschreiben, kovariant unter Lorentztransformationen, d.h. forminvariant sind. Der bisherigen Formulierung sieht man diese Forminvarianz aber noch nicht an. Dazu werden nun die Größen der klassischen Elektrodynamik zu dem 4er-Vektor und dem 2er-Tensor

$$\begin{aligned} j^\mu &= (c\rho, \vec{j}) = (c\rho, j^1, j^2, j^3) \quad (\text{4er-Stromdichte}), \\ F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Feldstärketensor}) \end{aligned}$$

zusammengefaßt. Die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit, auf der sich jetzt alles abspielt, ist der Minkowskiraum  $(M, g) = (\mathcal{M}, \eta) := (\mathbb{R}^4, \eta)$ . Die 0-te Komponente  $x^0$  eines Punktes  $x \in \mathcal{M}$  hat die physikalische Interpretation eines Zeitpunktes, die anderen drei Komponenten  $x^i, i = 1, 2, 3$ , geben die Ortskoordinaten wieder. Die Maxwellgleichungen lauten dann

(i)

$$0 = \partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} \quad (\text{homogene Maxwellgleichung}).$$

(ii)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (\text{inhomogene Maxwellgleichung}).$$

Diese Formulierung der Maxwellgleichungen ist äquivalent zur Formulierung (2.2)(i-iv). Die 4er-Stromerhaltung, also die kovariante Formulierung von (2.1.3), läßt sich schreiben als

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.4.1)$$

Bei den Größen mit griechischen Indizes, die von 0 bis 3 laufen, macht es einen expliziten Unterschied, ob die Indizes oben oder unten stehen. Die Indizes werden mittels der Minkowskimetrik  $\eta$  herauf- oder heruntergeschoben, da es sich bei den angegebenen Größen um die Komponenten von Vektoren und Tensoren handelt. Zum Beispiel gelten

$$j_\mu = (c\rho, -\vec{j}) = (c\rho, -j^1, -j^2, -j^3) \quad (\text{4er-Stromdichte}),$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Feldstärketensor}),$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu \quad (\text{inhomogene Maxwellgleichung}).$$

### 2.4.1 Kovariante Formulierung der Potentiale

Im 4er-Potential werden das skalare Potential  $\Phi$  und das Vektorpotential  $\vec{A}$  zu einem Lorentzvektor zusammengefaßt

$$A^\mu := (c\Phi, \vec{A}) \quad \text{bzw.} \quad A_\mu = (c\Phi, -\vec{A}),$$

Die Definitionen (2.3.5) der Feldstärken durch die Potentiale schreiben sich in kovarianter Form als

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.4.2)$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen (2.3.1) nehmen die Gestalt

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu A_\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (2.4.3)$$

an, und die Lorenzgleichung (2.3.3) lautet in kovarianter Form

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.4.4)$$

In Lorenzgleichung lautet (2.4.3) daher

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (2.4.5)$$

was die kovariante Form von (2.3.4) ist.

## 2.5 Differentialgeometrische, kovariante Form

Wie zuvor erwähnt wurde, sind die Maxwellgleichungen 2.4 (i+ii) in kovarianter Form Gleichungen für Komponentenfunktionen von Vektoren und Tensoren. In der Sprache der Differentialgeometrie lauten sie

$$(i) \quad dF = 0 \quad (\text{homogene Maxwellgleichung}).$$

$$(ii) \quad -\delta F = - *^{-1} d * F = \frac{4\pi}{c} j \quad (\text{inhomogene Maxwellgleichung}).$$

Hierbei sind  $F$  und  $j$  gegeben durch

$$\begin{aligned} j &= j_\mu dx^\mu \in \Omega_1 \mathcal{M}, \\ F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \in \Omega_2 \mathcal{M}, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

mit der Identität als gewählte Karte. Die 4er-Stromerhaltung (2.4.1) lautet koordinatenunabhängig

$$-\delta j = 0. \quad (2.5.2)$$

### 2.5.1 Potentiale differentialgeometrisch und kovariant

Möchte man noch die Potentiale einbeziehen, so hat man weiter

$$A = A_\mu dx^\mu \in \Omega_1 \mathcal{M},$$

(2.4.2) wird zu

$$F = dA \quad (2.5.3)$$

und die inhomogene Maxwellgleichung (2.4.3) des 4er-Potentials lautet koordinatenunabhängig

$$-\delta dA = \frac{4\pi}{c} j \quad (2.5.4)$$

Für die Lorenzeichung (2.4.4) ergibt sich

$$-\delta A = 0 \quad (2.5.5)$$

und daher in Lorenzeichung für (2.5.4)

$$\square A = \frac{4\pi}{c} j. \quad (2.5.6)$$

Die Eichfreiheit der Potentiale beruht in dieser Formulierung darauf, daß man zu einem Potential  $A$  mit  $F = dA$  eine 1-Form  $\Lambda$  mit  $d\Lambda = 0$  hinzuaddieren kann, ohne  $F$  zu ändern, denn  $F = d(A + \Lambda) = dA + d\Lambda = dA$ .



## 2.5.2 Elektrisches und magnetisches Feld

Die 1-Form  $E_{t_0} = E_i(t_0, \cdot) dx^i \in \Omega_1 \mathbb{E}^3$ ,  $E_i(t_0, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{E}^3, \mathbb{R})$  und die 2-Form  $B_{t_0} = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} B^k(t_0, \cdot) dx^l \wedge dx^m \in \Omega_2 \mathbb{E}^3$ ,  $B^k(t_0, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{E}^3, \mathbb{R})$  zu einem gewissen Zeitpunkt  $t_0$  kann man mit Hilfe des dualen Feldstärketensor  $*F$ ,

$$(*F)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ -B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ -B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ -B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix},$$

und der Einbettung  $\iota_{t_0} = \iota_0 : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathcal{M}$ ,  $(x, y, z) \longmapsto (t_0, x, y, z)$  aus dem Feldstärketensor  $F \in \Omega_2 \mathcal{M}$  extrahieren. Es gelten dafür die Gleichungen

$$E_{t_0} = - * \iota_0^{pb} * F \quad (2.5.7)$$

und

$$B_{t_0} = -\iota_0^{pb} F, \quad (2.5.8)$$

wie man durch die Rechnungen

$$\begin{aligned} - * \iota_0^{pb} * F &\stackrel{C.4.4}{=} \iota_0^{pb} \text{ein}_{\mathbf{n}} F = \iota_0^{pb} (F_{0\nu} dx^\nu) = F_{0\nu}(t_0, \cdot) d(x^\nu \circ \iota_0) \\ &= F_{0n}(t_0, \cdot) dx^n = E_n(t_0, \cdot) dx^n = E(t_0, \cdot) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\iota_0^{pb} F &= -\iota_0^{pb} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \circ \iota_0) d(x^\mu \circ \iota_0) \wedge d(x^\nu \circ \iota_0) \\ &= -\frac{1}{2} F_{ij}(t_0, \cdot) dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^k(t_0, \cdot) dx^i \wedge dx^j \\ &= +\frac{1}{2} B_{ij}(t_0, \cdot) dx^i \wedge dx^j = B_{t_0} \end{aligned}$$

einsehen kann. Es wurden hierfür  $x^0 \circ \iota_0 = \text{konst.} = t_0 \implies d(x^0 \circ \iota_0) = 0$ ,  $x^i \circ \iota_0 = x^i \implies d(x^i \circ \iota_0) = dx^i$ , die Definition des Feldstärketensors und  $\mathbf{n} = (1, 0, 0, 0)^T$  verwendet.

An dieser Stelle sei der Leser darauf hingewiesen, daß in (2.5.7) nicht beide Male derselbe Hodge-\*-Operator gemeint ist, sondern einmal derjenige auf dem Minkowskiraum (vor dem Zurückholen) und einmal derjenige auf der Hyperfläche  $\{t_0\} \times \mathbb{R}^3$  mit der induzierten Metrik (nach dem Zurückholen).

### 2.5.3 Ladungsdichte und 3er-Stromdichte

Wie zuvor bei den Feldern kann man aus der 4er-Stromdichte  $j \in \Omega_1 \mathcal{M}$ , unter Zuhilfenahme der Einbettung  $\iota_{t_0} = \iota_0 : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $(x, y, z) \mapsto (t_0, x, y, z)$ , die Ladungsdichte  $\rho(t_0, \cdot) \in \Omega_0 \mathbb{E}^3$  und die 3er-Stromdichte  $\mathbf{j}_{t_0} = \mathbf{j}_i(t_0, \cdot) dx^i$  zu einem gewissen Zeitpunkt  $t_0$  erhalten. Diese geschieht durch

$$c\rho(t_0, \cdot) = *\iota_0^{pb} * j, \quad (2.5.9)$$

$$\mathbf{j}_{t_0} = -\iota_0^{pb} j. \quad (2.5.10)$$

Als Beweis dienen die folgenden beiden Rechnungen

$$*\iota_0^{pb} * j \stackrel{C.4.4}{=} \iota_0^{pb} \text{ein}_n j = \iota_0^{pb} j_0 = j_0(t_0, \cdot) = c\rho(t_0, \cdot),$$

$$\begin{aligned} -\iota_0^{pb} j &= -\iota^{pb} j_\mu dx^\mu = -(j_\mu \circ \iota) d(x^\mu \circ \iota) = -j_m(t_0, \cdot) dx^m \\ &= \delta_{mk} j^k(t_0, \cdot) dx^m = \mathbf{j}_{t_0}. \end{aligned}$$

Die Feststellungen (2.5.7), (2.5.8), (2.5.9) und (2.5.10) werden auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten eine wichtigere Rolle spielen als auf dem Minkowski-raum, da sie einen Leitfaden dafür geben, was elektrisches Feld, magnetisches Feld, Ladungsdichte und 3er-Stromladungsdichte genannt werden soll. Weiter werden die Gleichungen (2.5.7) und (2.5.8) sehr wichtig sein, wenn es darum geht, Zusatzbedingungen an die Cauchydaten des Maxwellfeldes auf global hyperbolischen Raumzeiten zu stellen, sodaß das Cauchyproblem wohlgestellt wird.

## 2.6 Konsistenzrechnung

Bevor die Maxwellgleichungen auf global hyperbolischen Raumzeiten angegeben werden, soll nachgerechnet werden, daß die differentialgeometrisch formulierten Verallgemeinerungen 2.5(i+ii) sowie (2.5.2) die Maxwellgleichungen 2.4(i+ii) und die 4er-Stromerhaltung (2.4.1) ergeben. Dies dient als Nachweis dafür, daß wirklich sinnvolle und passende Verallgemeinerungen für die Maxwellgleichungen getroffen wurden. Als Karte des Minkowski- raumes  $(\mathcal{M}, \eta)$  sei für diesen Nachweis die globale Karte  $(\mathbb{R}^4, id_{\mathbb{R}^4})$  gewählt.

$$dF = d\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu\right) = \frac{1}{2}\partial_\kappa F_{\mu\nu}dx^\kappa \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0,$$

ausschreiben für ein festes Zahlentripel  $(\lambda, \rho, \sigma) \in \{0, 1, 2, 3\}^3$  liefert

$$\partial_\lambda F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\lambda} + \partial_\sigma F_{\lambda\rho} = 0 \quad (\text{homogene Maxwellgleichung 2.4(i)}).$$

Weiter berechnet man

$$\begin{aligned}
 -\delta F &= - *^{-1} d * \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right) \stackrel{B.7.2}{=} \nabla_\lambda F^{\lambda\kappa} \eta_{\kappa\alpha} dx^\alpha = \partial_\lambda F^{\lambda\kappa} \eta_{\kappa\alpha} dx^\alpha \\
 &= \frac{4\pi}{c} j_\alpha dx^\alpha = \frac{4\pi}{c} j \\
 \implies \partial_\lambda F^{\lambda\kappa} \eta_{\kappa\alpha} &= \frac{4\pi}{c} j_\alpha \quad | \cdot \eta^{\alpha\beta} \\
 \implies \partial_\lambda F^{\lambda\beta} &= \frac{4\pi}{c} j^\beta \quad (\text{inhomogene Maxwellgleichung 2.4 (ii)}).
 \end{aligned}$$

$$-\delta j = *^{-1} d * j_\mu dx^\mu \stackrel{B.7.2}{=} \nabla_\lambda j^\lambda = \partial_\lambda j^\lambda \quad (4\text{er-Stromerhaltung (2.4.1)}).$$

Ähnliche Rechnungen zeigen die Konsistenz der für die Potentiale getroffenen Verallgemeinerungen, also daß aus (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5) und (2.5.6) wieder (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4) und (2.4.5) folgen.

## 2.7 Maxwellfeld auf Lorentzmannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wenden wir uns der Formulierung der Maxwellgleichungen auf Lorentzmannigfaltigkeiten zu. Insbesondere wollen wir orientierte global hyperbolischen Raumzeiten betrachten. Für die Definition einer global hyperbolischen Raumzeit und ihre Eigenschaften siehe Abschnitt C.3. Im Falle einer 4-dimensionalen global hyperbolischen Raumzeit ist die Forderung nach Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit keine echte Einschränkung, weil jede 4-dimensionale global hyperbolische Raumzeit orientierbar ist. Dies liegt daran, daß jede 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit parallelisierbar ist. Aus der Orientierbarkeit folgt insbesondere, daß der Hodge-\* Operator wohldefiniert ist. Sei aber vorerst  $(M, g)$  eine 4-dimensionale und orientierte Lorentzmannigfaltigkeit. Die koordinatenunabhängigen Maxwellgleichungen 2.5(i+ii) lassen sich direkt verallgemeinern zu

(i)

$$dF = 0 \quad (\text{homogene Maxwellgleichung}).$$

(ii)

$$-\delta F = - *^{-1} d * F = \frac{4\pi}{c} j \quad (\text{inhomogene Maxwellgleichung}).$$

$F \in \Omega_2 M$  und  $j \in \Omega_1 M$  werden in einer beliebigen Karte  $(O, \pi)$  von  $M$  gegeben durch

$$\begin{aligned} j \Big|_O &= j_\mu d\pi^\mu, \\ F \Big|_O &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} d\pi^\mu \wedge d\pi^\nu. \end{aligned} \tag{2.7.1}$$

Solange kein Kartenwechsel durchgeführt wird, wird hier und in Zukunft darauf verzichtet, an den Komponentenfunktionen und Ableitungen zusätzlich zu kennzeichnen, in welcher Karte sie zu verstehen sind. Dies soll die Notation entlasten und übersichtlicher halten. Es ergibt sich aber immer aus dem Kontext, in welcher Karte gerechnet wird.

(2.7.1) ist die direkte Verallgemeinerung von (2.5.1) für beliebige Karten. In einer beliebigen Karte  $(O, \pi)$  lauten die Maxwellgleichungen 2.7(i+ii) daher

$$\begin{aligned} \nabla_\kappa F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\kappa} + \nabla_\nu F_{\kappa\mu} &= 0, \\ \nabla_\iota F^{\iota\mu} g_{\mu\nu} = g^{\iota\mu} \nabla_\iota F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu &\iff \nabla_\iota F^{\iota\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

wobei  $\nabla$  hier den Levi-Civita Zusammenhang (siehe Abschnitt B.3) bezeichnet. Die 4er-Stromerhaltung, die in (2.5.2) bereits koordinatenunabhängig formuliert ist, wird genauso verallgemeinert zu

$$-\delta j = 0, \tag{2.7.3}$$

was in einer beliebigen Karte  $(O, \pi)$  von  $M$

$$\nabla_\mu j^\mu = 0 \tag{2.7.4}$$

bedeutet.

### 2.7.1 Potentiale auf Lorentzmannigfaltigkeiten

Alle Ausdrücke in Unterabschnitt 2.5.1 sind bereits koordinatenunabhängig formuliert und lassen sich daher direkt auf Lorentzmannigfaltigkeiten  $(M, g)$  verallgemeinern:

$$\begin{aligned} F &= dA, \\ -\delta dA &= \frac{4\pi}{c} j, \end{aligned}$$

was in einer beliebigen Karte  $(O, \pi)$  von  $(M, g)$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu,$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

bedeutet, wobei  $A$  die lokale Darstellung

$$A \Big|_O = A_\mu d\pi^\mu$$

hat. Mit Lorenzbedingung

$$-\delta A = 0,$$

was lokal auf  $(O, \pi)$  zu

$$\nabla^\mu A_\mu = 0$$

wird, schreibt sich die Maxwellgleichung für das Potential als

$$\square A = \frac{4\pi}{c} j.$$

$\square$  bezeichnet hier den Wellenoperator für Differentialformen  $\square = -\delta d - d\delta$ . Lokal in der Karte  $(O, \pi)$  erhält man die Darstellung

$$\square A \Big|_O = \nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\mu \nabla_\nu A^\mu = \nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\mu + [\nabla_\nu, \nabla_\mu] A^\mu$$

$$\stackrel{B.4.4}{=} \nabla^\mu \nabla_\mu A_\nu - R_{\nu\mu} A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

## 2.7.2 Elektrisches und magnetisches Feld

Sei nun  $(M, g)$  eine 4-dimensionale global hyperbolische Raumzeit. Ist eine raumartige glatte Cauchyhyperfläche  $\Sigma \subset M$  mit Einbettung  $\iota : \Sigma \rightarrow M$  gegeben, so kann man jedem Feldstärketensor  $F \in \Omega_2 M$  das zugehörige elektrische und magnetische Feld auf  $\Sigma$  zuordnen, indem (2.5.7) und (2.5.8) zur Definition erhoben werden:

$$E \in \Omega_1 \Sigma, \quad E := - * \iota^{pb} * F, \quad (2.7.5)$$

$$B \in \Omega_2 \Sigma, \quad B := -\iota^{pb} F. \quad (2.7.6)$$

Da die äußere Ableitung und das Zurückholen einer Differentialform vertauschen, siehe Definition A.5.5, erfüllen das zu einem Feldstärketensor gehörige elektrische und magnetische Feld auf der Cauchyhyperfläche  $\Sigma$

$$-\delta E = 4\pi\rho, \quad (2.7.7)$$

$$dB = 0. \quad (2.7.8)$$

Die Gültigkeit dieser beiden Gleichungen wird bewiesen durch

$$\begin{aligned}
 -\delta E &= *^{-1}d*E \stackrel{(2.7.5)}{=} -*^{-1}d**\iota^{pb}*F = -*d*^{-1}*\iota^{pb}*F \\
 &= -*d\iota^{pb}*F = -*\iota^{pb}d*F = -*\iota^{pb}**^{-1}d*F = -*\iota^{pb}*\delta F \\
 &\stackrel{2.7(ii)}{=} *\iota^{pb}* \frac{4\pi}{c} j \stackrel{(2.7.9)}{=} 4\pi\rho.
 \end{aligned}$$

$$dB \stackrel{(2.7.6)}{=} -d\iota^{pb}F = -\iota^{pb}dF \stackrel{2.7(i)}{=} -\iota^{pb}0 = 0.$$

Genauso wie (2.5.7) und (2.5.8) erhebt man (2.5.9) und (2.5.10) zur Definition der zu  $j \in \Omega_1 M$  zugehörigen Ladungsdichte  $\rho \in \Omega_0 \Sigma$  und 3er-Stromladungsdichte  $\mathbf{j} \in \Omega_1 \Sigma$  auf  $\Sigma$ :

$$c\rho := *\iota^{pb}*j, \quad (2.7.9)$$

$$\mathbf{j} := -\iota^{pb}j. \quad (2.7.10)$$

Wieder sei der Leser darauf hingewiesen, daß in (2.7.5) und (2.7.9) unterschiedliche Hodge-\*-Operatoren gemeint sind. Vor dem Zurückholen steht der Hodge-\*-Operator von  $(M, g)$ , hinter dem Zurückholen derjenige der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(\Sigma, h = -\iota^{pb}g)$ . Der Hodge-\*-Operator von  $(\Sigma, h)$  ist wohldefiniert, da  $\Sigma$  wegen der Orientierbarkeit von  $M$  selbst wieder orientierbar ist.

### 2.7.3 Elektrischer und magnetischer Fluß

Sei wieder  $(M, g)$  eine 4-dimensionale global hyperbolische Raumzeit und  $z$  ein 2-Zykel aus  $Z_2^\infty(\Sigma; \mathbb{R})$ , dann sind der elektrische und der magnetische Fluß durch  $z$ , welcher mit einem Feldstärketensor  $F \in \Omega_2 M$  assoziiert wird, die Verallgemeinerungen der Integrale (2.3.6)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \int_z *E &\stackrel{(2.7.5)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_z -*\iota^{pb}*F = -\frac{1}{4\pi} \int_z \iota^{pb}*F = -\frac{1}{4\pi} \int_z *F, \\
 \frac{1}{4\pi} \int_z B &\stackrel{(2.7.6)}{=} -\frac{1}{4\pi} \int_z \iota^{pb}F = -\frac{1}{4\pi} \int_z F.
 \end{aligned}$$

Man sieht, daß es keine magnetische Ladung geben kann, wenn  $F$  aus einem 4er-Potential  $A$  durch  $F = dA$  hervorgeht. Die Integrale auf der rechten Seite der beiden Gleichungen können auf alle glatten 2-Zykel  $z \in Z_2^\infty(M, \mathbb{R})$  erweitert werden. Man spricht auch für diese 2-Zykel vom elektrischen und magnetischen Fluß durch  $z$ .

Ist  $z$  ein raumartiger glatter 2-Zykel, d.h.  $z$  ist ganz in einer raumartigen glatten Cauchyhyperfläche enthalten und somit ein glatter 2-Zykel dieser Cauchyhyperfläche, dann geben die Integrale die mit  $F$  assoziierte elektrische und magnetische Ladung an, die in  $z$  enthalten ist. Läßt man für  $z$  einen zeitartigen, d.h. nicht raumartigen glatten 2-Zykel  $z \in Z_2^\infty(M; \mathbb{R})$  zu, so geben die Integrale die elektrische und die magnetische Ladung an, die in einer gewissen Zeit durch eine gewisse Fläche hindurchströmt. Diese gewisse Zeit und Fläche werden beide durch  $z$  bestimmt.

Es ist aber ein Fehler, sich für jeden glatten 2-Zykel  $z$  diese Integrale als die elektrische und magnetische Ladung zu denken, wie man sie aus der Elementarteilchenphysik kennt. Da die Topologie i.A. nicht trivial ist, ist der Rand eines 2-Zykels nicht notwendigerweise der ganze Rand des Gebietes, welches von dem 2-Zykel umschrieben wird. Bei der Verwendung des Satzes von Stokes können also neben  $\partial z$  noch weitere Randterme auftreten.

Dies hat zur Folge, daß der elektromagnetische Fluß durch einen solchen 2-Zykel  $z$ , der von einem Beobachter festgestellt wird, nicht von einer Elementarladung herrührt. Man kann nicht irgendwo innerhalb von  $z$  mit dem Finger hinzeigen und sagen: „Hier befindet sich eine Ladung“. Nur ein unbedachter Beobachter würde den Satz von Stokes voreilig auf die Integrale anwenden und „nachweisen“, daß sich in  $z$  eine Ladung befindet.

Diese Ladung, die für einen solchen elektrischen bzw. magnetischen Fluß (in [MW57] Wurmlochfluß genannt) verantwortlich ist, ist topologischen Ursprunges und hat keine direkte Beziehung zur beobachteten Ladung in der Elementarteilchen- oder Quantenphysik. Dies erkennt man ganz besonders daran, daß der elektrische Fluß durch  $z$  bzw. die elektrische Ladung von  $z$  in diesem Fall nicht quantisiert ist. Es kann im Prinzip jeder beliebige Wert angenommen werden. Für eine ausführlichere Diskussion siehe [MW57].

### 2.7.4 Bemerkung

In der bisherigen Darstellung der Potentiale kann man den Standpunkt einnehmen, daß diese keine eigene physikalische Bedeutung haben, sondern nur ein sehr komfortables mathematisches Hilfsmittel sind. Potentiale sind, wenn sie überhaupt global existieren, noch nicht einmal eindeutig bestimmt! Globale Existenz bedeutet, daß es ein auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiertes Potential  $A$  mit  $dA = F$  gibt. Daß Potentiale zumindest immer lokal existieren, wird durch Folgerung 5.1.7 gezeigt. Lokal bedeutet hier, daß es um jeden Punkt  $x$  eine Umgebung  $O$  gibt, so daß  $F|_O = dA$  ist.  $A$  hängt in diesem Fall von  $O$  ab und sind  $A$  und  $A'$  zwei Potentiale zu  $O$  und  $O'$  mit  $O \cap O' \neq \emptyset$ , so kann durchaus  $A|_{O \cap O'} \neq A'|_{O \cap O'}$  sein.

Die Situation ändert sich aber, wenn man zur Quantenmechanik übergeht. In der Quantenmechanik kann man das Potential nicht mehr nur als mathematisches Hilfsmittel ohne physikalische Relevanz betrachten, denn die Schrödingergleichung wird durch einen kanonischen Formalismus abgeleitet, was nicht nur in Termen von Feldstärken ausgedrückt werden kann, sondern die Existenz von Potentialen erfordert. Die Potentiale werden also zu einer wichtigen Zutat der Theorie mit messbaren Folgen, siehe die Abhandlung von Diracs magnetischem Monopol in [Nab97] und insbesondere auch den Aharonov-Bohm Effekt in [AB59] und [ES49]. Die daraus gezogene Schlußfolgerung, daß das Potential essential für die Formulierung der physikalischen Gesetze sei, ist aber umstritten, siehe [DeW62].

Dennoch bleibt die Formulierung einer mit dem elektromagnetischen Feld wechselwirkenden Theorie, ohne die Benutzung von Potentialen, bis zum heutigen Tage problematisch. Selbst in einer wechselwirkungsfreien Theorie des Elektromagnetismus beinhaltet die Wirkung Terme, in welchen Potentiale vorkommen. Geht man zum quellenfreien Elektromagnetismus über, so kann man zwar die Wirkung vollständig in Termen des Feldstärketensors schreiben, aber es ist nicht klar, wie man von der Wirkung zu den Feldgleichungen gelangen soll. Auf der anderen Seite, und das wurde in [AS80] gezeigt, können in physikalisch relevanten Modellen Effekte auftreten, die weder durch lokale noch durch globale Potentiale zu beschreiben sind.



# Kapitel 3

## Das Cauchyproblem des Feldstärketensors

Im vergangenen Kapitel 2 haben wir gezeigt, was wir unter den Maxwellgleichungen auf gekrümmten Raumzeiten verstehen wollen. Nun wollen wir das Cauchyproblem des Maxwellfeldes angeben und lösen. Dies ist ein wichtiger Schritt in Richtung einer Quantentheorie des Elektromagnetismus, die nicht auf die Einführung von Potentialen angewiesen ist und daher auch auf Raumzeiten mit beliebiger Topologie gilt.

Die Existenz physikalisch interessanter Raumzeiten, die eine solche Herangehensweise erfordern, wird in [AS80] mit der Schwarzschild-Kruskal Raumzeit gezeigt. Dies ist aber nicht das einzige Beispiel einer topologisch nicht trivialen Raumzeit, z.B. werden in [MW57] Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum beschrieben, die Wurm Löcher enthalten. Frühere Arbeiten, die sich mit dem Cauchyproblem für das Maxwellfeld befassen, sind [KÖ1] und [Sor79].

Für dieses Kapitel sei  $(M, g)$  eine 4-dimensionale, orientierte, global hyperbolische Raumzeit und  $\Sigma$  eine raumartige glatte Cauchyhyperfläche in  $M$  mit Einbettung  $\iota : \Sigma \rightarrow M$ . Wir setzen *nicht* voraus, daß  $\Sigma$  kompakt ist. Die Wahl einer Cauchyhyperfläche ist möglich, da  $(M, g)$  global hyperbolisch ist, die spezielle Wahl einer raumartigen und glatten Cauchyhyperfläche ist möglich nach [BS03] und daher keine Einschränkung an  $(M, g)$ . Weiter sei  $\Sigma$  mit der vom zeitartigen und zukunftsgerichteten Normalenvektorfeld  $\mathbf{n}$  induzierten Orientierung versehen und für das ganze Kapitel sei auch  $(V, \phi)$  ein beliebiges angepaßtes Koordinatensystem mit zugehöriger Karte  $(U, \varphi)$  von  $\Sigma$ . Diese sind im Wesentlichen Schnittkarten für die Cauchyhyperfläche, in denen die Metrik in einen zeitlichen und räumlichen Anteil aufspaltet und die gemischten Komponenten  $g_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , verschwinden. Siehe zur genaueren Begriffserklärung und für die Eigenschaften angepaßter Koordinatensysteme

Abschnitt C.4.  $G_{\pm}$  bezeichne den avancierten bzw. retardierten Greenschen Operator des Wellenoperators für Differentialformen  $\square = -\delta d - d\delta$ . Der Propagator von  $\square$  wird mit  $G = G_+ - G_-$  bezeichnet. Die Greenschen Operatoren existieren nach Satz C.5.5, da  $(M, g)$  global hyperbolisch und  $\square$  normal hyperbolisch ist, siehe Satz B.8.5. Wir empfehlen dem Leser sich mit dem Abschnitt C.5 aus dem Anhang vertraut zu machen.

## 3.1 Vorüberlegungen

Erfüllt eine 2-Form  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  auf  $(M, g)$  die beiden Gleichungen 2.7(i+ii) für ein geeignetes  $j \in \Omega_1(M, \mathbb{C})$ , welches (2.7.3) erfüllt, so folgt daraus automatisch auch, daß  $F$  die inhomogene Wellengleichung

$$\square F = -(d\delta + \delta d)F = \frac{4\pi}{c}dj \quad (3.1.1)$$

erfüllt. Diese Tatsache motiviert die folgende Vorgehensweise:

*Um das Cauchyproblem des Maxwellfeldes zu lösen, löse man zuallererst das Cauchyproblem für die inhomogene Wellengleichung (3.1.1). Durch geeignete Wahl der vorzugebenden Cauchydaten erhält man dann eine Lösung des Cauchyproblems der Maxwellgleichungen, die einen Teilraum der Lösungen der Wellgleichung bilden.*

Die differentiellen Maxwellgleichungen 2.2 (i-iv) legen die Idee nahe, daß der Feldstärketensor schon ganz durch Objekte eindeutig bestimmt werden kann, die nur auf der Cauchyhyperfläche leben. Diese beiden Objekte sind das elektrische Feld  $E \in \Omega_1(\Sigma, \mathbb{C})$  und das magnetische Feld  $B \in \Omega_2(\Sigma, \mathbb{C})$ .

### 3.1.1 Cauchydaten der inhomogenen Wellengleichung

Es soll nun untersucht werden, was als Cauchydaten

$$\begin{aligned} F|_{\Sigma} &= \mathcal{F} \in \Gamma_c^{\infty}(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C})), \\ \nabla_n F|_{\Sigma} &= \Pi \in \Gamma_c^{\infty}(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C})) \end{aligned}$$

im Cauchyproblem der Wellengleichung (3.1.1) sinnvollerweise vorzugeben sind, um wirklich eine 2-Form  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  zu erhalten, die den Namen Feldstärketensor verdient.

**Cauchydatum**  $F|_{\Sigma}$

Gibt man sich eine 1-Form  $E \in \Omega_1(\Sigma, \mathbb{C})$  und eine 2-Form  $B \in \Omega_2(\Sigma, \mathbb{C})$  vor und verlangt von einer 2-Form  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$ , daß sie (2.7.5) und (2.7.6)

erfüllt, so legt das bereits  $F|_{\Sigma}$  vollständig fest. Zum Beweis dieser Aussage ist es am einfachsten lokal nachzuprüfen, ob die Komponentenfunktionen von  $F$  eingeschränkt auf  $\Sigma$  vollständig durch diese Forderungen bestimmt sind. Lokal haben die Differentialformen die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} F|_U &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu, \\ E|_U &= E_i d\varphi^i, \\ B|_U &= \frac{1}{2} B_{ij} d\varphi^i \wedge d\varphi^j. \end{aligned}$$

Hiermit berechnet man

$$-\iota^{pb} F|_U = -\iota^{pb} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu \right) - \frac{1}{2} F_{ij} d\varphi^i \wedge d\varphi^j \stackrel{(2.7.6)}{=} B|_U = \frac{1}{2} B_{ij} d\varphi^i \wedge d\varphi^j,$$

woraus also für die „räumlichen“ Komponenten von  $F$

$$F_{ij}|_U = -B_{ij} \tag{3.1.2}$$

folgt. Weiter erhält man

$$-\ast \iota^{pb} \ast F|_U \stackrel{C.4.4}{=} \iota^{pb} \text{ein}_n F|_U = \iota^{pb} (F_{0\nu} n^0 d\phi^\nu) = F_{0j} n^0 d\varphi^j \stackrel{(2.7.5)}{=} E|_U = E_j d\varphi^j,$$

woraus für die „zeitlichen“ Komponenten von  $F$

$$F_{0j}|_U = n_0 E_j \tag{3.1.3}$$

folgt. Die Komponentenfunktionen von  $F$  sind lokal auf  $U$  also durch die Komponentenfunktionen von  $E$  und  $B$  gegeben und da sich  $\Sigma$  durch angepaßte Koordinatensysteme überdecken läßt, ist  $F|_{\Sigma}$  komplett durch die Vorgabe von  $E$  und  $B$  und die Forderungen (2.7.5) und (2.7.6) festgelegt.

Damit nun  $E$  und  $B$  zu einem Feldstärketensor gehöriges elektrisches und magnetisches Feld sein können, muß man noch notwendigerweise fordern, daß  $E$  die Gleichung (2.7.7) und  $B$  die Gleichung (2.7.8) erfüllt. Leider folgen aber aus  $-\delta E = 4\pi\rho$  und  $dB = 0$  noch nicht  $dF|_{\Sigma} = 0$  und  $-\delta F|_{\Sigma} = \frac{4\pi}{c} j|_{\Sigma}$ , wie man sich wieder durch lokale Rechnungen klar machen kann:

$$\begin{aligned} dF|_U &\stackrel{B.3.4}{=} \frac{1}{2} \nabla_\kappa F_{\mu\nu} d\phi^\kappa \wedge d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu \\ &= \frac{1}{2} \nabla_\kappa F_{ij} d\phi^k \wedge d\phi^i \wedge d\phi^j + \frac{1}{2} (\nabla_0 F_{ij} + \nabla_i F_{j0} + \nabla_j F_{0i}) d\phi^0 \wedge d\phi^i \wedge d\phi^j \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dB \Big|_U &= \frac{1}{2} \partial_k B_{ij} d\varphi^k \wedge d\varphi^i \wedge d\varphi^j \stackrel{(3.1.2)}{=} -\frac{1}{2} \partial_k F_{ij} d\varphi^k \wedge d\varphi^i \wedge d\varphi^j \\ &\stackrel{B.3.4}{=} -\frac{1}{2} \nabla_k F_{ij} d\varphi^k \wedge d\varphi^i \wedge d\varphi^j = 0. \end{aligned}$$

$$-\delta F \Big|_U \stackrel{B.7.2}{=} \nabla_\nu F^{\nu\mu} g_{\mu\nu} d\phi^\nu = \frac{4\pi}{c} j_\nu d\phi^\nu = \frac{4\pi}{c} j \Big|_U \iff \nabla_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

$$\begin{aligned} -\delta E \Big|_U &\stackrel{B.7.2}{=} \nabla_i E^i \stackrel{B.3.3}{=} \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i (E_j h^{ji} \sqrt{h}) \stackrel{(3.1.3)}{=} \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i (F_{0j} n^0 h^{ji} \sqrt{h}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i (F^0_j n_0 g^{ji} \sqrt{h}) = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i (F^{i0} \sqrt{|g|}) = 4\pi \rho \Big|_U = \frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{h}} \frac{4\pi}{c} j^0 \\ \implies \nabla_\nu F^{\nu 0} \Big|_U &= \frac{4\pi}{c} j^0 \Big|_U, \end{aligned}$$

wobei

$$*l^{pb} *j \Big|_U \stackrel{C.4.4}{=} l^{pb} \text{ein}_n j \Big|_U = j_0 n^0 = j^0 n_0 = \frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{h}} j^0 \stackrel{(2.7.9)}{=} c\rho \Big|_U$$

benutzt wurde. Da das angepaßte Koordinatensystem beliebig gewählt war und sich  $\Sigma$  von angepaßten Koordinatensystemen überdecken läßt, folgt aus  $dB = 0$  also

$$(\nabla_k F_{ij} + \nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki}) \Big|_\Sigma = 0$$

und aus  $-\delta E = 4\pi\rho$  folgt

$$\nabla_\nu F^{\nu 0} \Big|_\Sigma = \frac{4\pi}{c} j^0 \Big|_\Sigma,$$

wobei diese lokalen Gleichungen natürlich in angepaßten Koordinatensystemen zu verstehen sind.

Noch nicht implementiert sind die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (\nabla_0 F_{ij} + \nabla_i F_{j0} + \nabla_j F_{0i}) \Big|_\Sigma &= 0, \\ \nabla_\nu F^{\nu n} \Big|_\Sigma &= \frac{4\pi}{c} j^n \Big|_\Sigma. \end{aligned}$$

Vergleicht man die vorliegende Situation mit 2.4(i+ii), so sind noch nicht die Maxwellgleichungen implementiert, welche die Zeitableitungen enthalten. Diese gilt es nun mit Hilfe der Normalenableitung  $\nabla_n F \Big|_\Sigma$ , die als Cauchydatum noch zu wählen ist, mit ins Spiel zu bringen.

### Cauchydatum $\nabla_n F \Big|_{\Sigma}$

Um besser beurteilen zu können, was als Normalenableitung vorzugeben ist, nehme an, daß  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  ein Feldstärketensor mit zugehörigem elektrischen Feld  $E$  und magnetischen Feld  $B$  ist. Insbesondere gelten  $E = - *_3 \iota^{pb}(*_4 F)$  und  $B = -\iota^{pb}F$ . Ziel ist es, die Normalenableitung so umzuformen, daß sie nur durch Objekte, welche auf der Cauchyhyperfläche  $\Sigma$  leben, ausgedrückt wird. Es ergibt sich lokal unter der Verwendung von (2.7.2):

$$\begin{aligned} \nabla_n F \Big|_U &= \frac{1}{2} n^0 \nabla_0 F_{\alpha\beta} d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta = \frac{1}{2} n^0 \nabla_0 F_{ab} d\phi^a \wedge d\phi^b + n^0 \nabla_0 F_{0b} d\phi^0 \wedge d\phi^b \\ &= \frac{1}{2} n^0 (-\nabla_a F_{b0} - \nabla_b F_{0a}) d\phi^a \wedge d\phi^b + \frac{n^0}{g^{00}} \left( \frac{4\pi}{c} j_b - g^{ij} \nabla_i F_{jb} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^b \\ &= n^0 \nabla_a F_{0b} d\phi^a \wedge d\phi^b + n_0 \left( \frac{4\pi}{c} j_b - g^{ij} \nabla_i F_{jb} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^b. \end{aligned}$$

Dies ist der gewünschte Ausdruck, der für die Normalenableitung zu fordern ist, um die noch fehlenden Gleichungen mit aller Gewalt zu implementieren.

Damit wären die Wahlen der Cauchydaten für das Cauchyproblem der Wellengleichung (3.1.1) soweit geklärt, daß man eine Lösung der Maxwellgleichungen 2.7(i+ii) erhält. Es wird nun der Hauptsatz dieses Kapitels formuliert:

## 3.2 Cauchyproblem des Feldstärketensors

Sei  $(M, g)$  eine 4-dimensionale, orientierte, global hyperbolische Raumzeit und  $\Sigma \subset M$  eine raumartige, glatte Cauchyhyperfläche mit der Einbettung  $\iota : \Sigma \rightarrow M$ . Für alle Tripel  $(j, E, B)$  bestehend aus  $j \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  mit  $-\delta j = 0$ ,  $E \in \Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C})$  mit  $-\delta E = *_3 \iota^{pb} * \frac{4\pi}{c} j$  und  $B \in \Omega_{2c}(\Sigma, \mathbb{C})$  mit  $dB = 0$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$ , welches

$$\begin{aligned} dF &= 0, \\ -\delta F &= \frac{4\pi}{c} j, \\ - *_3 \iota^{pb} * F &= E, \\ -\iota^{pb} F &= B \end{aligned}$$

erfüllt. Darüberhinaus hängt  $F$  linear und stetig von  $j, E$  und  $B$  ab und es gilt  $\text{supp}(F) \subset J^M(\text{supp}(j) \cup \text{supp}(E) \cup \text{supp}(B))$  für den Träger von  $F$ .

## 3.3 Beweis des Cauchyproblems

Seien alle Voraussetzungen so, wie sie in Satz 3.2 formuliert wurden. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

### 3.3.1 Schritt 1: Lösen der Wellengleichung

Wie bei den Vorüberlegungen in Abschnitt 3.1 festgestellt und als Lösungsstrategie formuliert wurde, erfüllt jede Lösung der Maxwellgleichungen

$$dF = 0 \quad \text{und} \quad -\delta F = \frac{4\pi}{c}j$$

auch die inhomogene Wellengleichung (3.1.1), die lokal nach Satz B.8.5 als

$$\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu F_{\alpha\beta} - g^{\mu\nu}[\nabla_\mu, \nabla_\nu]F_{\nu\beta}\right)d\pi^\alpha \wedge d\pi^\beta = \frac{4\pi}{c}\nabla_{\alpha j\beta}d\pi^\alpha \wedge d\pi^\beta \quad (3.3.1)$$

in einer beliebigen Karte  $(O, \pi)$  von  $M$  geschrieben werden kann. Mit Hilfe der vorgegebenen Feldern  $E$  und  $B$  definiere man nun die beiden Cauchydaten  $\mathcal{F} \in \Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  und  $\Pi \in \Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  folgendermaßen:

#### Cauchydatum $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}$  soll definiert als

$$\mathcal{F} := \mathfrak{b}(\mathbf{n}) \wedge E - \frac{1}{2} \text{ein}_{\mathbf{n}}(\mathfrak{b}(\mathbf{n}) \wedge B)$$

sein, was symbolisch für die 2-Form aus  $\Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  stehen soll, die in jedem angepaßten Koordinatensystem die Gestalt

$$\mathcal{F}\Big|_U = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu := n_0 E_j d\phi^0 \wedge d\phi^j - \frac{1}{2}B_{ij}d\phi^i \wedge d\phi^j \quad (3.3.2)$$

hat. Für alle anderen Karten von  $M$  soll  $\mathcal{F}$  gemäß dem Transformationsverhalten für Tensoren definiert sein. Daß das so definierte  $\mathcal{F}$  wirklich eine Differentialform in  $\Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  ist, der Ausdruck (3.3.2) also wirklich in jedem angepaßten Koordinatensystem von  $M$  für  $\Sigma$  gilt, wird im Anschluß an Schritt 1 gezeigt. Weiter ist das so definierte Cauchydatum auch die einzige, mögliche Wahl eines Cauchydatums, sodaß  $-*\iota^{pb}(*F) = E$  und  $-\iota^{pb}(F) = B$  erfüllt werden. Denn nach (3.1.2) und (3.1.3) folgen für  $\mathcal{F} \in \Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  mit  $-*\iota^{pb}(*\mathcal{F}) = E$ ,  $-\iota^{pb}\mathcal{F} = B$  und für  $\mathcal{F}' \in \Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  mit  $-*\iota^{pb}(*\mathcal{F}') = E$ ,  $-\iota^{pb}\mathcal{F}' = B$  schon in jedem angepaßten Koordinatensystem, daß  $\mathcal{F}_{ij}\Big|_U = -B_{ij} = \mathcal{F}'_{ij}\Big|_U$  und  $\mathcal{F}_{0j}\Big|_U = n_0 E_j = \mathcal{F}'_{0j}\Big|_U$  gelten. Da sich  $\Sigma$  von angepaßten Koordinatensystemen überdecken läßt, folgt also  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ .

### Cauchydatum $\Pi$

$\Pi$  soll als diejenige 2-Form aus  $\Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  definiert sein, die lokal in jedem beliebigen, angepaßten Koordinatensystem die Gestalt

$$\begin{aligned} \Pi \Big|_U &= \frac{1}{2} \Pi_{\mu\nu} d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu \\ &:= n^0 \nabla_i \mathcal{F}_{0j} d\phi^i \wedge d\phi^j + n_0 \left( \frac{4\pi}{c} j_k - g^{ij} \nabla_i \mathcal{F}_{jk} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^k \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

hat. Für alle anderen Karten von  $M$  soll  $\Pi$  gemäß dem Transformationsverhalten für Tensoren definiert sein. Daß das so definierte  $\Pi$  wirklich ein Tensor aus  $\Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  ist, der Ausdruck (3.3.3) also in jedem angepaßten Koordinatensystem von  $M$  für  $\Sigma$  gilt, wird wiederum gleich im Anschluß an Schritt 1 gezeigt. Diese Wahl ist die einzige mögliche Wahl von  $\Pi$ , so daß  $F$  mit  $\square F = 0$ ,  $F \Big|_\Sigma = \mathcal{F}$  und  $\nabla_n F \Big|_\Sigma = \Pi$  Lösung der Maxwellgleichungen mit  $-\iota^{pb} F = B$  und  $-* \iota^{pb} (*F) = E$  wird, was schnell gezeigt ist. Jede Lösung der Maxwellgleichungen erfüllt nämlich in jedem angepaßten Koordinatensystem die Gleichung  $\nabla_n F = n^0 \nabla_a F_{0b} d\phi^a \wedge d\phi^b + n_0 \left( \frac{4\pi}{c} j_b - g^{ij} \nabla_i F_{jb} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^b$ , was in Abschnitt 3.1.1 gezeigt wurde. Angenommen man würde also ein völlig anders geartetes  $\Pi' \in \Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  vorgeben und dadurch eine Lösung der Maxwellgleichungen erhalten, dann folgt daraus schon automatisch

$$\begin{aligned} \Pi' &= \nabla_n F \Big|_\Sigma = n^0 \nabla_a F_{0b} d\phi^a \wedge d\phi^b + n_0 \left( \frac{4\pi}{c} j_b - g^{ij} \nabla_i F_{jb} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^b \\ &= n^0 \nabla_a \mathcal{F}_{0b} d\phi^a \wedge d\phi^b + n_0 \left( \frac{4\pi}{c} j_b - g^{ij} \nabla_i \mathcal{F}_{jb} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^b \\ &= \Pi. \end{aligned}$$

### Cauchyproblem der inhomogenen Wellengleichung

Für das Cauchyproblem

$$\square F = \frac{4\pi}{c} dj, \quad F \Big|_\Sigma = \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \nabla_n F \Big|_\Sigma = \Pi$$

erhält man mit Satz C.5.2 eine eindeutige Lösung  $F$ , die nach Satz C.5.3 linear und stetig von  $dj$ ,  $\mathcal{F}$  und  $\Pi$  abhängt, also linear und stetig von  $j$ ,  $E$  und  $B$ . Für den Träger von  $F$  gilt  $\text{supp}(F) \subset J^M(\text{supp}(dj) \cup \text{supp}(\mathcal{F}) \cup \text{supp}(\Pi))$ , also  $\text{supp}(F) \subset J^M(\text{supp}(j) \cup \text{supp}(E) \cup \text{supp}(B))$ . Darüber hinaus sind wegen  $F \Big|_\Sigma = \mathcal{F}$  die Gleichheiten  $-* \iota^{pb} * F = E$  und  $-\iota^{pb} F = B$  per Konstruktion erfüllt. Der weitere Verlauf des Beweises hat nun zum Ziel, Satz C.5.1 zur Anwendung zu bringen. Dazu zeigen wir in den Schritten 2-5 sowie in Schritt 7,

daß die bisher erhaltene Lösung  $F$  die Gleichungssysteme  $\square dF = 0$ ,  $dF|_{\Sigma} = 0$ ,  $\nabla_n dF|_{\Sigma} = 0$  und  $\square(-\delta F - \frac{4\pi}{c}j) = 0$ ,  $-\delta F|_{\Sigma} = \frac{4\pi}{c}j|_{\Sigma}$ ,  $(\nabla_n(-\delta F - \frac{4\pi}{c}j))|_{\Sigma} = 0$  erfüllt. Zuvor wird aber noch das Transformationsverhalten der Cauchydaten  $\mathcal{F}$  und  $\Pi$  beim Kartenwechsel zwischen angepaßten Koordinatensystemen gezeigt. Damit ist dann nachgewiesen, daß die Definitionen (3.3.2) und (3.3.3) wirklich Tensoren aus  $\Gamma_c^\infty(\Sigma, \Lambda_2(M, \mathbb{C}))$  wohldefinieren.

### 3.3.2 Transformationsverhalten der Cauchydaten

Wähle ein weiteres angepaßtes Koordinatensystem  $(V', \theta)$  von  $M$  für  $\Sigma$  mit zugehöriger Karte  $(W, \vartheta)$  von  $\Sigma$ , die  $U \cap W \neq \emptyset$  erfüllt. Bezeichne  $T$  die Transformationsmatrix des Kartenwechsels von  $\phi$  nach  $\theta$  und  $\tilde{T}$  die Transformationsmatrix des Kartenwechsels von  $\theta$  nach  $\phi$ . Für die Eigenschaften der Transformationsmatrizen beim Kartenwechsel zwischen angepaßten Koordinatensystemen sei nochmals auf A.2.1 und C.4.2 verwiesen.

#### Transformationsverhalten von $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} {}^\phi \mathcal{F}_{\mu\nu} d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu &= {}^\phi n_0 {}^\vartheta E_j d\phi^0 \wedge d\phi^j - \frac{1}{2} {}^\vartheta B_{ij} d\phi^i \wedge d\phi^j \\
 &= (T_0^\lambda {}^\theta n_\lambda) (T_j^k {}^\vartheta E_k) (\tilde{T}_\rho^0 d\theta^\rho) \wedge (\tilde{T}_\sigma^j d\theta^\sigma) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (T_i^k T_j^l {}^\vartheta B_{kl}) (\tilde{T}_\rho^i d\theta^\rho) \wedge (\tilde{T}_\sigma^j d\theta^\sigma) \\
 &= {}^\theta n_0 {}^\vartheta E_s d\theta^0 \wedge d\theta^s - \frac{1}{2} {}^\vartheta B_{rs} d\theta^r \wedge d\theta^s \\
 &\quad - \frac{1}{2} (T_i^k {}^\vartheta B_{ks}) (\tilde{T}_0^i d\theta^0) \wedge d\theta^s - \frac{1}{2} (T_j^l {}^\vartheta B_{rl}) d\theta^r \wedge (\tilde{T}_0^j d\theta^0) \\
 &= {}^\theta n_0 {}^\vartheta E_s d\theta^0 \wedge d\theta^s - \frac{1}{2} {}^\vartheta B_{rs} d\theta^r \wedge d\theta^s \\
 &\quad - (\delta_0^k - T_0^k \tilde{T}_0^0) {}^\vartheta B_{ks} d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &= {}^\theta n_0 {}^\vartheta E_s d\theta^0 \wedge d\theta^s - \frac{1}{2} {}^\vartheta B_{rs} d\theta^r \wedge d\theta^s \\
 &\quad + T_0^k \tilde{T}_0^0 \underbrace{({}^\vartheta h_{kn} {}^\vartheta h^{nl})}_{= \delta_k^l} {}^\vartheta B_{ls} d\theta^0 \wedge d\theta^s
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= {}^\theta n_0 {}^\vartheta E_s d\theta^0 \wedge d\theta^s - \frac{1}{2} {}^\vartheta B_{rs} d\theta^r \wedge d\theta^s \\
 &\quad - \underbrace{T_0^k {}^\theta g_{kn}}_{=0} \tilde{T}_0^0 {}^\vartheta h^{nl} {}^\vartheta B_{ls} d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &= {}^\theta n_0 {}^\vartheta E_s d\theta^0 \wedge d\theta^s - \frac{1}{2} {}^\vartheta B_{rs} d\theta^r \wedge d\theta^s \\
 &= \frac{1}{2} {}^\theta \mathcal{F}_{\mu\nu} d\theta^\mu \wedge d\theta^\nu.
 \end{aligned}$$

### Transformationsverhalten von $\Pi$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} {}^\phi \Pi_{\mu\nu} d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu &= {}^\phi n^0 {}^\phi \nabla_i {}^\phi \mathcal{F}_{0j} d\phi^i \wedge d\phi^j + {}^\phi n_0 \left( \frac{4\pi}{c} {}^\phi j_k - {}^\phi g^{ij} {}^\phi \nabla_i {}^\phi \mathcal{F}_{jk} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^k \\
 &= (\tilde{T}_\lambda^0 {}^\theta n^\lambda) (T_i^\kappa T_0^\alpha T_j^\beta {}^\theta \nabla_\kappa {}^\theta \mathcal{F}_{\alpha\beta}) (\tilde{T}_\rho^i d\theta^\rho) \wedge (\tilde{T}_\sigma^j d\theta^\sigma) \\
 &\quad + (T_0^\lambda {}^\theta n_\lambda) \left( \frac{4\pi}{c} (T_k^\kappa {}^\theta j_\kappa) - (\tilde{T}_\mu^i \tilde{T}_\nu^j {}^\theta g^{\mu\nu}) (T_i^\kappa T_j^\alpha T_k^\beta {}^\theta \nabla_\kappa {}^\theta \mathcal{F}_{\alpha\beta}) \right) \\
 &\quad \cdot (\tilde{T}_\rho^0 d\theta^\rho) \wedge (\tilde{T}_\sigma^k d\theta^\sigma) \\
 &= (\tilde{T}_0^0 {}^\theta n^0) (T_i^k T_0^\alpha T_j^b {}^\theta \nabla_k {}^\theta \mathcal{F}_{\alpha b}) (\tilde{T}_\rho^i d\theta^\rho) \wedge (\tilde{T}_\sigma^j d\theta^\sigma) \\
 &\quad + {}^\theta n_0 \left( \frac{4\pi}{c} (T_k^l {}^\theta j_l) - (\tilde{T}_\mu^i \tilde{T}_\nu^j {}^\theta g^{\mu\nu}) (T_i^l T_j^a T_k^b {}^\theta \nabla_l {}^\theta \mathcal{F}_{ab}) \right) d\theta^0 \wedge (\tilde{T}_s^k d\theta^s) \\
 &= {}^\theta n^0 {}^\theta \nabla_r {}^\theta \mathcal{F}_{0s} d\theta^r \wedge d\theta^s + (\tilde{T}_0^0 {}^\theta n^0) (T_0^a {}^\theta \nabla_r {}^\theta \mathcal{F}_{as}) d\theta^r \wedge d\theta^s \\
 &\quad + (\tilde{T}_0^0 {}^\theta n^0) (T_i^k T_0^\alpha {}^\theta \nabla_k {}^\theta \mathcal{F}_{\alpha s}) (\tilde{T}_0^i d\theta^0) \wedge d\theta^s \\
 &\quad + (\tilde{T}_0^0 {}^\theta n^0) (T_0^\alpha T_j^b {}^\theta \nabla_r {}^\theta \mathcal{F}_{\alpha b}) d\theta^r \wedge (\tilde{T}_0^j d\theta^0) \\
 &\quad + {}^\theta n_0 \frac{4\pi}{c} {}^\theta j_s d\theta^0 \wedge d\theta^s - {}^\theta n_0 {}^\theta g^{la} {}^\theta \nabla_l {}^\theta \mathcal{F}_{as} d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &\quad - {}^\theta n_0 (\tilde{T}_0^i \tilde{T}_0^j {}^\theta g^{00}) (T_i^l T_j^a {}^\theta \nabla_l {}^\theta \mathcal{F}_{as}) d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &= {}^\theta n^0 {}^\theta \nabla_r {}^\theta \mathcal{F}_{0s} d\theta^r \wedge d\theta^s \\
 &\quad + (\tilde{T}_0^0 {}^\theta n^0) \underbrace{(T_0^a {}^\theta g_{a\mu} {}^\theta g^{\mu\nu})}_{=0} {}^\theta \nabla_r {}^\theta \mathcal{F}_{\nu s} d\theta^r \wedge d\theta^s \\
 &\quad + (\tilde{T}_0^0 {}^\theta n^0) (\delta_0^k - T_0^k \tilde{T}_0^0) (T_0^\alpha {}^\theta \nabla_k {}^\theta \mathcal{F}_{\alpha s}) d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &\quad + (\tilde{T}_0^0 {}^\theta n^0) (\delta_0^b - T_0^b \tilde{T}_0^0) (T_0^\alpha {}^\theta \nabla_r {}^\theta \mathcal{F}_{\alpha b}) d\theta^r \wedge d\theta^0 \\
 &\quad + {}^\theta n_0 \left( \frac{4\pi}{c} {}^\theta j_s - {}^\theta g^{la} {}^\theta \nabla_l {}^\theta \mathcal{F}_{as} \right) d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &\quad - {}^\theta n^0 (\delta_0^l - \tilde{T}_0^l T_0^l) (\delta_0^a - \tilde{T}_0^a T_0^a) {}^\theta \nabla_l {}^\theta \mathcal{F}_{as} d\theta^0 \wedge d\theta^s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \theta n^0 \theta \nabla_r \theta \mathcal{F}_{0s} d\theta^r \wedge d\theta^s + \theta n_0 \left( \frac{4\pi}{c} \theta_j s - \theta g^{la} \theta \nabla_l \theta \mathcal{F}_{as} \right) d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &\quad - (\tilde{T}_0^0 \theta n^0) \underbrace{T_0^k \theta g_{k\mu}}_{=0} \theta g^{\mu\nu} \tilde{T}_0^0 (T_0^\alpha \theta \nabla_\nu \theta \mathcal{F}_{\alpha s}) d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &\quad - (\tilde{T}_0^0 \theta n^0) \underbrace{T_0^b \theta g_{b\mu}}_{=0} \theta g^{\mu\nu} \tilde{T}_0^0 (T_0^\alpha \theta \nabla_r \theta \mathcal{F}_{\alpha\nu}) d\theta^r \wedge d\theta^0 \\
 &\quad - \theta n^0 \tilde{T}_0^0 \underbrace{T_0^l \theta g_{l\mu}}_{=0} \theta g^{\mu\nu} \tilde{T}_0^0 \underbrace{T_0^a \theta g_{a\lambda}}_{=0} \theta g^{\lambda\kappa} \theta \nabla_\nu \theta \mathcal{F}_{\kappa s} d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &= \theta n^0 \theta \nabla_r \theta \mathcal{F}_{0s} d\theta^r \wedge d\theta^s + \theta n_0 \left( \frac{4\pi}{c} \theta_j s - \theta g^{la} \theta \nabla_l \theta \mathcal{F}_{as} \right) d\theta^0 \wedge d\theta^s \\
 &= \frac{1}{2} \theta \Pi_{\mu\nu} d\theta^\mu \wedge d\theta^\nu.
 \end{aligned}$$

### 3.3.3 Schritt 2: Vertauschbarkeit von $\square$ mit $d$ und $\delta$

Aus Lemma B.8.9 folgt für die in Schritt 1 erhaltene Lösung  $F$  der inhomogenen Wellengleichung (3.1.1), daß sie

$$\square dF = d\square F = d\left(\frac{4\pi}{c} dj\right) = 0$$

und

$$\square(-\delta F - \frac{4\pi}{c} j) = -\delta\square F - \square\frac{4\pi}{c} j = -\frac{4\pi}{c} \delta dj + \frac{4\pi}{c} (d\delta + \delta d)j = 0$$

erfüllt.

### 3.3.4 Schritt 3: Beweis von $dF|_\Sigma = 0$

Aus  $dB = 0$  und  $-\iota^{pb} F = B$  folgt  $(\nabla_k F_{ij} + \nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki})|_\Sigma = 0$ , wie bereits in Abschnitt 3.1.1 gezeigt wurde. Mit  $\nabla_n F|_U = \Pi|_U$  lokal berechnet zu

$$\begin{aligned}
 \nabla_n F|_U &= \frac{1}{2} n^0 \nabla_0 F_{\mu\nu} d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu \\
 &= \Pi|_U = n^0 \nabla_i \mathcal{F}_{0j} d\phi^i \wedge d\phi^j + n_0 \left( \frac{4\pi}{c} j_n - g^{ml} \nabla_l \mathcal{F}_{mn} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^n
 \end{aligned}$$

kann man nun direkt die auf  $U$  gültige Gleichheit

$$\frac{1}{2} n^0 \nabla_0 F_{ij} d\phi^i \wedge d\phi^j = n^0 \nabla_i \mathcal{F}_{0j} d\phi^i \wedge d\phi^j = n^0 \nabla_i F_{0j} d\phi^i \wedge d\phi^j$$

folgern. Bezüglich eines festen Basisvektors  $d\phi^i \wedge d\phi^j$  erhält man somit

$$(\nabla_0 F_{ij} + \nabla_i F_{j0} + \nabla_j F_{0i}) \Big|_U = 0.$$

Insgesamt folgt also  $dF \Big|_U = 0$  und da das angepaßte Koordinatensystem beliebig gewählt war sowie sich  $\Sigma$  vollständig durch angepaßte Koordinatensysteme überdecken läßt

$$dF \Big|_\Sigma = 0.$$

Lokal in einer beliebigen Karte  $(O, \pi)$  von  $M$  mit  $\Sigma \cap O \neq \emptyset$  bedeutet dies nun genau

$$(\nabla_\kappa F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\kappa} + \nabla_\nu F_{\kappa\mu}) \Big|_{\Sigma \cap O} = 0. \quad (3.3.4)$$

### 3.3.5 Schritt 4: Beweis von $-\delta F \Big|_\Sigma = \frac{4\pi}{c} j \Big|_\Sigma$

Genauso wie bei der lokalen Berechnung von  $\nabla_n F \Big|_U = \Pi \Big|_U$  in Schritt 2 folgert man die auf  $U$  gültige Gleichheit

$$n^0 \nabla_0 F_{0n} = n_0 \left( \frac{4\pi}{c} j_n - g^{ml} \nabla_l F_{mn} \right) = n_0 \left( \frac{4\pi}{c} j_n - g^{ml} \nabla_l F_{mn} \right).$$

Dies formt man noch um zu

$$\begin{aligned} n^0 n^0 \nabla_0 F_{0n} &= n_0 g^{00} n^0 \nabla_0 F_{0n} = g^{00} \nabla_0 F_{0n} = \frac{4\pi}{c} j_n - g^{ml} \nabla_l F_{mn} \\ \implies g^{\mu\nu} \nabla_\nu F_{\mu n} \Big|_U &= \frac{4\pi}{c} j_n \Big|_U. \end{aligned}$$

Jetzt fehlt nur noch zu zeigen, daß  $g^{\mu\nu} \nabla_\nu F_{\mu 0} \Big|_U = \frac{4\pi}{c} j_0 \Big|_U$  gilt. Diese Gleichheit erhält man sehr leicht. Mit Hilfe der Gleichungen  $-* \iota^{pb} * F = E$ ,  $-\delta E = 4\pi\rho$  und  $c\rho = * \iota^{pb} * j$  läßt sich  $\nabla_\nu F^{\nu 0} \Big|_U = \frac{4\pi}{c} j^0 \Big|_U$  zeigen, wie in Abschnitt 3.1.1 festgestellt wurde. Hiermit berechnet man lokal auf  $U$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} j^0 &= \frac{4\pi}{c} g^{0\mu} j_\mu = \frac{4\pi}{c} g^{00} j_0 = \nabla_\nu F^{\nu 0} = g^{\mu\nu} g^{0\nu} \nabla_\nu F_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{00} \nabla_\nu F_{\mu 0} \\ \implies \frac{4\pi}{c} j_0 &= g^{\mu\nu} \nabla_\nu F_{\mu 0}. \end{aligned}$$

Somit ist also gezeigt, daß  $-\delta F \Big|_U = \frac{4\pi}{c} j \Big|_U$  gilt. Da das angepaßte Koordinatensystem beliebig gewählt war und sich  $\Sigma$  durch angepaßte Koordinatensysteme vollständig überdecken läßt, folgt unmittelbar

$$-\delta F \Big|_\Sigma = \frac{4\pi}{c} j \Big|_\Sigma.$$

Dies bedeutet lokal in einer beliebigen Karte  $(O, \pi)$  von  $M$  mit  $\Sigma \cap O \neq \emptyset$  nichts anderes als

$$g^{\mu\nu} \nabla_\nu F_{\mu\nu} \Big|_{\Sigma \cap O} = \frac{4\pi}{c} j_\nu \Big|_{\Sigma \cap O} \iff \nabla_\nu F^{\nu\mu} \Big|_{\Sigma \cap O} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \Big|_{\Sigma \cap O}. \quad (3.3.5)$$

### 3.3.6 Schritt 5: Beweis von $\nabla_n dF \Big|_\Sigma = 0$

Mit Lemma B.2.6 und Lemma B.3.4 berechnet man  $\nabla_n dF$  lokal zu

$$\begin{aligned} \nabla_n dF \Big|_U &= \frac{1}{2} n^0 \nabla_0 \nabla_\kappa F_{\mu\nu} d\phi^\kappa \wedge d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu \\ &= \frac{1}{2} n^0 \nabla_0 (\nabla_0 F_{mn} - \nabla_m F_{0n} + \nabla_m F_{n0}) d\phi^0 \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &\quad + \frac{1}{2} n^0 \nabla_0 \nabla_k F_{mn} d\phi^k \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &= n^0 \left( \frac{1}{2} \nabla_0 \nabla_0 F_{mn} - \nabla_0 \nabla_m F_{0n} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &\quad + \frac{1}{2} n^0 (\nabla_k \nabla_0 F_{mn} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn}) d\phi^k \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &= n^0 \left( \frac{4\pi}{cg^{00}} \nabla_m j_n + \frac{g^{\mu\nu}}{g^{00}} [\nabla_\mu, \nabla_m] F_{\nu n} - \frac{1}{2} \frac{g^{ij}}{g^{00}} \nabla_i \nabla_j F_{mn} \right. \\ &\quad \left. - \nabla_0 \nabla_m F_{0n} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &\quad + \frac{1}{2} n^0 (\nabla_k \nabla_0 F_{mn} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn}) d\phi^k \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &= \left( n_0 \frac{4\pi}{c} \nabla_m j_n + n_0 g^{\mu\nu} [\nabla_\mu, \nabla_m] F_{\nu n} - n_0 g^{ij} \nabla_i \nabla_m F_{jn} \right. \\ &\quad \left. - n^0 \nabla_0 \nabla_m F_{0n} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &\quad + \frac{1}{2} n^0 (\nabla_k \nabla_0 F_{mn} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn}) d\phi^k \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &= \left( n_0 \frac{4\pi}{c} \nabla_m j_n - n_0 g^{00} \nabla_m \nabla_0 F_{0n} - n_0 g^{ij} \nabla_m \nabla_i F_{jn} \right) d\phi^0 \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &\quad + \frac{1}{2} n^0 (\nabla_k \nabla_0 F_{mn} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn}) d\phi^k \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n \\ &= + \frac{1}{2} n^0 (\nabla_k \nabla_0 F_{mn} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn}) d\phi^k \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß der Rest Null ist, betrachte nun explizit die Komponentenfunktionen vor jedem Basisvektor. Dazu seien  $k, m$  und  $n$  fest aber beliebig

gewählt. Die Komponentenfunktion vor dem Basisvektor  $d\phi^k \wedge d\phi^m \wedge d\phi^n$  ist

$$\begin{aligned}
 & \nabla_k \nabla_0 F_{mn} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn} - \nabla_k \nabla_0 F_{nm} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{nm} \\
 & - \nabla_m \nabla_0 F_{kn} + [\nabla_0, \nabla_m] F_{kn} + \nabla_m \nabla_0 F_{nk} + [\nabla_0, \nabla_m] F_{nk} \\
 & - \nabla_n \nabla_0 F_{mk} + [\nabla_0, \nabla_n] F_{mk} + \nabla_n \nabla_0 F_{km} + [\nabla_0, \nabla_n] F_{km} \\
 & = 2(\nabla_k \nabla_0 F_{mn} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn}) - 2(\nabla_m \nabla_0 F_{kn} + [\nabla_0, \nabla_m] F_{kn}) \\
 & \quad - 2(\nabla_n \nabla_0 F_{mk} + [\nabla_0, \nabla_n] F_{mk}) \\
 & = 2(\nabla_k \nabla_m F_{0n} - \nabla_k \nabla_n F_{0m} + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn}) \\
 & \quad - 2(\nabla_m \nabla_k F_{0n} - \nabla_m \nabla_n F_{0k} + [\nabla_0, \nabla_m] F_{kn}) \\
 & \quad - 2(\nabla_n \nabla_m F_{0k} - \nabla_n \nabla_k F_{0m} + [\nabla_0, \nabla_n] F_{mk}) \\
 & = 2\left([\nabla_k, \nabla_m] F_{0n} + [\nabla_n, \nabla_k] F_{0m} + [\nabla_m, \nabla_n] F_{0k} \right. \\
 & \quad \left. + [\nabla_0, \nabla_k] F_{mn} + [\nabla_0, \nabla_m] F_{nk} + [\nabla_0, \nabla_n] F_{km}\right) \\
 & = 2\left(R_{mk0}^\lambda F_{\lambda n} + R_{mkn}^\lambda F_{0\lambda} + R_{kn0}^\lambda F_{\lambda m} + R_{knm}^\lambda F_{0\lambda} + R_{nm0}^\lambda F_{\lambda k} + R_{nmk}^\lambda F_{0\lambda} \right. \\
 & \quad \left. + R_{k0m}^\lambda F_{\lambda n} + R_{k0n}^\lambda F_{m\lambda} + R_{m0n}^\lambda F_{\lambda k} + R_{m0k}^\lambda F_{n\lambda} + R_{n0k}^\lambda F_{\lambda m} + R_{n0m}^\lambda F_{k\lambda}\right) \\
 & = 2\left((R_{mk0}^\lambda + R_{k0m}^\lambda - R_{m0k}^\lambda) F_{\lambda n} + (R_{kn0}^\lambda - R_{k0n}^\lambda + R_{n0k}^\lambda) F_{\lambda m} \right. \\
 & \quad \left. (R_{nm0}^\lambda + R_{m0n}^\lambda - R_{n0m}^\lambda) F_{\lambda k} + (R_{mkn}^\lambda + R_{nmk}^\lambda + R_{knm}^\lambda) F_{0\lambda}\right) \\
 & = 0,
 \end{aligned}$$

wobei der Faktor  $\frac{1}{2}n^0$  weglassen wurde, da er vor jedem Summanden auftaucht. Weiter wurden Lemma B.4.4 und Lemma B.4.2(iii) verwendet. Es gilt somit also  $\nabla_n dF|_{\Sigma \cap V} = 0$  und da das angepaßte Koordinatensystem beliebig gewählt war und sich ganz  $\Sigma$  von angepaßten Koordinatensystemen überdecken läßt, folgt

$$\nabla_n dF|_{\Sigma} = 0.$$

### 3.3.7 Schritt 6: Schlussfolgerung I

Nach den Ergebnissen aus den Schritten 2, 3 und 5 liegt nun das folgende System von Gleichungen vor:

$$\square dF = d\square F = 0, \quad dF|_{\Sigma} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_n dF|_{\Sigma} = 0.$$

Nach Satz C.5.1 folgt nun, daß

$$dF = 0$$

auf ganz  $M$  ist.

### 3.3.8 Schritt 7: Beweis von $(\nabla_n(-\delta F - \frac{4\pi}{c}j))\Big|_{\Sigma} = 0$

Da  $dF = 0$  und  $\square F = \frac{4\pi}{c}dj$  auf ganz  $M$  gelten, folgt  $-d\delta F = \frac{4\pi}{c}dj$  auf ganz  $M$ , was lokal

$$\begin{aligned} g^{\iota\alpha}\nabla_\mu\nabla_\iota F_{\alpha\nu}d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu &= \frac{4\pi}{c}\nabla_\mu j_\nu d\phi^\mu \wedge d\phi^\nu \\ \implies g^{\iota\alpha}\nabla_0\nabla_\iota F_{\alpha n} - g^{\iota\alpha}\nabla_n\nabla_\iota F_{\alpha 0} &= \frac{4\pi}{c}(\nabla_0 j_n - \nabla_n j_0) \\ \stackrel{(3.3.5)}{\implies} g^{\iota\alpha}\nabla_0\nabla_\iota F_{\alpha n} &= \frac{4\pi}{c}\nabla_0 j_n \end{aligned}$$

bedeutet. Weiter erhält man aus der 4er-Stromerhaltung (2.7.3) lokal

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4\pi}{c}\nabla_\iota j^\iota = \frac{4\pi}{c}g^{\nu\iota}\nabla_\iota j_\nu = \frac{4\pi}{c}g^{00}\nabla_0 j_0 + \frac{4\pi}{c}g^{ni}\nabla_i j_n \\ &\stackrel{(3.3.5)}{=} \frac{4\pi}{c}g^{00}\nabla_0 j_0 + g^{ni}\nabla_i g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha F_{\beta n} \\ &= \frac{4\pi}{c}g^{00}\nabla_0 j_0 + \underbrace{g^{\nu\mu}g^{\alpha\beta}\nabla_\mu\nabla_\alpha F_{\beta\nu}}_{=0, \text{ da } \delta\delta F=0} - g^{00}g^{\alpha\beta}\nabla_0\nabla_\alpha F_{\beta 0} \\ &= \frac{4\pi}{c}g^{00}\nabla_0 j_0 - g^{00}g^{\alpha\beta}\nabla_0\nabla_\alpha F_{\beta 0} \\ \implies \frac{4\pi}{c}\nabla_0 j_0 &= g^{\alpha\beta}\nabla_0\nabla_\alpha F_{\beta 0}. \end{aligned}$$

Mit diesen beiden lokalen Gleichheiten ergibt sich für die kovariante Normalenableitung mit Lemma B.2.6 und Lemma B.7.2:

$$(\nabla_n(-\delta F - \frac{4\pi}{c}j))\Big|_U = (n^0\nabla_0(g^{\iota\mu}\nabla_\iota F_{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c}j_\nu))\Big|_U d\phi^\nu = 0.$$

Da das angepaßte Koordinatensystem beliebig gewählt war und sich  $\Sigma$  durch angepaßte Koordinatensysteme überdecken läßt, folgt also

$$(\nabla_n(-\delta F - \frac{4\pi}{c}j))\Big|_{\Sigma} = 0.$$

### 3.3.9 Schritt 8: Schlussfolgerung II

Mit den Schritten 2, 4 und 7 wurde gezeigt, daß das folgende System von Gleichungen erfüllt ist:

$$\square(-\delta F - \frac{4\pi}{c}j) = 0, \quad (-\delta F - \frac{4\pi}{c}j)\Big|_{\Sigma} = 0 \quad \text{und} \quad (\nabla_n(-\delta F - \frac{4\pi}{c}j))\Big|_{\Sigma} = 0.$$

Nach Satz C.5.1 folgt hieraus

$$-\delta F = \frac{4\pi}{c}j$$

auf ganz  $M$ , womit der Beweis von Satz 3.2 abgeschlossen ist. □

## 3.4 Fundamentallösung

$F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  löst  $dF = 0$  und  $-\delta F = 0$  mit kompakt getragenen Cauchydaten auf  $\Sigma$  genau dann, wenn

$$F = G(\delta\alpha + d\beta)$$

gilt, wobei  $\alpha \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}), \beta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  mit  $d\alpha = 0$  und  $\delta\beta = 0$  sind.

**Beweis:** „ $\implies$ “: Sei  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  eine Lösung der quellenfreien Maxwellgleichungen mit auf  $\Sigma$  kompakt getragenen Cauchydaten. Dann erfüllt  $F$  auch die homogene Wellengleichung mit kompakt getragenen Cauchydaten und nach Folgerung C.6.4 existiert ein  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit

$$F = G\omega.$$

Für dieses  $\omega$  gilt wegen der Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} dG\omega &= Gd\omega = 0, \\ \delta G\omega &= G\delta\omega = 0. \end{aligned}$$

Nach Lemma C.6.5 existieren also  $\alpha, \beta \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit

$$\begin{aligned} d\omega = \square\alpha &\implies 0 = dd\omega = d\square\alpha = \square d\alpha \implies 0 = G_{\pm}0 = G_{\pm}\square d\alpha = d\alpha, \\ \delta\omega = \square\beta &\implies 0 = \delta\delta\omega = \delta\square\beta = \square\delta\beta \implies 0 = G_{\pm}0 = G_{\pm}\square\delta\beta = \delta\beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \square\omega &= -d\delta\omega - \delta d\omega = -d\square\beta - \delta\square\alpha = -\square d\beta - \square\delta\alpha \\ \implies \omega &= G_{\pm}\square\omega = -\delta\alpha - d\beta. \end{aligned}$$

„ $\impliedby$ “: Klar nach den Sätzen C.6.1 und C.5.5. □

### 3.5 Zur Feldalgebra des Feldstärketensors I

An dieser Stelle würden wir gerne im Sinne der AQFT die Feldalgebra  $\mathfrak{F}(M)$  des quellenfreien Feldstärketensors definieren als die  $*$ -Algebra mit Eins, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\mathfrak{F}(M)$  wird erzeugt von den Symbolen der Gestalt  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$ , und der Eins  $1_{\mathfrak{F}(M)}$ .
- $\widehat{\mathbf{F}}$  erfüllt die quellenfreien Maxwellgleichungen  $dF = 0$  und  $-\delta F = 0$  im Sinne von Distributionen, d.h.

$$\begin{aligned} -\delta\widehat{\mathbf{F}}(\theta) &:= \widehat{\mathbf{F}}(-d\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \\ d\widehat{\mathbf{F}}(\eta) &:= \widehat{\mathbf{F}}(\delta\eta) = 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

- $\widehat{\mathbf{F}}(z_1\omega_1 + z_2\omega_2) = z_1\widehat{\mathbf{F}}(\omega_1) + z_2\widehat{\mathbf{F}}(\omega_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  ( $\mathbb{C}$ -Linearität).
- $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)^* = \widehat{\mathbf{F}}(\bar{\omega}) \quad \forall \omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  (Hermitizität).
- Kommutatorrelation.

Wir stellen aber fest, daß uns an dieser Stelle für eine vollständige Angabe der Feldstärkealgebra eine sehr wichtige Zutat fehlt, die Kommutatorrelation. Wir könnten zwar einfach eine Kommutatorrelation annehmen, z.B. den Lichnerowiczkommutator (4.4.1) wie es in [AS80] getan wird, wollen aber einen Schritt darüber hinaus gehen und sogar explizit beweisen, daß der zu wählende Kommutator wirklich der Lichnerowiczkommutator ist. Dazu werden wir in Kapitel 6 die Feldalgebra des Feldstärketensors als universelle Algebra eines Systems lokaler Feldalgebren des Feldstärketensors realisieren.

Mit dem Mangel, keine genauere Information über den Kommutator zu haben, konstruieren wir vorerst die gewünschte Feldalgebra des Feldstärketensors  $\mathfrak{F}(M)$  mit einer provisorischen Kommutatorrelation aus der freien  $*$ -Algebra  $\mathcal{F}(M)$  mit Eins über  $\mathbb{C}$ , die von den Symbolen der Gestalt  $1_{\mathcal{F}(M)}, \widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega)^*$ , wobei  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  ist, erzeugt wird. Diese Elemente haben an dieser Stelle nur eine symbolische Bedeutung, sie sind als rein abstrakte Elemente einer Algebra anzusehen. Man nimmt nun den Quotienten



über das  $*$ -Ideal  $\mathcal{I}$ , das von den Elementen aus  $\mathcal{F}(M)$  der Gestalt

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbf{F}}(-d\theta), \quad \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \\ & \widehat{\mathbf{F}}(\delta\eta), \quad \eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}), \\ & \widehat{\mathbf{F}}(z_1\omega_1 + z_2\omega_2) - z_1\widehat{\mathbf{F}}(\omega_1) - z_2\widehat{\mathbf{F}}(\omega_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \omega_1, \omega_2 \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}), \\ & \widehat{\mathbf{F}}(\omega)^* - \widehat{\mathbf{F}}(\bar{\omega}), \quad \omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}), \\ & \left[ \widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega') \right] - i\hbar b(\omega, \omega') 1_{\mathcal{F}(M)}, \quad \omega, \omega' \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

erzeugt wird, also  $\mathfrak{F}(M) = \mathcal{F}(M)/\mathcal{I}$ .  $b(\cdot, \cdot)$  ist hierbei eine antisymmetrische  $\mathbb{C}$ -Bilinearform, die als provisorischer Kommutator fungieren soll.

### Feldstärkealgebra aus der Borchers-Uhlmann Algebra

Viel konkreter realisiert man  $\mathfrak{F}(M)$  mit Hilfe der Borchers-Uhlmann Algebra, der freien Tensoralgebra über den Raum der kompakt getragenen 2-Formen

$$T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C})) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})^{\oplus n}.$$

Es wird dabei  $\Omega_{2c}(M, \mathbb{C})^{\otimes 0} = \mathbb{C}$  vereinbart. Mit Hilfe des Isomorphismus  $\Omega_{2c}(M, \mathbb{C})^{\otimes k} \otimes \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})^{\otimes l} \cong \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})^{\otimes (k+l)}$  wird die Multiplikation definiert. Ein allgemeines Element ist eine endliche Summe von den Produkten

$$\left( z_0, \overset{\infty}{\mathbf{a}}_{i=1} (z_i \overset{i}{\otimes}_{j=1} \omega_{ij}) \right) = (z_0, z_1 \omega_{11}, z_2 \omega_{21} \otimes \omega_{22}, z_3 \omega_{31} \otimes \omega_{32} \otimes \omega_{33}, \dots),$$

wobei nur endlich viele der  $z_i \in \mathbb{C}$  nicht Null sind.  $\overset{\infty}{\mathbf{a}}_{i=1}$  benutzen wir als Schreibweise für die geordnete Aufzählung, also  $\overset{\infty}{\mathbf{a}}_{i=1} v_i := v_1, v_2, v_3, \dots$ . Die Eins wird durch das Element

$$1_{T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C}))} = (1, 0, \dots)$$

gegeben. Weiter wird eine Involution definiert durch

$$\begin{aligned} * : T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C})) & \longrightarrow T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C})) \\ \left( z_0, \overset{\infty}{\mathbf{a}}_{i=1} (z_i \overset{i}{\otimes}_{j=1} \omega_{ij}) \right) & \longmapsto \left( \bar{z}_0, \overset{\infty}{\mathbf{a}}_{i=1} (\bar{z}_i \overset{1}{\otimes}_{j=i} \bar{\omega}_{ij}) \right), \end{aligned}$$

nur endlich viele der  $z_i \in \mathbb{C}$  sind nicht Null. Dadurch wird die Borchers-Uhlmann Algebra zu einer  $*$ -Algebra mit Eins.

Die Borchers-Uhlmann Algebra enthält aber noch nicht die Informationen über die Dynamik des zugrunde liegenden Feldes, nämlich die Maxwellgleichungen. Um dies zu erreichen, teilt man aus  $T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C}))$  das \*-Ideal  $I$  heraus, das von den Elementen der Gestalt

$$a \otimes b \otimes c, \quad a, c \in T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C}))$$

erzeugt wird, wobei  $b$  von einer der drei Gestalten ist:

$$b = -d\theta, \quad \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}),$$

$$b = \delta\eta, \quad \eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}),$$

$$b = \omega \otimes \omega' - \omega' \otimes \omega - i \hbar b(\omega, \omega') 1_{T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C}))}, \quad \omega, \omega' \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}).$$

$T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C}))/I$  ist nicht die Nullalgebra, denn z.B. liegen  $1_{T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C}))}$  und alle  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $0 \neq \omega \neq -\delta\eta$  für  $\eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C})$  und  $\omega \neq d\theta$  für  $\theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  nicht in  $I$ , da

$$(1, 0, 0, \dots) \neq (0, \delta\eta, 0, \dots), \quad \eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}),$$

$$(1, 0, 0, \dots) \neq (0, -d\theta, 0, \dots), \quad \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}),$$

$$(1, 0, 0, 0, \dots) \neq (-i \hbar b(\omega', \tilde{\omega}), 0, \omega' \otimes \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \otimes \omega', 0, \dots), \quad \omega', \tilde{\omega} \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}),$$

$$(0, \omega, 0, \dots) \neq (0, \delta\eta, 0, \dots), \quad \eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}),$$

$$(0, \omega, 0, \dots) \neq (0, -d\theta, 0, \dots), \quad \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}),$$

$$(0, \omega, 0, 0, \dots) \neq (-i \hbar b(\omega', \tilde{\omega}), 0, \omega' \otimes \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \otimes \omega', 0, \dots), \quad \omega', \tilde{\omega} \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$$

(gilt  $\omega' \otimes \tilde{\omega} = \tilde{\omega} \otimes \omega'$ , so folgt schon  $\tilde{\omega} = \mu \cdot \omega'$  mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes und damit ist dann auch  $b(\omega', \tilde{\omega})$  wegen der Antisymmetrie Null).

Hiermit haben wir explizit die Feldstärkealgebra konstruiert, denn der Quotientenraum  $T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C}))/I$  erfüllt alle Eigenschaften der Feldalgebra  $\mathfrak{F}(M)$  des Feldstärketensors und ist daher zu dieser isomorph. Genauer entspricht ein Element

$$\left( z_0, \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a} \left( z_i \otimes_{j=1}^i \omega_{ij} \right) \right), \quad z_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i,$$

aus  $T(\Omega_{2c}(M, \mathbb{C}))/I$  dem Element

$$z_0 + z_1 \widehat{\mathbf{F}}(\omega_{11}) + z_2 \widehat{\mathbf{F}}(\omega_{21}) \widehat{\mathbf{F}}(\omega_{22}) + z_3 \widehat{\mathbf{F}}(\omega_{31}) \widehat{\mathbf{F}}(\omega_{32}) \widehat{\mathbf{F}}(\omega_{33}) + \dots$$

aus  $\mathfrak{F}(M)$  (nur endlich viele der  $z_i$  sind nicht Null), wobei wir in der Notation nicht streng zwischen den Äquivalenzklassen und ihren Repräsentanten unterschieden haben.

Um eine Idee für die genaue Gestalt des Kommutators zu bekommen, wenden wir uns nun der Quantisierung des elektromagnetischen Vektorpotentials zu.

# Kapitel 4

## Die Quantisierung des Vektorpotentials

In diesem Kapitel stellen wir das Cauchyproblem und die Quantisierung des quellenfreien elektromagnetischen Potentials auf gekrümmten Raumzeiten vor, wie sie in [Dim92] und [Pfe09] behandelt werden. Die hier angegebenen Ergebnisse sind zu einem großen Teil aus diesen beiden Arbeiten zitiert, eventuell in leicht abgewandelter Form. Die Gültigkeit der Sätze bleibt aber in jedem Fall erhalten. Die Behandlung des Cauchyproblems ist etwas allgemeiner für beliebige Dimensionen  $m$  der global hyperbolischen Raumzeit  $(M, g)$  und für beliebige  $p$ -Formen in  $\Omega_p(M, \mathbb{C})$  gehalten. Der gewünschte Fall des Vektorpotentials des Elektromagnetismus ergibt sich dann für den Spezialfall  $m = 4$  und  $p = 1$ .

Weitere Arbeiten, die einen ähnlichen Zugang zu der Quantisierung des elektromagnetischen Vektorpotentials wählen, sind [Fur95], [Fur99], [FP03] und [JL]. Eine Quantisierung, deren Schwerpunkt auf einer  $\mathcal{C}^*$ -Formulierung liegt, kann in [CGH77] und [GH85] gefunden werden. Für eine Quantisierung mit der Borchers-Uhlmann Algebra siehe die sehr empfehlenswerten Arbeiten [Bon77] und [Bon82].

Wir werden in diesem Kapitel die Behandlung des Cauchyproblems und die Quantisierung des Potentials mit *nicht* kompakten Cauchyhyperflächen durchführen, und der Fokus wird dabei auf der algebraischen Quantisierung liegen. Für eine explizite Fockraumquantisierung verweisen wir auf [Pfe09, A], [SW74] und vor allem auf die wunderbare Arbeit [Cor98] hierzu.

Solange nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, sei für dieses Kapitel  $(M, g)$  eine orientierte global hyperbolische Raumzeit und  $\iota : \Sigma \rightarrow M$  eine *nicht* notwendigerweise kompakte, raumartige, glatte Cauchyhyperfläche, auf der die Anfangswerte vorgegeben werden sollen. Die Wahl einer solchen Cauchyhyperfläche ist wegen  $(M, g)$  global hyperbolisch und [BS03] möglich.

Weiter sei  $\Sigma$  mit der vom zeitartigen und zukunftsgerichteten Normalenvektorfeld  $\mathbf{n}$  induzierten Orientierung versehen. Da  $(M, g)$  global hyperbolisch und  $\square = -\delta d - d\delta$  normal hyperbolisch ist (siehe Satz B.8.5), existieren nach Satz C.5.5 der avancierte und retardierte Greensche Operator  $G_+$  bzw.  $G_-$  des Wellenoperators für Differentialformen. Der Propagator von  $\square$  wird mit  $G = G_+ - G_-$  bezeichnet.

In diesem Kapitel werden wir bereits Begriffe und Resultate aus dem nächsten Kapitel, Kapitel 5, verwenden. Dies sollte aber keinesfalls als didaktische Inkonsistenz gedeutet werden, sondern viel mehr als Aperitif. Wie sich im Verlauf dieses Kapitels und dieser Arbeit im Allgemeinen zeigen wird, ist es sehr lohnenswert, sich mit der de Rham'schen Kohomologie und der singulären Homologie auseinanderzusetzen. Für die Bedeutung der Begriffe geschlossen, exakt, kgeschlossen, koexakt siehe Unterabschnitt A.5.6 und Abschnitt B.7.

## 4.1 Das Cauchyproblem des Vektorpotentials

Wir ignorieren vorerst die Tatsache, daß es nicht exakte Feldstärketensoren geben kann und konzentrieren uns auf das Vektorpotential als das zu betrachtende Feld. In der Praxis wird die Maxwellgleichung

$$-\delta dA = 0$$

des quellenfreien Vektorpotentials  $A \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$  nicht direkt gelöst, sondern die Wellengleichung

$$\square A = -(\delta d + d\delta)A$$

mit der Zusatzbedingung

$$\delta A = 0.$$

Aus diesem Grund und wegen der verwendeten Notationen empfehlen wir dem Leser, sich mit dem Abschnitt C.6 aus dem Anhang vertraut zu machen. Für die Aussagen dieses Abschnittes ist die Topologie von  $M$  unerheblich. Insbesondere können die 1-te und die 2-te de Rham-Kohomologiegruppe von  $M$ ,  $H_{dR}^1 M$  und  $H_{dR}^2 M$ , siehe für eine genaue Definition Kapitel 5, beliebig sein. Die Beweise der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage sind in [Dim92, Prop.2], [Pfe09, Prop.II.10], [Dim92, Prop.3] und [Pfe09, Prop.II.13] zu finden. Für den Satz über die Fundamentallösung verweisen wir auf [Dim92, Prop.4] und [Pfe09, Prop.II.14]. Wo es nötig war, haben wir die Beweise modifiziert, damit sie auch für unsere Voraussetzungen gelten.

### 4.1.1 Satz (Existenz)

Zu jedem Paar  $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_d) \in \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C})$  mit  $\delta\mathcal{A}_d = 0$  existiert ein  $A \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$ , sodaß

$$\begin{aligned} -\delta dA &= 0, \\ \rho_0 A &= \mathcal{A}_0, \\ \rho_d A &= \mathcal{A}_d \end{aligned}$$

gelten.

Als Abkürzung haben wir  $\rho_0 A := \iota^{pb} A$  und  $\rho_d A := *^{-1} \iota^{pb} * dA$  verwendet. Der Beweis verläuft so, daß man sich zwei zusätzlichen Einschränkungen unterwirft und immer noch eine Lösung findet. Diese beiden Einschränkungen beziehen sich auf  $\rho_n A := *^{-1} \iota^{pb} * A$  und  $\rho_\delta A := \iota^{pb} \delta A$ , und sind so gewählt, daß das Lösen von  $-\delta dA = 0$  auf das Lösen der homogenen Wellengleichung  $\square A = 0$  mit Lorenzbeziehung  $\delta A = 0$  zurückgeführt werden kann. Der Beweis zeigt also insbesondere, daß immer eine *Lorenzlösung*, d.h. eine kogeschlossene Lösung existiert. Dies soll aber nicht heißen, daß es nur Lorenzlösungen gibt.

### 4.1.2 Satz (Eindeutigkeit)

Seien durch  $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_d, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_\delta)$  und  $(\mathcal{A}'_0, \mathcal{A}'_d, \mathcal{A}'_n, \mathcal{A}'_\delta)$  mit  $\delta\mathcal{A}_d = 0 = \delta\mathcal{A}'_d$  Anfangsdaten aus  $\Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{(p-1)c}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{(p-1)c}(\Sigma, \mathbb{C})$  gegeben. Sind  $A, A'$  Lösungen zu  $-\delta dA = 0$  mit diesen Cauchydaten, dann gilt

$$A \sim A' \iff \mathcal{A}_0 \sim \mathcal{A}'_0 \text{ und } \mathcal{A}_d = \mathcal{A}'_d.$$

In diesem Satz ist mit „ $\sim$ “ die Eichäquivalenz für p-Formen über geschlossene p-Formen gemeint:

$$\begin{aligned} A \sim A' &:\iff \exists \Lambda \in \Omega_p(M, \mathbb{C}), d\Lambda = 0, \text{ mit } A' = A + \Lambda, \\ \mathcal{A} \sim \mathcal{A}' &:\iff \exists \lambda \in \Omega_p(\Sigma, \mathbb{C}), d\lambda = 0, \text{ mit } \mathcal{A}' = \mathcal{A} + \lambda. \end{aligned}$$

**Beweis:** „ $\implies$ “: Gelte  $A \sim A'$ , dann ist  $\mathcal{A}_0 \sim \mathcal{A}'_0$  und  $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}'_d$  eine direkte Folgerung.

„ $\impliedby$ “: Sei  $\mathcal{A}_0 \sim \mathcal{A}'_0$  und  $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}'_d$ . Wir zeigen zuerst, daß eine Lösung  $A$  der Maxwellgleichungen eichäquivalent zu einer *Coulomblösung* ist, d.h.

einer Lorenzlösung  $A_C$  mit Cauchydaten  $\rho_n A_C = \rho_\delta A_C = 0$ . Sei nämlich  $\Lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C})$  eine Lösung von

$$-\delta d\Lambda = \square\Lambda = -\delta A.$$

Solch eine Lösung existiert, denn sei z.B.  $\Sigma_Z$  eine Cauchyhyperfläche in der Zukunft von  $\Sigma$  und  $\Sigma_V$  eine in der Vergangenheit von  $\Sigma$ . Wähle eine Zerlegung der Eins  $\chi^+, \chi^-$  zu  $I_+^M(\Sigma_V)$  und  $I_-^M(\Sigma_Z)$ , dann ist  $-\delta A_+ := -\chi^+ \delta A$  vergangenheitskompakt und  $-\delta A_- := -\chi^- \delta A$  zukunfts-kompakt nach [BGP07, Cor. A.5.4].  $\Lambda$  kann nun definiert werden als

$$\Lambda := -G_+ \delta A_+ - G_- \delta A_-.$$

Es folgt nun, daß  $A_L := A + d\Lambda$  eine Lorenzlösung ist, z.B. mit den Cauchydaten  $(\mathcal{A}, \Pi, \mathcal{A}_n, 0)$ . Sei nun weiter  $A_G$  eine geschlossene Lösung wie in Lemma C.6.6 mit  $\rho_n A_G = -\mathcal{A}_n$  und  $\rho_\delta A_G = 0$ , dann ist  $A_C := A_L + A_G$  eine Coulombblösung zu der  $A$  eichäquivalent ist. Wir haben also  $A \sim A_C$  und  $A' \sim A'_C$ .  $A_C - A'_C$  ist nun wegen  $\mathcal{A}_0 \sim \mathcal{A}'_0$  und  $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}'_d$  nach Lemma C.6.6 geschlossen und daher gilt

$$A \sim A_C = A'_C + (A_C - A'_C) \sim A'_C \sim A'.$$

□

### 4.1.3 Satz (Fundamentallösung)

- (a) Sei  $\theta \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$  mit zukunfts-/vergangenheitskompakten Träger und  $\delta\theta = 0$ , dann löst  $A = G_- \theta$  bzw.  $A = G_+ \theta$  die Gleichung  $-\delta dA = \theta$ .
- (b) Hat  $A \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$  zukunfts-/vergangenheitskompakten Träger und ist Lösung von  $-\delta dA = \theta$  (somit ist  $\delta\theta = 0$  und  $\text{supp}(\theta)$  zukunfts-/vergangenheitskompakt) dann gilt  $A \sim G_- \theta$  bzw.  $A \sim G_+ \theta$ .
- (c)  $A \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$  ist eine Lösung  $-\delta dA = 0$  mit auf  $\Sigma$  kompakt getragenen Cauchydaten genau dann, wenn  $A \sim G\theta$  für ein  $\theta \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$  mit  $\delta\theta = 0$  ist.

Im Gegensatz zu (a) und (b) weicht die Formulierung von (c) von [Dim92, Prop.4] und [Pfe09, Prop.II.14] ab. In diesen wird für die Gültigkeit von (c) die Existenz einer kompakten Cauchyhyperfläche verlangt. Die Existenz einer solchen ist dort wichtig, denn sie garantiert die Existenz der zwei Funktionen  $\chi^\pm$  im Beweis von [Dim92, Prop.4]. Wir möchten nun zeigen, daß wenn

man mit nicht kompakten Cauchyhyperflächen arbeitet, die Aussage (c) für Lösungen mit kompakt getragenen Cauchydaten gerettet werden kann:

**Beweis:** „ $\Leftarrow$ “: Sei  $\theta \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$  mit  $\delta\theta = 0$ , dann löst  $A := G\theta$  die Gleichung  $-\delta dA = -\delta dG\theta = (\square + d\delta)G\theta = dG\delta\theta = 0$ , hat auf  $\Sigma$  kompakten Träger und es gilt  $\delta\rho_d(G\theta) = 0$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $A \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$  mit  $-\delta dA = 0$  und kompakt getragenen Cauchydaten  $(A_0, A_d) \in \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{(p-1)c}(\Sigma, \mathbb{C})$ ,  $\delta A_d = 0$ . Nach Satz 4.1.1 gibt es eine Lorenzlösung  $A'$  zu den Cauchydaten  $(A_0, A_d) \in \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{(p-1)c}(\Sigma, \mathbb{C})$ , d.h. nach Satz 4.1.2 ist  $A' \sim A$ . Zeige nun, daß  $A' \sim G\theta$  für ein  $\theta \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$  mit  $\delta\theta = 0$  ist. Der Schlüssel dieses Beweises ist die Konstruktion zweier Funktionen  $\chi^+$  und  $\chi^-$  wie in [Dim92, Prop.4]. Sind diese erstmal konstruiert, so kann der Rest von dem dort angegebenen Beweis übernommen werden.

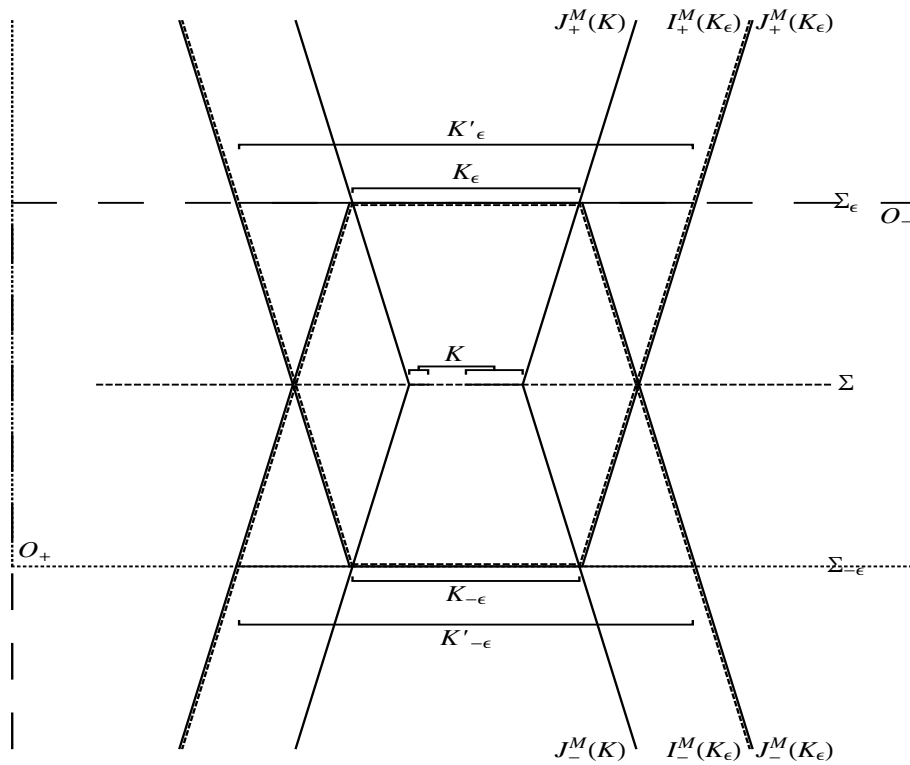


Abb.: Zum Beweis vom Satz über die Fundamentallösung (c).

Da  $\square A' = 0$  erfüllt wird, ist  $A'$  nach Folgerung C.6.4 auf jeder Cauchyhyperfläche kompakt getragen. Sei  $K := \text{supp}(A_0) \cup \text{supp}(A_n) \cup \text{supp}(A'_d)$ , dann ist  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $\Sigma$  und  $T$  eine Cauchytemporalfunktion mit  $T^{-1}(0) = \Sigma$ , die nach Satz C.3.7 auch existiert. Wähle mit  $\Sigma_\epsilon = T^{-1}(\epsilon)$  und

$\Sigma_{-\varepsilon} = T^{-1}(-\varepsilon)$  jeweils eine raumartige, glatte Cauchyhyperfläche in der Zukunft und in der Vergangenheit von  $\Sigma$  aus. Definiere  $K_\varepsilon := \Sigma_\varepsilon \cap J_+^M(K)$  und  $K_{-\varepsilon} := \Sigma_{-\varepsilon} \cap J_-^M(K)$ . Diese Mengen sind kompakt nach [BGP07, Cor.A.5.4] und enthalten die Träger der Cauchydaten von  $A'$  auf den entsprechenden Cauchyhyperflächen  $\Sigma_\varepsilon, \Sigma_{-\varepsilon}$ .  $K \subset I_-^M(K_\varepsilon)$ , denn nach entsprechender Anwendung der zu  $T$  zugehörigen Isometrie, siehe wieder Satz C.3.7, ist  $\forall \sigma \in K$  mit  $c(t) = (\varepsilon t, \sigma)$  eine glatte, zeitartige und zukunftsgerichtete Kurve nach  $K_\varepsilon$  gefunden. Durch Umparametrisierung erhält man eine vergangenheitsgerichtete Kurve, also  $K \subset I_-^M(K_\varepsilon)$ . Da aus  $x \leq y \ll z$  die Relation  $x \ll z$  folgt, siehe [O'N83, Cor.14.1], ist  $J_-^M(K) \subset I_-^M(K_\varepsilon)$ . Völlig analog zeigt man weiter  $J_+^M(K) \subset I_+^M(K_{-\varepsilon})$ . Es gilt daher  $\text{supp}(A') \subset J^M(K) \subset I_+^M(K_{-\varepsilon}) \cup I_-^M(K_\varepsilon)$ .

Bezeichne  $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  die glatte Abschneidefunktion mit  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi|_{\text{supp}(A')} \equiv 1$  und  $\text{supp}(\psi) \subset I_+^M(K_{-\varepsilon}) \cup I_-^M(K_\varepsilon)$ . Nach Folgerung A.1.2 existiert so ein  $\psi$ . Definiere nun eine offene Überdeckung von  $M$  mittels  $O_+ := T^{-1}((-\varepsilon, \infty) \times \Sigma)$ ,  $O_- := T^{-1}((-\infty, \varepsilon) \times \Sigma)$  und sei  $(\tilde{\chi}^+, \tilde{\chi}^-)$  die Zerlegung der Eins zu  $(O_+, O_-)$ . Siehe Satz A.1.1 für die Existenz.

Definiere nun  $\chi^+ := \psi \tilde{\chi}^+$  und  $\chi^- := \psi \tilde{\chi}^-$ . Diese sind auf der ganzen Mannigfaltigkeit wohldefinierte, glatte Funktionen. Sei  $K'_{-\varepsilon} := J_-^M(K_\varepsilon) \cap \Sigma_{-\varepsilon}$  und  $K'_\varepsilon := J_+^M(K_{-\varepsilon}) \cap \Sigma_\varepsilon$ . Diese beiden Mengen sind wieder kompakt und da  $K_{-\varepsilon} \subset J_-^M(K)$ ,  $K \subset J_-^M(K_\varepsilon)$  bzw.  $K_\varepsilon \subset J_+^M(K)$ ,  $K \subset J_+^M(K_{-\varepsilon})$  und die Kausalitätsrelationen transitiv sind, gelten  $K'_{-\varepsilon} \supset K_{-\varepsilon}$  und  $K'_\varepsilon \supset K_\varepsilon$ . Somit folgt nach Konstruktion von  $K'_\varepsilon$  und  $K'_{-\varepsilon}$  für die Träger von  $\chi^+$  und  $\chi^-$

$$\begin{aligned} \text{supp}(\chi^+) &\subset (I_+^M(K_{-\varepsilon}) \cup I_-^M(K_\varepsilon)) \cap O_+ \subset J_+^M(K'_{-\varepsilon}), \\ \text{supp}(\chi^-) &\subset (I_+^M(K_{-\varepsilon}) \cup I_-^M(K_\varepsilon)) \cap O_- \subset J_-^M(K'_\varepsilon). \end{aligned}$$

$\chi^+$  und  $\chi^-$  erfüllen daher

$$\begin{aligned} \chi^+ + \chi^- \Big|_{\text{supp}(A')} &\equiv 1, \\ \text{supp}(\chi^+) \cap \text{supp}(\chi^-) &\subset J_+^M(K'_{-\varepsilon}) \cap J_-^M(K'_\varepsilon), \\ \text{supp}(\chi^+) \cap J_-^M(p) &\subset J_+^M(K'_{-\varepsilon}) \cap J_-^M(p) \quad \forall p \in M, \\ \text{supp}(\chi^-) \cap J_+^M(p) &\subset J_-^M(K'_\varepsilon) \cap J_+^M(p) \quad \forall p \in M. \end{aligned}$$

Somit ist also  $\text{supp}(\chi^+) \cap \text{supp}(\chi^-)$  kompakt,  $\text{supp}(\chi^-)$  zukunfts-kompakt und  $\text{supp}(\chi^+)$  vergangenheits-kompakt nach [BGP07, Lem.A.5.7].  $\square$

## 4.2 Klassische Phasenräume

Die Voraussetzung für die Quantisierung einer Theorie ist ein geeigneter Phasenraum, auf welchem die Observablen (=lineare Funktionale auf dem Pha-



senraum) gebildet und später bei der Quantisierung Operatoren eines Hilbertraumes nach dem Korrespondenzprinzip zugeordnet werden. In diesem Abschnitt stellen wir drei Phasenräume vor, mit denen die Quantisierung durchgeführt werden kann. Da diese drei Phasenräume paarweise symplektisch isomorph zueinander sind, führen sie alle auf dieselbe Quantentheorie.

Wir nehmen ab jetzt explizit den physikalisch interessantesten Fall  $m = 4$  und  $p = 1$  an. Wir nehmen aber keine Einschränkung an die Topologie von  $(M, g)$  vor, insbesondere können wieder  $H_{dR}^1 M$  und  $H_{dR}^2 M$ , siehe für eine genaue Definition Kapitel 5, beliebig sein.

### 4.2.1 Der Phasenraum der Cauchydaten

Die Menge der Cauchydaten aus Satz 4.1.1,

$$\mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})} := \left\{ (\mathcal{A}, \Pi) \in \Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C}) \mid \delta\Pi = 0 \right\},$$

bildet einen komplexen und damit auch reellen Vektorraum. Durch

$$s_{\Sigma}((\mathcal{A}, \Pi), (\mathcal{A}', \Pi')) := \int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge * \Pi' - \mathcal{A}' \wedge * \Pi$$

wird eine antisymmetrische Paarung definiert. Diese antisymmetrische Paarung fällt natürlich nicht vom Himmel, sondern kann als Verallgemeinerung des von der Lagrangeschen Formulierung der Maxwelltheorie abgeleiteten symplektischen Produktes gewonnen werden. Siehe hierzu [Wal94], [LW90] oder auch [Cor98].  $s_{\Sigma}$  ist aber ausgeartet, denn z.B. gilt für  $(\mathcal{A}, 0)$ , wobei  $\mathcal{A}$  exakt mit  $\mathcal{A} = d\mathcal{B}$  ist,

$$s_{\Sigma}((\mathcal{A}, 0), (\mathcal{A}', \Pi')) = \int_{\Sigma} d\mathcal{B} \wedge * \Pi' = \int_{\Sigma} \mathcal{B} \wedge * \delta\Pi' = 0 \quad \forall (\mathcal{A}', \Pi') \in \mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})}.$$

Wir versuchen nun diese Entartung aufzuheben. Angenommen, es gibt ein  $(\mathcal{A}, \Pi) \in \mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})}$  mit  $s_{\Sigma}((\mathcal{A}, \Pi), (\mathcal{A}', \Pi')) = 0$  für alle  $(\mathcal{A}', \Pi') \in \mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})}$ , dann muß für alle  $(\mathcal{A}', \Pi') = (\mathcal{A}', 0) \in \mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})}$

$$s_{\Sigma}((\mathcal{A}, \Pi), (\mathcal{A}', 0)) = \int_{\Sigma} -\mathcal{A}' \wedge * \Pi = \int_{\Sigma} -\Pi \wedge * \mathcal{A}' = 0$$

gelten. Wegen der Nichtausgeartetheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma}$  nach Abschnitt B.9.3 folgt

$$\Pi = 0 \iff \int_{\Sigma} \Pi \wedge * \mathcal{A}' = 0 \quad \forall \mathcal{A}' \in \Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C}).$$

Betrachte nun weiter solche  $(\mathcal{A}', \Pi') = (0, \delta V')$   $\in \mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})}$ , bei denen also  $\Pi'$  koexakt mit  $\Pi' = \delta \mathcal{V}'$  ist,  $\mathcal{V}' \in \Omega_{2c}(\Sigma, \mathbb{C})$ . Für solche muß gelten:

$$s_{\Sigma}((\mathcal{A}, \Pi), (0, \Pi')) = \int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge * \delta \mathcal{V}' = \int_{\Sigma} d\mathcal{A} \wedge * \mathcal{V}' = 0 \quad \forall \mathcal{V}' \in \Omega_{2c}(\Sigma, \mathbb{C}).$$

Wegen der Nichtausgeartetheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma}$  nach Abschnitt B.9.3 folgt  $d\mathcal{A} = 0$ , also muß  $\mathcal{A}$  geschlossen sein. Sei nun  $(0, \Pi') \in \mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})}$ . Wegen  $\delta \Pi' = 0$  gilt  $d * \Pi' = 0$ ,  $*\Pi'$  ist also eine geschlossene und kompakt getragene 2-Form. Nach der Poincarédualität 5.1.2 folgt nun, daß  $\mathcal{A}$  exakt sein muß, da

$$s_{\Sigma}((\mathcal{A}, \Pi), (0, \Pi')) = \int_{\Sigma} \mathcal{A} \wedge (*\Pi') \quad \forall (*\Pi') \in H_{dR,c}^2 \Sigma$$

gilt. Wir halten fest: Gilt  $s_{\Sigma}((\mathcal{A}, \Pi), (\mathcal{A}', \Pi')) = 0$  für alle  $(\mathcal{A}', \Pi') \in \mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})}$ , dann folgt  $\mathcal{A} = d\mathcal{B}$  für ein  $\mathcal{B} \in \Omega_0(M, \mathbb{C})$  und  $\Pi \equiv 0$ . Die Entartung kann demnach aufgehoben werden, wenn man zu Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{A}' : \iff \exists \lambda \in \Omega_0(\Sigma, \mathbb{C}) \text{ mit } \mathcal{A} = \mathcal{A}' + d\lambda$$

übergeht. Für  $H_{dR}^1 M = 0$  stimmt diese Äquivalenzrelation mit der in Satz 4.1.1 und Satz 4.1.3 verwendeten überein. Man erhält insgesamt

$$\begin{aligned} \mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})} / \sim &:= \left\{ ([\mathcal{A}], \Pi) \in (\Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C}) / \sim) \times \Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C}) \mid \delta \Pi = 0 \right\}, \\ s_{\Sigma}([\mathcal{A}], \Pi), ([\mathcal{A}'], \Pi') &= \int_{\Sigma} [\mathcal{A}] \wedge * \Pi' - [\mathcal{A}'] \wedge * \Pi. \end{aligned}$$

### Physikalischer Phasenraum der Cauchydaten

Der physikalische Phasenraum ist nun der reelle Vektorraum

$$\mathcal{CD}_{\Sigma} / \sim := \left\{ ([\mathcal{A}], \Pi) \in (\Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C}) / \sim) \times \Omega_{1c} \Sigma \mid \mathcal{A} \in \Omega_{1c} \Sigma, \delta \Pi = 0 \right\}$$

zusammen mit der alternierenden, bilinearen Abbildung  $s_{\Sigma}$ . Dieses Paar bildet einen symplektischen Vektorraum, da  $s_{\Sigma}$  auf  $\mathcal{CD}_{\Sigma} / \sim$  reellwertig und nach Unterabschnitt B.6.3 nicht ausgeartet ist. Dieser Phasenraum hat aber den großen Nachteil, daß er von der Wahl der Cauchyhyperfläche abhängt. Es ist aus diesem Grund noch keine Zeitentwicklung explizit implementiert.

### 4.2.2 Der Phasenraum der Lösungen

Betrachte nun den Vektorraum  $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}$  der Lösungen des Cauchyproblems 4.1.1. Seien  $A, A' \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}$ , dann bilden  $\mathcal{A} := \rho_0 A$  und  $\Pi := \rho_d A$  sowie  $\mathcal{A}' := \rho_0 A'$  und  $\Pi' := \rho_d A'$  jeweils ein Element aus  $\mathcal{CD}_{(\Sigma, \mathbb{C})}$ . Es wird nun eine antisymmetrische bilineare Paarung mittels

$$s_{\mathbb{L}}(A, A') := s_{\Sigma}((\mathcal{A}, \Pi), (\mathcal{A}', \Pi'))$$

definiert. Die so definierte Paarung ist aber klarerweise ausgeartet, da  $s_{\Sigma}$  ausgeartet ist. Die Entartung verschwindet, wenn man wieder zu den Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation aus dem vorherigen Unterabschnitt übergeht,

$$\begin{aligned} A \sim A' &: \iff A' = A + d\Lambda, \Lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C}), \\ \mathcal{A} \sim \mathcal{A}' &: \iff \mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\lambda, \lambda \in \Omega_0(\Sigma, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Die Frage, die sich dabei stellt, ist, ob sich zwei Lösungen  $A$  und  $A'$  um eine exakte Form unterscheiden, wenn es ihre Cauchydaten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  tun. Die Antwort lautet nach dem Exaktheitskriterium 5.3.8 und Bemerkung 5.3.4 „ja“, da für alle  $z \in H_1^{\infty}(M; \mathbb{R})$

$$\int_z A - A' = \int_{z_{\Sigma}} A - A' = \int_{z_{\Sigma}} \iota^{pb}(A - A') = \int_{z_{\Sigma}} \mathcal{A} - \mathcal{A}' = \int_{z_{\Sigma}} d\lambda = 0$$

gilt, wobei  $\lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C})$  mit  $\mathcal{A} = \mathcal{A}' + d\lambda$  und  $z_{\Sigma} \in H_1^{\infty}(M, \mathbb{R})$  derjenige Zykel ist, der ganz in  $\Sigma$  liegt und homolog zu  $z$  ist.  $A - A'$  ist demnach exakt,  $A$  und  $A'$  unterscheiden sich also um eine exakte 1-Form. Die nicht ausgeartete Paarung ist dann

$$s_{\mathbb{L}}([A], [A']) = s_{\Sigma}([\mathcal{A}], [\mathcal{A}']) = \int_{\Sigma} [\mathcal{A}] \wedge * \Pi' - [\mathcal{A}'] \wedge * \Pi.$$

Da bei einer Lösung aus Satz 4.1.1 die vorgegebenen Cauchydaten  $(A_0, A_d)$  kompakt getragen sind, die entsprechenden Größen auf einer anderen raumartigen glatten Cauchyhyperfläche i.A. aber nicht, ist das Integral für alle komplexwertigen Lösungen zuerst nur auf  $\Sigma$  wohldefiniert. Jede Lösung  $A$  ist aber eichäquivalent zu einer Lorenzlösung  $A_L$ , siehe den Beweis von Satz 4.1.2. Da Lorenzlösungen als Lösungen der Wellengleichung nach Folgerung C.6.4 auf jeder raumartigen glatten Cauchyhyperfläche kompakt getragen werden, gilt

$$\begin{aligned} A \sim A_L &\iff A = A_L + d\Lambda, \Lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C}) \\ &\implies dA = dA_L \\ &\implies \iota_t^{pb} dA = \iota_t^{pb} dA_L. \end{aligned}$$

Die auf eine raumartige glatte Cauchyhyperfläche  $\Sigma_t$  zurückgeholte Differentialform  $\iota_t^{pb} dA$  ist also für jede komplexwertige Lösung kompakt getragen und deswegen nimmt das Integral für jeder solcher Cauchyhyperflächen auch einen wohldefinierten Wert an.

$s_{\mathbb{L}}$  ist weiter unabhängig von der gewählten Cauchyhyperfläche, denn seien  $\iota_1 : \Sigma_1 \rightarrow M$  und  $\iota_2 : \Sigma_2 \rightarrow M$  zwei geeignete raumartige glatte Cauchyhyperflächen in  $(M, g)$ , z.B. zwei, die aus derselben Aufblätterung von  $(M, g)$  mittels einer Cauchytemporalfunktion stammen und sich daher nicht schneiden, dann gilt

$$\begin{aligned}
 & s_{\Sigma_1} \left( ([\mathcal{A}_1], \Pi_1), ([\mathcal{A}'_1], \Pi'_1) \right) - s_{\Sigma_2} \left( ([\mathcal{A}_2], \Pi_2), ([\mathcal{A}'_2], \Pi'_2) \right) \\
 &= \int_{\Sigma_1} [\mathcal{A}_1] \wedge * \Pi'_1 - [\mathcal{A}'_1] \wedge * \Pi_1 - \int_{\Sigma_2} [\mathcal{A}_2] \wedge * \Pi'_2 - [\mathcal{A}'_2] \wedge * \Pi_2 \\
 &= \int_{\Sigma_1} \iota_1^{pb} [A] \wedge * *^{-1} \iota_1^{pb} * dA' - \iota_1^{pb} [A] \wedge * *^{-1} \iota_1^{pb} * dA' \\
 &\quad - \int_{\Sigma_2} \iota_2^{pb} [A] \wedge * *^{-1} \iota_2^{pb} * dA' - \iota_2^{pb} [A] \wedge * *^{-1} \iota_2^{pb} * dA' \\
 &= \int_{\Sigma_1} \iota_1^{pb} \left( [A] \wedge * dA' - [A'] \wedge * dA \right) - \int_{\Sigma_2} \iota_2^{pb} \left( [A] \wedge * dA' - [A'] \wedge * dA \right) \\
 &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_V d \left( [A] \wedge * dA' - [A'] \wedge * dA \right) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, daß  $-\delta dA = 0 = -\delta dA'$  ist. Die Integrale existieren, da  $[A]$  und  $[A']$  Äquivalenzklassen bzgl. exakter Formen von Lösungen von 4.1.1 bezeichnen und daher eichäquivalent zu Lorenzlösungen sind.  $V$  ist ein Gebiet mit Rand, welches dem Satz von Stokes genügt und  $\partial V$  umfaßt die Träger von  $[\mathcal{A}_1] \cap \Pi'_1$ ,  $[\mathcal{A}'_1] \cap \Pi_1$ ,  $[\mathcal{A}_2] \cap \Pi'_2$  und  $[\mathcal{A}'_2] \cap \Pi_2$ , was wegen der Kompaktheit der Träger von  $\Pi_i, \Pi'_i, i = 1, 2$ , auch möglich ist. Man erhält somit insgesamt

$$\mathbb{L}_{\mathbb{C}} / \sim \quad \text{mit} \quad s_{\mathbb{L}}([A], [A']) = \int_{\Sigma} \iota^{pb} ([A] \wedge * dA' - [A'] \wedge * dA).$$

### Physikalischer Phasenraum der Lösungen

Der physikalische Phasenraum ist

$$\mathbb{L} / \sim := \left\{ [A] \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}} \mid A \in \Omega_1 M \right\},$$

der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Eichäquivalenzklassen bzgl. exakter Formen der reellwertigen Lösungen aus Satz 4.1.1. Da reellwertige Lösungen notwendigerweise

reellwertige Cauchydaten besitzen, ist für  $[A] \in \mathbb{L}/\sim$  das Tupel  $(\rho_0[A], \rho_d[A])$  ein wohldefiniertes Element aus  $\mathcal{CD}_\Sigma/\sim$ . Nach der Eindeutigkeitsaussage 4.1.2 ist diese Zuordnung

$$\begin{aligned} \mathbb{L}/\sim &\longrightarrow \mathcal{CD}_\Sigma/\sim \\ [A] &\longmapsto (\rho_0[A], \rho_d[A]) \end{aligned}$$

sogar ein Isomorphismus und somit ist  $(\mathbb{L}/\sim, s_\mathbb{L})$  symplektisch isomorph zu  $(\mathcal{CD}_\Sigma/\sim, s_\Sigma)$ . Insbesondere ist  $(\mathbb{L}/\sim, s_\mathbb{L})$  ein symplektischer Vektorraum, da  $s_\mathbb{L}$  auf  $\mathbb{L}/\sim$  auf Grund des Isomorphismus reellwertig und nicht ausgeartet ist. Für den weiteren Verlauf ist nun die Aussage von [Dim92, Prop.7] und [Pfe09, Prop.II.15] sehr wichtig:

### 4.2.3 Satz

Sei  $[A] \in \mathbb{L}_\mathbb{C}/\sim$  und  $\theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  mit  $\delta\theta = 0$ , dann gilt

$$\int_M [A] \wedge *\theta = s_\mathbb{L}([A], [G\theta]),$$

wobei die Äquivalenzklasse bzgl.  $A \sim A' \iff A' = A + d\Lambda, \Lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C})$  gemeint ist.

### 4.2.4 Fundamentale Observablen als Verschmierungen

Wegen des vorangegangenen Satzes erlauben die klassischen fundamentalen Observablen

$$s_\mathbb{L}(\cdot, [A']) : \mathbb{L}_\mathbb{C}/\sim \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [A'] \in \mathbb{L}_\mathbb{C}/\sim$$

die Interpretation einer Verschmierung über die Raumzeit mittels einer kompakt getragenen Differentialform, denn nach Satz 4.1.3(c) gibt es ein kogeschlossenes  $\theta' \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  mit  $[A'] = [G\theta']$ . Somit ist

$$s_\mathbb{L}(\cdot, [A']) = s_\mathbb{L}(\cdot, [G\theta']) : [A] \longmapsto s_\mathbb{L}([A], [G\theta']) \stackrel{\text{Satz 4.2.3}}{=} \int_M [A] \wedge *\theta'.$$

Die klassischen fundamentalen Observablen erhalten eine neue Bezeichnung und zwar für  $\theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  kogeschlossen

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}](\theta) : \mathbb{L}_\mathbb{C}/\sim &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [A] &\longmapsto [\mathbf{A}](\theta)([A]) = \int_M [A] \wedge *\theta. \end{aligned}$$

Als Poissonklammer ergibt sich

$$\{[\mathbf{A}](\phi), [\mathbf{A}](\theta)\} = s_{\mathbb{L}}([G\phi], [G\theta]) \mathbf{1}_{Abb.} = \left( \int_M [G\phi] \wedge *\theta \right) \mathbf{1}_{Abb.}$$

### Wohldefiniertheit der $[\mathbf{A}](\theta)$

Diese neue Bezeichnung ist wohldefiniert, denn sei  $[\mathbf{A}](\theta) = [\mathbf{A}](\phi)$ , dann ist dies genau dann der Fall, wenn gilt

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}](\theta - \phi)([A]) &= \int_M [A] \wedge *(\theta - \phi) \quad \forall [A] \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}/\sim \\ \iff \int_M [G\eta] \wedge *(\theta - \phi) &= 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \delta\eta = 0 \\ \iff - \int_M \eta \wedge *G(\theta - \phi) &= 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \delta\eta = 0 \\ \iff \int_M G(\theta - \phi) \wedge *\eta &= 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \delta\eta = 0. \end{aligned}$$

Für koexakte  $\eta$  folgt hiermit

$$\int_M G(\theta - \phi) \wedge *\eta = \int_M G(\theta - \phi) \wedge *\delta\omega = \int_M dG(\theta - \phi) \wedge *\omega = 0 \quad \forall \omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}),$$

also  $[\mathbf{A}](\theta) = [\mathbf{A}](\phi) \implies dG(\theta - \phi) = 0$ . Mit der Poincarédualität 5.1.2 folgt sogar, daß  $G(\theta - \phi)$  exakt sein muß, weil in diesem Fall

$$\int_M G(\theta - \phi) \wedge *\eta = \int_M G(\theta - \phi) \wedge \eta' = 0 \quad \forall \eta' \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}), d\eta' = 0,$$

gilt. Aus  $dG(\theta - \phi)$  folgern wir weiter mit Lemma C.6.5, daß  $d(\theta - \phi) = \square\omega$  für ein  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  gilt. Wegen  $d \circ d \equiv 0$  folgen weiter

$$\begin{aligned} d\square\omega = \square d\omega = 0 &\implies G_{\pm}\square d\omega = d\omega = 0, \\ \square(\theta - \phi) = (-d\delta - \delta d)(\theta - \phi) &= -\delta\square\omega = -\square\delta\omega \implies G_{\pm}\square(\theta - \phi) = \theta - \phi = -\delta\omega. \end{aligned}$$

Wir folgern also

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}](\theta) = [\mathbf{A}](\phi) &\iff [G\theta] = [G\phi] \iff G\theta \sim G\phi \\ &\iff G(\theta - \phi) = d\Lambda \quad \text{für ein } \Lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C}) \\ &(\implies \theta - \phi = -\delta\omega \quad \text{für ein } \omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}) \text{ mit } d\omega = 0). \end{aligned}$$

Diese neue Schreibweise für die klassischen fundamentalen Observablen ist also wohldefiniert.

### Physikalische Observable

Die physikalischen Observablen sind diejenigen Observablen, die von dem Phasenraum  $(\mathbb{L}/\sim, s_{\mathbb{L}})$  in die reellen Zahlen abbilden. Für  $[A] \in \mathbb{L}/\sim$  bezeichne  $A \in \Omega_1 M$  den reellwertigen Repräsentanten, dann gilt

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}](\theta)([A]) \in \mathbb{R} \quad \forall [A] \in \mathbb{L}/\sim &\iff \int_M [A] \wedge * \theta \in \mathbb{R} \quad \forall [A] \in \mathbb{L}/\sim \\ &\iff \int_M [A] \wedge * \theta_{\Im} = 0 \quad \forall [A] \in \mathbb{L}/\sim \\ &\iff s_{\mathbb{L}}([A], [G\theta_{\Im}]) = 0 \quad \forall [A] \in \mathbb{L}/\sim \\ &\iff [G\theta_{\Im}] = 0, \end{aligned}$$

da  $s_{\mathbb{L}}$  auf  $\mathbb{L}/\sim$  nicht entartet und  $[G\theta_{\Im}] \in \mathbb{L}/\sim$  wegen  $\theta_{\Im} \in \Omega_{1c} M$  ist. Die physikalischen Observablen sind also die linearen Abbildungen der Gestalt

$$[\mathbf{A}](\theta), \quad \theta \in \left\{ \phi \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}) \mid \delta\phi = 0, [G\phi_{\Im}] = 0 \right\}.$$

Exakt dieselben physikalischen Observablen erhält man, wenn man nur reellwertige, kogeschlossene Formen zulässt. Dies folgt daraus, daß

$$[\mathbf{A}](\theta)([A]) = \int_M [A] \wedge * \theta \stackrel{\text{Satz 4.1.3}}{=} \int_M [A] \wedge * \theta_{\Re}, \quad [A] \in \mathbb{L}/\sim$$

ist, der Imaginärteil von  $\theta$  also keinen Beitrag zum Wert des Integrals leistet.

### 4.2.5 Der Phasenraum der Testformen

Satz 4.1.3 gibt nun weiter die Möglichkeit, mit Hilfe der Räume der Testformen

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathbb{C}} &:= \left\{ \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}) \mid \delta\theta = 0 \right\}, \\ \mathcal{T} &:= \left\{ \theta \in \Omega_{1c} M \mid \delta\theta = 0 \right\} \end{aligned}$$

einen weiteren, zu den anderen symplektisch isomorphen Phasenraum zu konstruieren. Ist  $[A] \in \mathbb{L}/\sim$  mit reellwertigen Repräsentanten  $A$ , dann existiert ein  $\theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  mit  $[A] = [G\theta]$  und es gilt weiter

$$\begin{aligned} [A] = [G\theta] &\iff A = G\theta + d\Lambda, \quad \Lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C}) \\ &\iff A = G\theta_{\Re} + i G\theta_{\Im} + d\Lambda_{\Re} + i d\Lambda_{\Im} \\ &\iff A = G\theta_{\Re} + d\Lambda_{\Re}, \quad 0 = G\theta_{\Im} + d\Lambda_{\Im} \\ &\iff [A] = [G\theta_{\Re}], \quad 0 = [G\theta_{\Im}]. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß für jedes  $[A] \in \mathbb{L}/\sim$  sogar ein  $\theta \in \mathcal{T}$  existiert, sodaß  $[A] = [G\theta]$  gilt. Umgekehrt liefert jedes  $\theta \in \mathcal{T}$  durch die Vorschrift  $\theta \mapsto [G\theta]$  ein Element aus  $\mathbb{L}/\sim$ . Geht man über zu dem Quotientenvektorraum

$$\mathcal{T}/[\ker(G)], \quad [\ker(G)] := \left\{ \theta \in \mathcal{T} \mid [G\theta] = 0 \right\},$$

so liefert diese Vorschrift einen Isomorphismus. Versieht man dann noch  $\mathcal{T}/[\ker(G)]$  mit der symplektischen Form definiert durch

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{T}} : \mathcal{T}/[\ker(G)] \times \mathcal{T}/[\ker(G)] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s_{\mathcal{T}}(\phi, \theta) = s_{\mathbb{L}}([G\phi], [G\theta]) &= \int_M G\phi \wedge * \theta, \end{aligned}$$

so erhält man dadurch einen zu  $(\mathbb{L}/\sim, s_{\mathbb{L}})$  symplektisch isomorphen Vektorraum. Die physikalischen, klassischen fundamentalen Observablen des Phasenraumes  $\mathcal{T}/[\ker(G)]$  sind genau die im vorherigen Unterabschnitt beschriebenen, nämlich

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}](\theta) : \mathcal{T}/[\ker(G)] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\mathbf{A}](\theta)(\phi) = [\mathbf{A}](\widehat{[G\phi]}) &= \int_M [G\phi] \wedge * \theta. \end{aligned}$$

## 4.3 Quantisierung

Wir erinnern uns zuerst daran, daß wir  $m = 4$  und  $p = 1$  vorausgesetzt, aber keine topologische Einschränkung vorgenommen haben. Bei der Quantisierung werden nun die klassischen fundamentalen Observablen  $[\mathbf{A}](\theta)$ ,  $\theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ , Operatoren  $\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$  auf einem Hilbertraum gemäß des Korrespondenzprinzips zugeordnet. Der Kommutator soll dabei proportional zur klassischen Poissonklammer sein,

$$[\cdot, \cdot] = i \hbar \widehat{\{\cdot, \cdot\}}.$$

Die Objekte  $\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$  heißen die verschmierten Feldoperatoren des Vektorpotentials und das Objekt  $\widehat{[\mathbf{A}]}$  nennt man den Feldoperator des Vektorpotentials. Der Feldoperator  $\widehat{[\mathbf{A}]}$  ist eine operatorwertige Distribution und ein Grund, warum man von  $[\mathbf{A}]$  als Feldoperator spricht, ist [Dim92, Prop.8]:

### 4.3.1 Satz

Für  $\theta, \phi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  gilt



(a)  $\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$  erfüllt die Maxwellgleichungen im distributiven Sinne, d.h.

$$-\delta d\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta) := \widehat{[\mathbf{A}]}(-\delta d\theta) = 0.$$

(b) Für den Kommutator gilt

$$\left[ \widehat{[\mathbf{A}]}(\phi), \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta) \right] = i\hbar \left\{ \widehat{[\mathbf{A}]}(\phi), \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta) \right\} = i\hbar \left( \int_M G\phi \wedge *\theta \right) id,$$

insbesondere verschwindet der Kommutator für raumartig getrennte Testformen.

Man beachte, daß sogar  $\widehat{[\mathbf{A}]}(-\delta d\theta) = 0 \forall \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  gilt, siehe etwa [Dim92, Prop.8]. Der Kommutator wird auf Grund der Konstruktion des Hilbertraumes und der korrespondierenden Operatoren auf diesem erfüllt. Weiter beachte man, daß unser Ergebnis für den Kommutator auch wirklich mit demjenigen Ergebnis aus [Dim92] übereinstimmt, denn unser  $G$  ist  $-E$  in [Dim92]. Dies folgt daraus, daß in [Dim92]  $d\delta + \delta d$  als Wellenoperator  $\square$  betrachtet wird.

Wie bereits am Anfang dieser Arbeit erwähnt, ist die Hilbertraumkonstruktion mit rein willkürlichen Wahlen verbunden und nicht mehr zwangsweise unitär äquivalent zu anderen Hilbertraumkonstruktionen. Um diese Problematik zu umgehen und da wir nun wissen, was eine Quantentheorie des elektromagnetischen Vektorpotentials leisten soll, gehen wir zur algebraischen Formulierung der Quantenfeldtheorie über. Aus dieser kann man, wie in Unterabschnitt 1.2.1 gezeigt, durch die GNS-Konstruktion zurück in einen Hilbertraumformalismus mit Operatoren gelangen.

### 4.3.2 Die Feldalgebra

Gesucht wird also nun eine  $*$ -Algebra  $\mathfrak{A}(M)$  mit Eins, die folgende Eigenschaften erfüllen soll:

- $\mathfrak{A}(M)$  wird erzeugt von den Symbolen der Gestalt  $\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta), \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  und der Eins  $1_{\mathfrak{A}(M)}$ .
- $\widehat{[\mathbf{A}]}$  erfüllt die Feldgleichung  $-\delta dA = 0$  im Sinne von Distributionen, d.h.  $\widehat{[\mathbf{A}]}(-\delta d\theta) = 0 \forall \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$ .
- $\left[ \widehat{[\mathbf{A}]}(\phi), \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta) \right] = i\hbar \left( \int_M G\phi \wedge *\theta \right) 1_{\mathfrak{A}(M)} \forall \phi, \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ .

- $\widehat{[\mathbf{A}]}(z_1\phi + z_2\theta) = z_1\widehat{[\mathbf{A}]}(\phi) + z_2\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta) \quad \forall z_i \in \mathbb{C}, \phi, \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  ( $\mathbb{C}$ -Linearität).
- $\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)^* = \widehat{[\mathbf{A}]}(\bar{\theta}) \quad \forall \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  (Hermitizität).

Diese Algebra  $\mathfrak{A}(M)$  mit den genannten Eigenschaften nennt man die Feldalgebra des elektromagnetischen Vektorpotentials. Durch die GNS-Darstellung erhält man eine Hilbertraumdarstellung der Feldalgebra  $\mathfrak{A}(M)$  mit i.A. nicht beschränkten Operatoren, und die selbstadjungierten Elemente spielen die Rolle von Observablen.

Durch die Verwendung komplexwertiger Testformen enthält die Feldalgebra auch unphysikalische Observablen. Eine physikalische Feldalgebra erhält man z.B. dadurch, daß man nur reellwertige Differentialformen und deren reellen Linearkombinationen bei der Konstruktion der Feldalgebra zuläßt. Wir schließen aber auch weiterhin komplexwertige Differentialformen in unsere Behandlung mit ein.

Eine weitere wichtige Bemerkung bezieht sich auf die entstandene Diskrepanz zwischen der klassischen und quantisierten Theorie. In der klassischen Theorie führen eichäquivalente Lösungen  $[G\theta]$  und  $[G\phi]$ ,  $\theta, \phi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ , auf dieselbe Observable  $[\mathbf{A}](\phi) = [\mathbf{A}](\theta)$ . Dies ist für die quantisierte Theorie nach Konstruktion der Feldalgebra nicht mehr der Fall! Hier führen zwei Testformen  $\theta, \phi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  nur noch dann zu demselben verschmierten Feldoperator, wenn für deren Differenz  $\theta - \phi = -\delta d\theta'$  für ein  $\theta' \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  gilt. Wie bereits in Unterabschnitt 4.2.4 gezeigt wurde, ist  $[G\phi] = [G\theta]$  gleichbedeutend zu  $G(\theta - \phi) = d\Lambda$ ,  $\Lambda \in \Omega_0(M, \mathbb{C})$ , und daraus folgt  $\theta - \phi = -\delta\omega$  für ein  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $d\omega = 0$ . Dies ist nur genau dann gleichbedeutend zu  $\theta - \phi = -\delta d\theta'$  für ein  $\theta' \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$ , wenn die 2-te de Rham-Kohomologiegruppe  $H_{dR}^2 M$  verschwindet, denn nur dann ist jede kompakt getragene geschlossene 2-Form auch exakt mit einer kompakt getragenen 1-Form. Angenommen  $H_{dR}^1 M = 0$ , so folgt mit den Methoden aus Kapitel 5  $H_{dR,c}^2 \Sigma = 0$ , und  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $d\omega = 0$  und  $-\delta\omega = \theta - \phi$  ist exakt nach Folgerung 5.3.8 und Unterabschnitt 5.3.4, da für alle  $z \in H_2^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\int_z \omega = \int_{z_\Sigma} \iota^{pb} \omega \stackrel{H_{dR,c}^2 \Sigma = 0}{=} \int_z d\omega' = \int_{\partial z} \omega' = 0$$

gilt. Dies bedeutet  $\omega = d\theta'$ , aber mit  $\theta' \in \Omega_1(M, \mathbb{C})$  und *nicht* zwangsweise mit  $\theta' \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$ . Also  $\theta - \phi = -\delta d\theta'$  mit  $\theta' \in \Omega_1(M, \mathbb{C})$ .

Dies bietet eine schöne Interpretation dessen an, was zur Diskrepanz im Falle einer nicht trivialen Topologie führt. Es liegen dann nämlich zwei unterschiedliche Typen von Eichtransformationen vor, *lokale* Eichtransformationen ( $\theta - \phi = -\delta d\theta'$  mit  $\theta' \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$ ) und *globale* Eichtransformationen ( $\theta - \phi = -\delta d\theta'$  mit  $\theta' \in \Omega_1(M, \mathbb{C})$ ). Physikalisch sinnvoll sollten hingegen nur

die lokalen Eichtransformationen sein, weswegen wir diese in die Feldalgebra  $\mathfrak{A}(M)$  implementiert haben und nicht die globalen Eichtransformationen. Das Implementieren der globalen Eichtransformationen würde auch unweigerlich dazu führen, daß es ein nicht triviales Zentrum nicht mehr geben kann.

### Abstrakte algebraische Konstruktion der Feldalgebra

Abstrakt kann die Feldalgebra  $\mathfrak{A}(M)$  aus derjenigen freien  $*$ -Algebra  $\mathcal{A}$  mit Eins über  $\mathbb{C}$  konstruiert werden, welche von den Elementen der Gestalt  $1_{\mathcal{A}}, \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta), \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)^*$ , wobei  $\theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  ist, erzeugt wird. Diese Elemente haben an dieser Stelle nur eine symbolische Bedeutung, sie sind als rein abstrakte Elemente einer Algebra anzusehen. Wie in Abschnitt 3.5 nimmt man nun den Quotienten über das  $*$ -Ideal  $\mathcal{I}$ , das von den Elementen aus  $\mathcal{A}$  der Gestalt

$$\begin{aligned} & \widehat{[\mathbf{A}]}(-\delta d\theta), \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \\ & \left[ \widehat{[\mathbf{A}]}(\phi), \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta) \right] - i\hbar \left( \int_M G\phi \wedge *\theta \right) 1_{\mathfrak{A}(M)} \quad \forall \phi, \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}, \\ & \widehat{[\mathbf{A}]}(z_1\phi + z_2\theta) - z_1\widehat{[\mathbf{A}]}(\phi) - z_2\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \forall \phi, \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}, \\ & \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)^* - \widehat{[\mathbf{A}]}(\bar{\theta}) \quad \forall \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

erzeugt wird, also  $\mathfrak{A}(M) = \mathcal{A}/\mathcal{I}$ .

### Feldalgebra aus der Borchers-Uhlmann Algebra

Konkreter kann man analog zu Abschnitt 3.5  $\mathfrak{A}(M)$  mit Hilfe der Borchers-Uhlmann Algebra, der freien Tensoralgebra über den Raum der Testformen

$$T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_{\mathbb{C}}^{\oplus n},$$

wobei  $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$ , realisieren. Die Multiplikation wird wieder durch den Isomorphismus  $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}^{\otimes k} \otimes \mathcal{T}_{\mathbb{C}}^{\otimes l} \cong \mathcal{T}_{\mathbb{C}}^{\otimes (k+l)}$  gegeben, ein allgemeines Element in  $T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})$  ist eine Summe von Produkten der Gestalt

$$\left( z_0, \prod_{i=1}^{\infty} \left( z_i \bigotimes_{j=1}^i \theta_{ij} \right) \right) = (z_0, z_1 \theta_{11}, z_2 \theta_{21} \otimes \theta_{22}, z_3 \theta_{31} \otimes \theta_{32} \otimes \theta_{33}, \dots),$$

wobei nur endlich viele der  $z_i \in \mathbb{C}$  nicht Null sind. Die Eins in der Borchers-Uhlmann Algebra ist das Element

$$1_{T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})} = (1, 0, \dots).$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} * : T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}) &\longrightarrow T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}}) \\ \left( z_0, \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathbf{a}}}(z_i \overset{i}{\otimes} \theta_{ij}) \right) &\longmapsto \left( \overline{z_0}, \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathbf{a}}}(\overline{z_i} \overset{1}{\otimes} \overline{\theta_{ij}}) \right), \end{aligned}$$

nur endlich viele der  $z_i \in \mathbb{C}$  sind nicht Null, definiert eine Involution auf der Borchers-Uhlmann Algebra.

Die Borchers-Uhlmann Algebra enthält aber noch nicht die Informationen über die Dynamik des zugrunde liegenden Feldes, nämlich die Dynamik des elektromagnetischen Vektorpotentials. Um dies zu erreichen, teilt man aus  $T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})$  das \*-Ideal  $I$  heraus, das von den Elementen der Gestalt

$$a \otimes b \otimes c, \quad a, c \in T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})$$

erzeugt wird,  $b$  ist von einer der beiden Gestalten

$$\begin{aligned} b &= -\delta d\theta, \quad \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \\ b &= \phi \otimes \theta - \theta \otimes \phi - i\hbar \int_M G\phi \wedge * \theta) 1_{T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})}, \quad \phi, \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

$T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})/I$  ist nun nicht die Nullalgebra, denn z.B. liegen  $1_{T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})}$  und alle  $\psi \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  mit  $0 \neq \psi \neq -\delta d\theta$  für  $\theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  nicht in  $I$ , da

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, \dots) &\neq (0, -\delta d\theta, 0, \dots), \quad \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \\ (1, 0, 0, 0, \dots) &\neq (-i\hbar \int_M G\phi \wedge * \theta, 0, \phi \otimes \theta - \theta \otimes \phi, 0, \dots), \quad \phi, \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}, \\ (0, \psi, 0, \dots) &\neq (0, -\delta d\theta, 0, \dots), \quad \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \\ (0, \psi, 0, 0, \dots) &\neq (-i\hbar \int_M G\phi \wedge * \theta, 0, \phi \otimes \theta - \theta \otimes \phi, 0, \dots), \quad \phi, \theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

(gilt  $\phi \otimes \theta = \theta \otimes \phi$ , so folgt schon  $\phi = \mu \cdot \theta$  mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes und damit ist dann auch das Integral Null).

Hiermit haben wir explizit die Feldalgebra konstruiert, denn  $T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})/I$  erfüllt alle Eigenschaften der Feldalgebra  $\mathfrak{A}(M)$  und ist daher zu dieser isomorph. Genauer entspricht ein Element

$$\left( z_0, \overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathbf{a}}}(z_i \overset{i}{\otimes} \theta_{ij}) \right), \quad z_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i,$$

aus  $T(\mathcal{T}_{\mathbb{C}})/I$  dem Element

$$z_0 + z_1 \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta_{11}) + z_2 \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta_{21}) \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta_{22}) + z_3 \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta_{31}) \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta_{32}) \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta_{33}) + \dots$$

aus  $\mathfrak{A}(M)$  (nur endlich viele der  $z_i$  sind nicht Null), wobei wir in der Notation nicht streng zwischen den Äquivalenzklassen und ihren Repräsentanten unterschieden haben.

### 4.3.3 Die Weylalgebra des quantisierten Potentials

Obwohl die in Unterabschnitt 4.3.2 konstruierte Feldalgebra  $\mathfrak{A}(M)$  des elektromagnetischen Vektorpotentials alle gewünschten Eigenschaften erfüllt und durch die GNS-Darstellung eine Hilbertraumformulierung ermöglicht, kann es dennoch zu mathematischen Komplikationen kommen. Das Hintereinanderausführen von zwei nicht beschränkten Operatoren ist nicht immer wohldefiniert, d.h. der Kommutator ist nicht immer wohldefiniert. Aus diesem Grund ist es mathematisch wünschenswert mit beschränkten Operatoren zu arbeiten und dies erreicht man, indem man die Weylalgebra konstruiert.

Da  $(\mathcal{CD}_\Sigma/\sim, s_\Sigma)$ ,  $(\mathbb{L}/\sim, s_\mathbb{L})$  und  $(\mathcal{T}/[\ker(G)], s_\mathcal{T})$  symplektisch isomorph zueinander sind, sind sie für eine Quantisierung äquivalent. Wir entscheiden uns dafür, mit  $(\mathcal{T}/[\ker(G)], s_\mathcal{T})$  weiterzuarbeiten.

#### Konstruktion der Weylalgebra

Nach Satz 1.1.9 existiert zu  $(\mathcal{T}/[\ker(G)], s_\mathcal{T})$  eine Weylalgebra  $\mathfrak{W}$ , die eindeutig bis auf einen  $*$ -Isomorphismus ist. Da die Weylalgebra eine  $\mathcal{C}^*$ -Algebra ist, liefert die GNS-Darstellung eine Darstellung durch beschränkte Operatoren auf einem Hilbertraum.

Als abstrakte  $\mathcal{C}^*$ -Algebra wird  $\mathfrak{W}$  erzeugt durch die „formal Exponentierten“ der reellwertigen Erzeuger der Feldalgebra  $\mathfrak{A}(M)$

$$W(\theta) := \exp(i \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)), \quad \theta \in \mathcal{T}/[\ker(G)].$$

Die Elemente  $W(\theta)$  erfüllen die Eigenschaften eines Weylsystems, denn es gelten

$$W(0) = 1_{\mathfrak{W}},$$

$$\begin{aligned} W(\theta)^* &= \exp(i \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)^*) = \exp(-i \widehat{[\mathbf{A}]}(\bar{\theta})) = \exp(i \widehat{[\mathbf{A}]}(-\theta)) \\ &= W(-\theta) \end{aligned}$$

und weiter wegen der Baker-Campbell-Hausdorff Formel unter der Beachtung, daß  $[\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta), [\widehat{[\mathbf{A}]}(\phi), \widehat{[\mathbf{A}]}(\psi)]] = 0$  ist, da  $1_{\mathfrak{A}(M)}$  mit allen anderen Elementen kommutiert

$$\begin{aligned} W(\phi)W(\theta) &= \exp(i \widehat{[\mathbf{A}]}(\phi)) \exp(i \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} [\widehat{[\mathbf{A}]}(\phi), \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)]\right) \exp(i \widehat{[\mathbf{A}]}(\phi) + i \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)) \\ &= \exp\left(-\frac{i\hbar}{2} s_\mathcal{T}(\phi, \theta)\right) W(\phi + \theta). \end{aligned}$$

Die Weylalgebra ist nun die eindeutige  $\mathcal{C}^*$ -Algebra  $\mathfrak{W}$ , die von den Elementen  $W(\theta)$ ,  $\theta \in \mathcal{T}/[\ker(G)]$ , erzeugt wird, siehe zu diesem Thema auch [BR02, Thm.5.2.8].

Wir möchten anmerken, daß mit der so konstruierten Weylalgebra die Behandlung eines nicht trivialen Zentrums nicht mehr möglich ist, da dieses gerade durch die Verwendung von  $\mathcal{T}/[\ker(G)]$  herausgeteilt wurde. Möchte man auf der Ebene von Weylalgebren ein nicht triviales Zentrum behandeln, dann muß man die Weylalgebra zu  $(\mathcal{T}, s_{\mathcal{T}})$  bilden, wobei  $s_{\mathcal{T}}$  ausgeartet ist. Wir werden in dieser Arbeit ein nicht triviales Zentrum im Rahmen von Feldalgebren behandeln.

### Algebra der quasilokalen Observablen

Durch die Einschränkung der Träger der Testformen kann ein Netz von lokalen Observablenalgebren ( $\mathcal{C}^*$ -Algebren) definiert werden, die durch offene beschränkte Teilmengen  $\mathcal{O}$  von  $M$  indiziert werden:

$$M \supset \mathcal{O} \longmapsto \mathfrak{A}(\mathcal{O}) := \mathcal{C}^*\left(\left\{W(\theta) \mid \theta \in \mathcal{T}/[\ker(G)] \text{ mit } \text{supp}(\theta) \subset \mathcal{O}\right\}\right),$$

wobei  $\mathcal{C}^*(\dots)$  die vom Argument erzeugte  $\mathcal{C}^*$ -Algebra bezeichne. Der  $\mathcal{C}^*$ -induktive Limes der lokalen Algebren fällt mit der Weylalgebra  $\mathfrak{W}$  zusammen, d.h. es gilt

$$\mathcal{C}^*\left(\bigcup_{\substack{\mathcal{O} \Subset M, \\ \mathcal{O} \text{ beschränkt}}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})\right) = \overline{\left(\bigcup_{\substack{\mathcal{O} \Subset M, \\ \mathcal{O} \text{ beschränkt}}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})\right)}^{\mathcal{C}^*} = \mathfrak{A}_{\text{qloc}} = \mathfrak{W}.$$

Dieses Netz von lokalen Observablenalgebren erfüllt die in [Dim80] auf gekrümmte Raumzeiten verallgemeinerten Haag-Kastler Axiome, namentlich Isotonie, Kausalität, Primitivität und Kovarianz.

## 4.4 Zur Feldalgebra des Feldstärketensors II

Klassisch erhält man aus einem Vektorpotential durch

$$F = dA$$

einen Feldstärketensor. Im quantisierten Fall ist diese Gleichung im Sinne von Distributionen zu verstehen,

$$\widehat{\mathbf{F}} = d[\widehat{\mathbf{A}}],$$

was

$$\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\omega) \text{ für } \omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$$

bedeutet. Die Erfüllung der Maxwellgleichungen im Sinne von Distributionen bleibt erhalten,

$$\begin{aligned} d\widehat{\mathbf{F}}(\eta) &:= \widehat{\mathbf{F}}(\delta\eta) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\delta\omega) = 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}) \\ -\delta\widehat{\mathbf{F}}(\theta) &:= \widehat{\mathbf{F}}(-d\theta) = \widehat{[\mathbf{A}]}(-\delta d\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Wir können also somit Elemente aus  $\mathfrak{A}(M)$ , siehe Unterabschnitt 4.3.2, mit Elementen aus  $\mathfrak{F}(M)$ , siehe Abschnitt 3.5, und umgekehrt identifizieren. Hierdurch erhalten wir eine Idee für die Kommutatorrelation in  $\mathfrak{F}(M)$ . Es sind vier Fälle zu betrachten:

### 1. Fall $H_{dR}^1 M = 0$ und $H_{dR}^2 M = 0$

Für alle  $\theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  gibt es nach der Poincarédualität 5.1.2 und Lemma 5.1.3 ein  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $\theta = \delta\omega$ . Daher gibt es für jeden verschmierten Feldoperator  $\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$  des Potentials einen verschmierten Feldstärkeoperator  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  mit  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$ . Dieser verschmierte Feldstärkeoperator ist sogar eindeutig bestimmt, denn sei auch  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega')$  mit  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega') = \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$ . Dies bedeutet  $\delta\omega = \delta\omega'$  und damit  $\omega' = \omega + \tilde{\omega}$  mit  $\delta\tilde{\omega} = 0$ . Da  $H_{dR}^2 M = 0$  folgt wieder mit der Poincarédualität 5.1.2 und Lemma 5.1.3, daß  $\tilde{\omega} = \delta\eta$  für ein  $\eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C})$  ist. Also gilt dann  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega') = \widehat{\mathbf{F}}(\omega + \delta\eta) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega)$ , da  $\widehat{\mathbf{F}}$  die Maxwellgleichungen im schwachen Sinne erfüllt.

Auf der anderen Seite gibt es für jeden verschmierten Feldstärkeoperator  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  widerspruchsfrei einen verschmierten Feldoperator  $\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$  des Potentials mit  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$ , wähle nämlich  $\theta = \delta\omega$ . Da  $H_{dR}^1 M$  und  $H_{dR}^2 M$  beide trivial sind, kann es hierbei zu keinen Widersprüchen kommen, wie wir sie in den anderen drei Fällen aufzeigen und interpretieren werden.

Wir haben also insgesamt festgestellt, daß für den vorliegenden Fall

$$\mathfrak{A}(M) = \mathfrak{F}(M)$$

gilt. Als Kommutatorrelation für alle verschmierten Feldstärkeoperatoren erhält man den Lichnerowiczkommutator, siehe [Lic61],  $\forall \omega, \omega' \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$ :

$$\begin{aligned} [\widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega')] &= [\widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\omega), \widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\omega')] \\ &= i\hbar \left( \int_M G\delta\omega \wedge *\delta\omega' \right) 1_{\mathfrak{A}(M)} \\ &= i\hbar \left( \int_M G\omega \wedge *d\delta\omega' \right) 1_{\mathfrak{F}(M)}. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

**2.Fall  $H_{dR}^1 M = 0$  und  $H_{dR}^2 M \neq 0$**

Für alle  $\theta \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$  gibt es wieder nach der Poincarédualität 5.1.2 und Lemma 5.1.3 ein  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $\theta = \delta\omega$  und damit für jeden verschmierten Feldoperator  $\widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$  einen verschmierten Feldstärkeoperator  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  mit  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$ .

Da nun aber  $H_{dR}^2 M \neq 0$  ist, gibt es kogeschlossene kompakt getragene 2-Formen, die nicht koexakt mit einer kompakt getragenen 3-Form sind. In Formeln meinen wir solche  $\tilde{\omega} \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $\delta\tilde{\omega} = 0$ , aber  $\tilde{\omega} \neq \delta\eta$  für ein  $\eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C})$ . Sei  $\tilde{\omega}$  eine solche kogeschlossene kompakt getragene 2-Form, dann gilt nach den Eigenschaften von  $\mathfrak{F}(M)$

$$0 \neq \widehat{\mathbf{F}}(\tilde{\omega}) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\tilde{\omega}) = \widehat{[\mathbf{A}]}(0) = 0,$$

was ein Widerspruch ist. Für kogeschlossene kompakt getragene 2-Formen, die nicht koexakt mit einer kompakt getragenen 3-Form sind, führt diese Identifikation zu Widersprüchen und ist daher nicht durchführbar. Da nach Satz 5.1.9  $H_{dR}^2 M \neq 0$  zwangsweise bedeutet, daß es Feldstärketensoren gibt, die nicht exakt sind, interpretieren wir diese verschmierten Feldstärkeoperatoren als die nicht exakten verschmierten Feldstärkeoperatoren. Wir nennen einen verschmierten Feldstärkeoperator  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  genau dann *exakt*, wenn es bei der Identifikation  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\omega)$  zu keinerlei Widersprüchen kommt.

Aus diesem Grund ist derjenige verschmierte Feldstärkeoperator  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  mit  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$  eindeutig bestimmt, denn sei auch  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega')$  mit  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega') = \widehat{[\mathbf{A}]}(\theta)$ , dann muß schon  $\omega' - \omega = \delta\eta$  mit  $\eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C})$  gelten. Andernfalls kommt es zu besagten Widersprüchen.

Wir haben also für diesen Fall, daß  $\mathfrak{A}(M) \subset \mathfrak{F}(M)$  eine Unteralgebra bildet. Der Kommutator exakter verschmierter Feldstärkeoperatoren ist der Lichnerowiczkommutator (4.4.1). Darüber hinaus gibt es aber auch nicht exakte verschmierte Feldstärkeoperatoren in  $\mathfrak{F}(M)$ , über deren Kommutator wir im Moment noch keine Aussage machen können.

**3.Fall  $H_{dR}^1 M \neq 0$  und  $H_{dR}^2 M = 0$**

In diesem Fall drehen sich die Rollen von  $\mathfrak{A}(M)$  und  $\mathfrak{F}(M)$  sozusagen um. Jeder verschmierte Feldstärkeoperator  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  definiert durch  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{[\mathbf{A}]}(\delta\omega)$  widerspruchsfrei einen verschmierten Feldoperator des Vektorpotentials, denn ist  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  kogeschlossen, dann ist  $\omega$  wegen  $H_{dR}^2 M = 0$ , der Poincarédualität 5.1.2 und Lemma 5.1.3 schon koexakt. Aber wegen  $H_{dR}^1 M \neq 0$  gibt es nicht mehr zu jedem  $\theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  mit  $\delta\theta = 0$  ein  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$ ,



sodaß  $\theta = \delta\omega$  gilt. Das bedeutet, daß die in Abschnitt 3.5 konstruierte Feldalgebra  $\mathfrak{F}(M)$  des Feldstärketensors eine Unteralgebra von  $\mathfrak{A}(M)$  ist. Der Kommutator für  $\mathfrak{F}(M)$  ist daher der Lichnerowiczkommutator (4.4.1).

#### 4.Fall $H_{dR}^1 M \neq 0$ und $H_{dR}^2 M \neq 0$

In diesem Fall gilt weder  $\mathfrak{F}(M) \subset \mathfrak{A}(M)$  noch  $\mathfrak{A}(M) \subset \mathfrak{F}(M)$ . Mit derselben Argumentation wie im zweiten Fall kann die Existenz exakter verschmierter Feldstärkeoperatoren gezeigt werden und mit denselben Argumenten wie im dritten Fall kann gezeigt werden, daß es einen verschmierten Feldoperator  $[\widehat{\mathbf{A}}](\theta)$  gibt, zu dem kein verschmierter Feldstärkeoperator  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  mit  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = [\widehat{\mathbf{A}}](\theta)$  existiert. Der Kommutator der exakten verschmierten Feldstärkeoperatoren ist auch hier der Lichnerowiczkommutator (4.4.1), zum Kommutator mit nicht exakten verschmierten Feldstärketensoren können wir an dieser Stelle noch keine Aussage machen.

Bevor wir eine weitere Methode zur Konstruktion der Feldalgebra des Feldstärketensors angeben, klären, wie die Struktur dieser beschaffen ist und wie der Kommutator von nicht exakten verschmierten Feldstärkeoperatoren aussieht, werden wir nun im nächsten Kapitel die de Rham-Kohomologie und die singuläre Homologie einführen und diskutieren. Diese beiden Konzepte erweisen sich als sehr fruchtbar, wie bereits verwendete Begriffe und Aussagen gezeigt haben sollten.

# Kapitel 5

## Exakte Formen und Homologie

Die homogene Maxwellgleichung  $dF = 0$  bedeutet nichts anderes, als daß  $F$  geschlossen ist.  $F = dA$ , also kann  $F$  global durch ein einziges  $A$  ausgedrückt werden, bedeutet hingegen die Exaktheit von  $F$ . In der Hoffnung fundamentale Aussagen darüber zu treffen, wann es überhaupt Feldstärketensoren geben kann, die kein globales Vektorpotential zulassen, stellen wir in diesem Kapitel die wichtigsten mathematischen Aspekte exakter Formen, sowie die damit verbundenen Implikationen auf die Topologie der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit zusammen. Für die Darstellung dieser Thematik verwenden wir hauptsächlich [Lee03], [War83], [Soeb], [SZ94] und [Hat02]. Siehe aber auch [BT95] und [Fra01]. Eine sehr empfehlenswerte Arbeit ist [MW57], die sich diesem Thema von einem physikalischen Standpunkt aus nähert.

### 5.1 de Rham-Kohomologie

Die Information, ob eine geschlossene Differentialform exakt ist, wird in der Differentialgeometrie in den sogenannten de Rham-Kohomologiegruppen kodiert. Diese sollen nun das Thema dieses Abschnitts sein.

#### 5.1.1 Definition (de Rham-Kohomologiegruppe)

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Definiere

$$Z^p M := \ker(d|_{\Omega_p M}) = \left\{ \omega \in \Omega_p M \mid d\omega = 0 \right\}$$

und

$$B^p M := \operatorname{im}(d|_{\Omega_{p-1} M}) = \left\{ \omega \in \Omega_p M \mid \exists \theta \in \Omega_{p-1} M \text{ mit } d\theta = \omega \right\}.$$

Beides sind Untervektorräume von  $\Omega_p M$  und aufgrund von  $d \circ d \equiv 0$  ist  $B^p M \subseteq Z^p M$ . Daher ist die  $p$ -te de Rham Kohomologiegruppe wohldefiniert als der Quotient

$$H_{dR}^p M := Z^p M / B^p M.$$

Da  $\Omega_p M$  eine  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur hat, ist  $H_{dR}^p M$  sogar ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. In der Notation der Elemente von  $H_{dR}^p M$  wird in Zukunft unterdrückt, daß es sich genau genommen um Äquivalenzklassen handelt. So wird z.B. einfach statt  $[\omega]$  nur  $\omega \in H_{dR}^p M$  geschrieben. Abbildungen von  $H_{dR}^p M$  dürfen nur von der Äquivalenzklasse und nicht von einem speziellen Repräsentanten abhängen, um wohldefiniert zu sein.

Genauso kann man die kompakt getragenen  $p$ -Formen betrachten und so die  $p$ -te, kompakt getragene de Rham-Kohomologiegruppe

$$H_{dR,c}^p M$$

erhalten. Für kompakte Mannigfaltigkeiten sind diese Gruppen gleich. Wird nicht explizit von den kompakt getragenen de Rham-Kohomologiegruppen gesprochen, so sind immer die nicht kompakt getragenen de Rham-Kohomologiegruppen gemeint. Den Zusammenhang zwischen diesen Gruppen, wenn die Mannigfaltigkeit nicht kompakt ist, klärt die Poincarédualität:

### 5.1.2 Satz (Poincarédualität)

Sei  $M$  eine orientierte,  $m$ -dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit. Die Abbildung

$$PD : H_{dR}^p M \longrightarrow (H_{dR,c}^{m-p} M)^*,$$

$$PD(\omega)(\eta) = \int_M \omega \wedge \eta$$

ist für  $0 \leq p \leq m$  ein Isomorphismus,  $(H_{dR,c}^{m-p} M)^*$  bezeichnet hier den Dualraum von  $H_{dR,c}^{m-p} M$ .

Wir betonen, daß die Poincarédualität für beliebige glatte Mannigfaltigkeiten gilt, also auch dann, wenn die de Rham-Kohomologiegruppen unendlichdimensionale Vektorräume sind. Die Umkehrung  $(H_{dR}^p M)^* \cong H_{dR,c}^{m-p} M$  gilt hingegen nur im Fall endlichdimensionaler de Rham-Kohomologiegruppen. Siehe für die Poincarédualität [Lee03] oder [BT95].

### 5.1.3 Lemma (Koexakte Formen)

Sei  $(M, g)$  eine orientierte,  $m$ -dimensionale, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $0 \leq p < m$ . Jede kgeschlossene  $p$ -Form ist genau dann koexakt, wenn  $H_{dR}^{m-p}M = 0$  ist.

**Beweis:** Das folgt sofort aus Lemma B.7.3, weil der Hodge-\*-Operator bijektiv ist.  $\square$

Die analoge Aussage gilt auch für kompakt getragene kgeschlossene Differentialformen.

### 5.1.4 Satz (Homotopie- und Homöomorphieinvarianz)

Zwei glatte Mannigfaltigkeiten haben isomorphe de Rhamsche Kohomologiegruppen, wenn sie diffeomorph oder homotopieäquivalent oder homöomorph zueinander sind.

Die Aussage über homöomorphe glatte Mannigfaltigkeiten ist durchaus überraschend, da die Definition der de Rham-Kohomologiegruppen eng an die  $C^\infty$ -Struktur der Mannigfaltigkeit gebunden ist. Es gab daher keinen Grund zur Annahme, daß verschiedene  $C^\infty$ -Strukturen auf derselben topologischen Mannigfaltigkeit dieselben de Rham-Kohomologiegruppen haben.

**Beweis:** Siehe [Lee03].  $\square$

### 5.1.5 Lemma (Kohomologie von 0-Mannigfaltigkeiten)

Sei  $M$  eine 0-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist  $\dim(H_{dR}^0M)$  gleich der Kardinalität von  $M$ , und alle anderen de Rhamschen Kohomologiegruppen verschwinden.

**Beweis:** Siehe [Lee03, Cor.15.13]  $\square$

### 5.1.6 Satz (Poincarélemma)

Sei  $U$  eine sternförmige offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ . Dann ist  $H_{dR}^pU = 0$  für  $p \geq 1$ .

**Beweis:** Siehe [Lee03, Thm.15.14]  $\square$

### 5.1.7 Folgerung (Lokale Exaktheit)

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit, dann besitzt jeder Punkt  $x \in M$  eine zusammenziehbare offene Umgebung. Sei  $\omega$  eine geschlossene  $p$ -Form,  $p \geq 1$ , dann existiert also für jeden Punkt  $x \in M$  eine Umgebung  $U$  von  $x$  auf der  $\omega$  exakt ist.

### 5.1.8 Komplexwertige de Rham-Kohomologie

In dieser Arbeit werden nicht nur reelle Differentialformen, sondern auch komplexwertige Differentialformen betrachtet. Für diese sollen nun die de Rham-Kohomologiegruppen definiert werden:

$$\begin{aligned} Z^p(M, \mathbb{C}) &:= \ker(d|_{\Omega_p(M, \mathbb{C})}) = \left\{ \omega \in \Omega_p(M, \mathbb{C}) \mid d\omega = 0 \right\}, \\ B^p(M, \mathbb{C}) &:= \operatorname{im}(d|_{\Omega_{p-1}(M, \mathbb{C})}) = \left\{ \omega \in \Omega_p(M, \mathbb{C}) \mid \exists \theta \in \Omega_{p-1}(M, \mathbb{C}), d\theta = \omega \right\}, \\ H_{dR}^p(M, \mathbb{C}) &:= Z^p(M, \mathbb{C}) / B^p(M, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Analog definiert man die  $p$ -te, kompakt getragene und komplexwertige de Rham-Kohomologiegruppe  $H_{dR,c}^p(M, \mathbb{C})$ .

Mit Hilfe der Abbildung

$$\begin{aligned} H_{dR}^p M \times \mathbb{C} &\longrightarrow H_{dR}^p(M, \mathbb{C}) \\ (\omega, z = x + iy) &\longmapsto z\omega = x\omega + iy\omega \end{aligned}$$

und der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes kann

$$H_{dR}^p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong H_{dR}^p(M, \mathbb{C})$$

gezeigt werden bzw. für den Fall von kompakt getragenen Differentialformen

$$H_{dR,c}^p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong H_{dR,c}^p(M, \mathbb{C}).$$

Eine geschlossene komplexwertige Form ist genau dann exakt, wenn ihr Real- und Imaginärteil exakt sind. Daher gibt es genau dann eine nicht exakte, geschlossene, komplexwertige Form, wenn es eine nicht exakte, geschlossene, reelle Form gibt. Wie man sieht, enthält die komplexwertige de Rham-Kohomologie keine neuen Informationen. Wenn es also um die Exaktheit geschlossener komplexwertiger Formen geht, reicht es völlig aus, die reelle de Rham-Kohomologie zu betrachten.

### 5.1.9 Satz (Existenz nicht exakter Feldstärketensoren)

Sei  $(M, g)$  eine 4-dimensionale, orientierte, global hyperbolische Mannigfaltigkeit. Dann ist  $H_{dR}^2 M \neq 0$  gleichbedeutend dazu, daß es einen nicht exakten Feldstärketensor gibt, der die quellenfreien Maxwellgleichungen erfüllt.

**Beweis:** „ $\Leftarrow$ “: Sei  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  ein nicht exakter Feldstärketensor, dann ist  $H_{dR}^2 M \neq 0$  sofort klar nach Definition.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $H_{dR}^2 M \neq 0$ . Wir zeigen, daß es in jeder Äquivalenzklasse ungleich Null einen Repräsentanten gibt, der die Maxwellgleichungen erfüllt. Sei  $\omega \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  mit  $d\omega = 0$  und  $[\omega] \neq 0 \in H_{dR}^2 M$ . Gesucht ist ein  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  mit  $dF = 0$ ,  $-\delta F = 0$  und  $[F] = [\omega]$ . Aus  $[F] = [\omega]$  folgt  $F = \omega + d\theta$  für ein  $\theta \in \Omega_1(M, \mathbb{C})$ , aus  $\delta F = 0$  folgt dann  $0 = \delta\omega + \delta d\theta$ . Gesucht wird daher eine 1-Form  $\theta$  mit  $-\delta d\theta = \delta\omega$ . Sei  $\Sigma$  eine raumartige Cauchyhyperfläche und  $\Sigma_Z, \Sigma_V$  jeweils eine raumartige Cauchyhyperfläche in der Zukunft und in der Vergangenheit von  $\Sigma$ . Es gilt  $I_+^M(\Sigma_V) \cup I_-^M(\Sigma_Z) = M$ . Bezeichne  $\chi^+, \chi^-$  die zu  $I_+^M(\Sigma_V), I_-^M(\Sigma_Z)$  zugeordnete Zerlegung der Eins, dann ist  $\delta\omega_+ := \delta(\chi^+\omega)$  vergangenheits- und  $\delta\omega_- := \delta(\chi^-\omega)$  zukunfts-kompakt. Nach Satz 4.1.3(a) existieren  $\theta_+, \theta_- \in \Omega_1(M, \mathbb{C})$  mit  $-\delta d\theta_+ = \delta\omega_+$  und  $-\delta d\theta_- = \delta\omega_-$ .  $\theta := \theta_+ + \theta_-$  ist damit eine Lösung von  $-\delta d\theta = \delta\omega$  und  $F := \omega + d\theta$  ist dann der gewünschte, nicht exakte Feldstärketensor.  $\square$

## 5.2 Singuläre Homologie

Wie in Satz 5.1.4 bereits festgestellt wurde, ist die Existenz von exakten Formen in Wirklichkeit eine Frage der Topologie. Das topologische Konzept, was den Zusammenhang zwischen der de Rham-Kohomologie und der Topologie der Mannigfaltigkeit herstellen kann, ist dasjenige der singulären Homologie.

### 5.2.1 Definition (Standardsimplex)

Sei  $p \in \mathbb{N}$ , dann ist für  $p > 0$  der Standard-p-Simplex definiert als die Menge

$$\Delta_p = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i \in \mathbb{R}^p \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ und } \sum_{i=1}^p \lambda_i \leq 1 \right\},$$

wobei  $\left( \sum_{i=1}^p e_i \right)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^p$  ist und für  $p = 0$  definiert man

$$\Delta_0 := \{0\}.$$

Die  $i$ -te Kantenabbildung  $k_{i,p} : \Delta_p \longrightarrow \Delta_{p+1}$  des Standard- $(p+1)$ -Simplex wird für  $p \geq 1$  definiert durch

$$k_{0,p}\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i\right) = \left(1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i, \overset{p}{\mathbf{a}} \lambda_i\right),$$

$$k_{j,p}\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i\right) = \left(\overset{j-1}{\mathbf{a}} \lambda_i, 0, \overset{p}{\mathbf{a}} \lambda_i\right)$$

und für  $p = 0$  durch

$$k_{0,0}(0) = 1,$$

$$k_{1,0}(0) = 0.$$

Der Standard-1-Simplex ist also das Intervall  $[0,1]$ , der Standard-2-Simplex das Dreieck im  $\mathbb{R}^2$  mit den Ecken  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  und  $(0,1)$  zusammen mit seinem Inneren, der Standard-3-Simplex ist der ausgefüllte Tetraeder im  $\mathbb{R}^3$  mit den Eckpunkten  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  und  $(0,0,1)$ , usw.

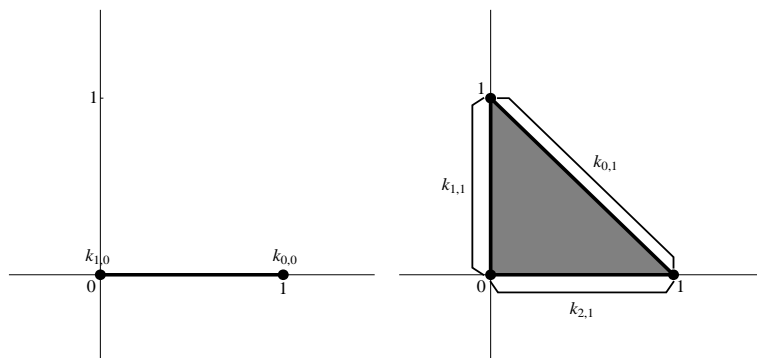


Abb.: Der Standard-1-Simplex und der Standard-2-Simplex mit ihren Kanten.

Die  $i$ -te Kantenabbildung gibt bildlich gesprochen die Kante wieder, die dem  $i$ -ten Eckpunkt gegenüberliegt. So gilt z.B. für die Kante  $k_{0,1} : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ , daß  $k_{0,1}(\lambda) = (1 - \lambda, \lambda)$  und somit ist  $k_{0,1}([0, 1])$  die gerade Strecke zwischen den Punkten  $(1,0)$  und  $(0,1)$ , also die dem Nullpunkt gegenüberliegende Seite im Dreieck.

### 5.2.2 Definition (Singulärer $p$ -Simplex)

Eine stetige Abbildung

$$\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$$

in einen topologischen Raum  $X$  heißt ein singulärer  $p$ -Simplex von  $X$ .

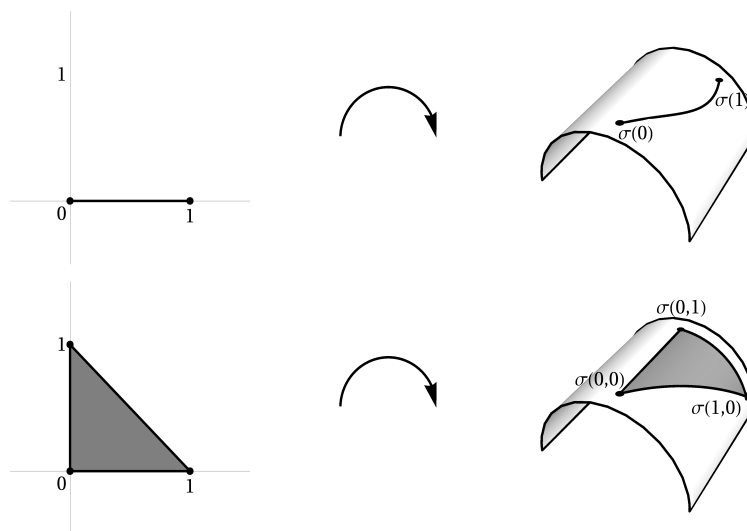


Abb.: Beispiele für einen 1-Simplex und einen 2-Simplex.

Die Bezeichnung singulär rührt daher, daß für die Abbildung nur die Stetigkeit gefordert wird. Sie muß weder injektiv noch surjektiv sein oder andere Eigenschaften außer der Stetigkeit aufweisen.

### 5.2.3 Definition (Singuläre Kettengruppe)

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären  $p$ -Simplex in  $X$  erzeugt wird, heißt die singuläre Kettengruppe  $C_p X$  von  $X$  in Dimension  $p$ . Ein Element aus dieser Gruppe heißt singuläre  $p$ -Kette mit ganzzahligen Koeffizienten.

In Formeln ist also

$$C_p X = \left\{ \sum_{i=1}^n \mu_i \sigma^i \mid n \in \mathbb{N}, \mu_i \in \mathbb{Z} \text{ und } \sigma^i \text{ ist singulärer } p\text{-Simplex} \right\}.$$

### 5.2.4 Definition (Rand, Randoperator, Zykel)

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\sigma$  ein singulärer  $p$ -Simplex,  $p \in \mathbb{N}$ .

- Ist  $p \geq 1$ , so ist die  $i$ -te Kante von  $\sigma$  definiert durch den singulären  $(p-1)$ -Simplex

$$\sigma_i = \sigma \circ k_{i,p-1}.$$



- Der Rand von  $\sigma$  wird definiert durch die singuläre  $(p-1)$ -Kette

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_i = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ k_{i,p-1}.$$

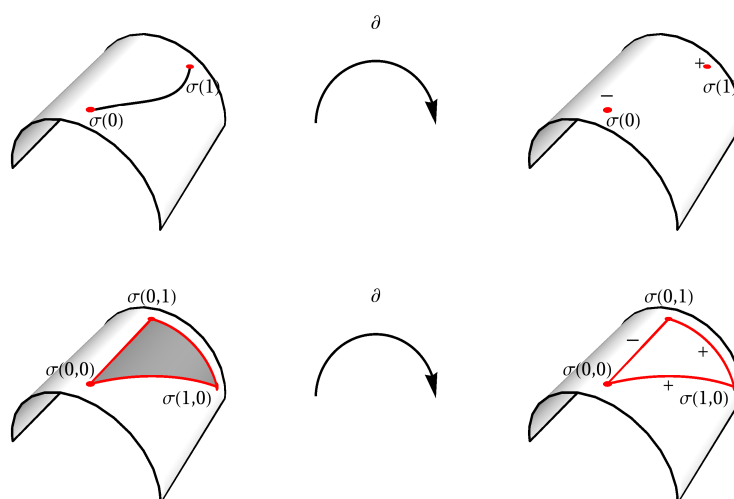


Abb.: Die Ränder eines 1-Simplex und eines 2-Simplex.

- Durch lineare Fortsetzung erhält man den Randoperator

$$\partial : C_p X \longrightarrow C_{p-1} X$$

$$c \longmapsto \partial c = \partial \left( \sum_{i=1}^n \mu_i \sigma^i \right) = \sum_{i=1}^n \mu_i \partial \sigma^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^p (-1)^j \mu_i \sigma_j^i.$$

- Eine singuläre  $p$ -Kette  $c$  mit  $\partial c = 0$  nennt man einen singulären  $p$ -Zykel.
- Eine singuläre  $p$ -Kette  $c$  mit  $c = \partial z$  für eine singuläre  $(p+1)$ -Kette  $z$  heißt singulärer  $p$ -Rand.

Für den Randoperator gilt  $\partial \circ \partial = 0$  und für  $p = 0$  setzt man schlicht  $\partial = 0$ . Ebenso setzt man auch  $\partial \Delta_0 = 0$ . Zum Beispiel ist der 1-Simplex  $\sigma : [0, 1] = \Delta_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \longmapsto \sigma(\varphi) = (\cos(2\pi\varphi), \sin(2\pi\varphi))$  ist ein 1-Zykel, denn  $\partial\sigma(0) = (\cos(2\pi), \sin(2\pi)) - (\cos(0), \sin(0)) = 0$ .

### 5.2.5 Definition (Singuläre Homologiegruppe)

Sei  $X$  ein topologischer Raum, dann definiert man

$$Z_p X := \ker(\partial : C_p \longrightarrow C_{p-1} X) = \{c \in C_p X \mid \partial c = 0\},$$

die Gruppe der singulären  $p$ -Zykel,

$$B_p X := \operatorname{im}(\partial : C_{p+1} X \longrightarrow C_p X) = \{c \in C_p X \mid c = \partial z \text{ für ein } z \in C_{p+1} X\},$$

die Gruppe der singulären  $p$ -Ränder und

$$H_p X := Z_p X / B_p X,$$

die  $p$ -te singuläre Homologiegruppe von  $X$ .

Genauso wie bei den de Rham-Kohomologiegruppen wird bei den Elementen der Homologiegruppen in der Notation unterdrückt, daß es sich streng genommen um Äquivalenzklassen handelt. Zykel, welche zu derselben Äquivalenzklasse gehören, sich also nur um einen Rand unterscheiden, nennt man *homolog*. Abbildungen, die auf der Homologiegruppe definiert sind, dürfen ebenfalls nur von der Äquivalenzklasse abhängen, um wohldefiniert zu sein. Da in dieser Arbeit nur die singuläre Homologie vorkommt, wird mit Homologie immer die singuläre Homologie gemeint sein.

### 5.2.6 Beispiele

- Die Homologiegruppen von  $\mathbb{R}$  verschwinden für  $p > 0$ . Für  $p = 0$  ist

$$H_0 \mathbb{R} \cong \mathbb{Z}$$

- Die Homologiegruppen der Sphären  $S^n$  werden für  $n \geq 1$  gegeben durch

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } p = 0 \text{ oder } p = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

### 5.2.7 Satz (Homöomorphie- und Homotopieinvarianz)

- Sind zwei topologische Räume homöomorph, so haben sie in allen Dimensionen isomorphe Homologiegruppen.
- Sind zwei topologische Räume homotopieäquivalent, so haben sie in allen Dimensionen isomorphe Homologiegruppen.

**Beweis:** Siehe [SZ94, Satz 9.1.9] und [SZ94, Satz 9.3.3]. □

Die singuläre Homologie ist also eine charakteristische Größe eines topologischen Raumes und nur von seiner Topologie abhängig. Darüber hinaus ist sie sogar eine Homotopieinvariante.

### 5.2.8 Satz (Homologie eines Punktes)

Sei  $X = \{x\}$  ein einpunktiger topologischer Raum, so ist

$$H_p X = 0 \text{ für } p \neq 0$$

und  $H_0 X$  ist die von  $x$  erzeugte, freie zyklische Gruppe.

**Beweis:** Siehe [SZ94, Satz 9.1.10]. □

Mit Satz 5.2.7 folgt hieraus, daß die  $p$ -ten Homologiegruppen eines zusammenziehbaren, topologischen Raumes für  $p \neq 0$  verschwinden.

### 5.2.9 Bemerkung

Die bisher gemachten Definitionen können auch ganz allgemein für eine beliebige abelsche Gruppe  $G$  anstelle von  $\mathbb{Z}$  gemacht werden. Man schreibt dann  $C_p(X; G)$ ,  $Z_p(X; G)$ ,  $B_p(X; G)$  und  $H_p(X; G)$  für die entsprechenden  $p$ -ten Gruppen mit Koeffizienten in  $G$ . Ist die abelsche Gruppe  $G$  sogar ein Körper, so wird die Homologiegruppe ein Vektorraum über diesen Körper.

### 5.2.10 Satz (Universelles Koeffiziententheorem)

Gegeben ein topologischer Raum  $X$  und eine abelsche Gruppe  $G$ , so gilt

$$H_p(X; G) \cong H_p X \otimes_{\mathbb{Z}} G \oplus H_{p-1} X \tau_{\mathbb{Z}} G,$$

wobei  $\tau_{\mathbb{Z}}$  das sogenannte Torsionsprodukt, siehe [Soeb] oder [Hat02], bezeichne. Insbesondere gilt für eine torsionsfreie, abelsche Gruppe  $G$

$$H_p(X; G) \cong H_p X \otimes_{\mathbb{Z}} G.$$

**Beweis:** Siehe [Soeb, Satz 2.5.2] oder [Hat02, 3.A]. □

Ist also  $H_p X = 0$ , dann gilt auch  $H_p(X; G) = 0$  für alle torsionsfreien, abelschen Gruppen  $G$ , die Umkehrung gilt jedoch nicht. Andererseits kann man aber aus  $H_p(X; G) \neq 0$  folgern, daß  $H_p X \neq 0$  gelten muß.

### 5.2.11 Beispiele

- Die Homologiegruppen mit reellen Koeffizienten von  $\mathbb{R}$  verschwinden für  $p > 0$ . Für  $p = 0$  ist

$$H_0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

- Die Homologiegruppen mit reellen Koeffizienten der Sphären  $S^n$  werden für  $n \geq 1$  gegeben durch

$$H_p(S^n; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } p = 0 \text{ oder } p = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

### 5.2.12 Satz (Künnethformel)

Seien  $X$  und  $Y$  zwei beliebige, topologische Räume und  $K$  ein Körper, dann gilt für alle nicht negativen ganzen Zahlen  $n$

$$H_n(X \times Y; K) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(X; K) \otimes_K H_q(Y; K).$$

**Beweis:** Siehe [Soeb, Satz 2.6.19], [Hat02, Cor.3B.7] oder [SZ94, 12.5.5].  $\square$

### 5.2.13 Beispiele

- Die Homologiegruppen mit reellen Koeffizienten des Torus  $T^2 \cong S^1 \times S^1$  werden gegeben durch

$$H_p(T^2; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } p = 0 \text{ oder } p = 2, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{für } p = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Die Homologiegruppen mit reellen Koeffizienten des 3-Torus  $T^3 \cong S^1 \times S^1 \times S^1 \cong S^1 \times T^2$  werden gegeben durch

$$H_p(T^3; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } p = 0 \text{ oder } p = 3, \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{für } p = 1 \text{ oder } p = 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

### 5.2.14 Satz (von Hurewicz)

Sei  $X$  ein einfach zusammenhängender topologischer Raum und  $n \geq 2$ . Verschwinden die ersten  $n$  Homotopiegruppen  $\pi_n X$  und  $\pi_{n+1} X \neq 0$ , so verschwinden auch die ersten  $n$  singulären Homologiegruppen  $H_n X$  und es gilt

$$\pi_{n+1} X \cong H_{n+1} X.$$

**Beweis:** Siehe [Hat02, Thm.4.32]. □

Dieser Satz gibt also den Zusammenhang zwischen Homotopie und singulärer Homologie eines topologischen Raumes wieder. Über den Satz von Hurewicz hinaus kann man aber keine weitere schöne Beziehungen zwischen den Homotopie- und Homologiegruppen erwarten. Als Beispiel dienen hierfür die Sphären  $S^n$  und die Eilenberg-MacLane Räume, siehe wieder [Hat02].

## 5.3 Integration von Formen über Ketten

Ist der topologische Raum  $X$  eine glatte Mannigfaltigkeit  $M$ , so kann man die entsprechenden Gruppen für glatte Abbildungen  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$  definieren und zur glatten singulären Homologie übergehen. Als Zusatz erhalten die Gruppen noch als oberen Index das Symbol „ $\infty$ “. Glatte  $p$ -Ketten sind hervorragend für die Integration von  $p$ -Formen geeignet und glatte Zyklen weisen einen interessanten Zusammenhang zu geschlossenen  $p$ -Formen auf, wie in diesem Abschnitt gezeigt werden soll.

### 5.3.1 Bemerkung

Den abstrakten Begriff eines glatten  $p$ -Zykels kann man sich mit Hilfe von Triangularisierungen veranschaulichen. Sei  $M$  eine glatte,  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $S \subset M$  eine kompakte, orientierbare, eingebettete,  $p$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, dann ist eine glatte Triangularisierung von  $S$  ein glatter  $p$ -Zykel  $z = \sum_{i=1}^n \sigma^i$  in  $M$ , so daß gelten:

- Jedes  $\sigma^i : \Delta_p \rightarrow S$  ist eine orientierungserhaltende, glatte Einbettung.
- Wenn  $i \neq j$  ist, dann ist  $\sigma^i(\text{Int}\Delta_p) \cap \sigma^j(\text{Int}\Delta_p) = \emptyset$ .
- $S = \bigcup_{i=1}^n \sigma^i(\Delta_p)$ .

Es kann gezeigt werden, daß jede kompakte, orientierbare und glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit eine glatte Triangularisierung erlaubt, d.h. man kann glatte p-Zykel als eine Verallgemeinerung von p-dimensionalen, kompakten, orientierbaren und glatten eingebetteten Untermannigfaltigkeiten auffassen. Für glatte p-Zykel mit reellen Koeffizienten hat R. Thom einen tieferen Zusammenhang bewiesen: Jeder p-Zykel in  $H_p(M; \mathbb{R})$  ist homolog zu einer endlichen, formalen Summe  $\sum_{i=1}^n r_i N_i$ , wobei  $r_i \in \mathbb{R}$  und die  $N_i$  sind p-dimensionale, kompakte, orientierte und glatte eingebettete Untermannigfaltigkeiten ohne Rand von  $M$ .

### 5.3.2 Satz (Singuläre vs. glatte singuläre Homologie)

Für jede glatte Mannigfaltigkeit  $M$  gilt für alle natürlichen Zahlen  $p$

$$H_p M \cong H_p^\infty M.$$

Der Beweis dieses Satzes in [Lee03, Thm.16.6] ist übrigens genauso anwendbar auf die singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{R}$ , also

$$H_p(M; \mathbb{R}) \cong H_p^\infty(M; \mathbb{R}).$$

Dies liegt daran, daß im besagtem Beweis zu jedem p-Simplex eine Homotopie zu einem glatten p-Simplex konstruiert wird ([Lee03, Thm.16.7]), welche spezielle Eigenschaften u.a. bei Kantenbildung aufweist. Diese wird dann linear auf p-Ketten fortgesetzt und mit dieser Abbildung wird daraufhin der Isomorphismus gebildet. Dieser Satz impliziert vor allem, daß man nicht streng zwischen Zykeln und glatten Zykeln unterscheiden muß.

### 5.3.3 Definition (Integral einer Form über eine Kette)

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $\omega$  eine p-Form auf  $M$  und  $\sigma$  ein glatter p-Simplex in  $M$ . Dann wird das Integral von  $\omega$  über  $\sigma$  definiert durch

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta_p} \sigma^{pb} \omega.$$

Für eine glatte p-Kette  $c = \sum_{i=1}^n \mu_i \sigma^i$  ist das Integral von  $\omega$  über  $c$  als lineare Fortsetzung definiert:

$$\int_c \omega := \sum_{i=1}^n \mu_i \int_{\sigma^i} \omega.$$

Das Integral ist wohldefiniert, da  $\Delta_p$  eine glatte  $p$ -Untermannigfaltigkeit mit Ecken, eingebettet im  $\mathbb{R}^p$  ist und auch dessen Orientierung erbt. Man kann  $\Delta_p$  auch einfach als Integrationsbereich betrachten.

### 5.3.4 Bemerkung

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit, dann lassen sich wegen  $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$  ein paar nützliche und strenge Aussagen über die Homologie von  $M$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{R}$  machen. Nach der Künnethformel gilt für alle natürlichen Zahlen  $p$

$$H_p(M; \mathbb{R}) \cong H_0(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H_p(\Sigma; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} H_p(\Sigma; \mathbb{R}) \cong H_p(\Sigma; \mathbb{R}).$$

Dies hat unmittelbar zur Folge, daß jeder  $p$ -Zykel in  $M$  homolog zu einem  $p$ -Zykel in  $\Sigma$  sein muß. Bezeichne nämlich  $\varphi$  den Isomorphismus von  $H_p(M; \mathbb{R})$  nach  $H_p(\Sigma; \mathbb{R})$  und sei  $z_\Sigma$  ein  $p$ -Zykel in  $\Sigma$ .  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  bilden  $p$ -Zykel auf  $p$ -Zykel und  $p$ -Ränder auf  $p$ -Ränder ab. Insbesondere werden nicht homologe  $p$ -Zykel von  $\Sigma$  auf nicht homologe  $p$ -Zykel von  $M$  abgebildet. So ist z.B.  $\varphi^{-1}(z_\Sigma) = z$  für einen  $p$ -Zykel  $z$  in  $M$ . Da  $z_\Sigma$  auch ein  $p$ -Zykel in  $M$  ist, muß  $[z_\Sigma] = [z']$  für ein  $z'$  aus dem Bild von  $\varphi^{-1}$  gelten und aus der Bijektivität von  $\varphi$  folgt dann die Aussage. Dieselbe Aussage ist mit den gleichen Argumenten auch richtig für die glatten  $p$ -Zykel, wie man mit Hilfe von Schnittkarten zeigen kann. Ist also  $z \in H_p^\infty(M; \mathbb{R})$ , so folgt für  $\omega \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$

$$\int_z \omega = \int_{z_\Sigma} \omega = \int_{z_\Sigma} \iota^{pb} \omega,$$

wobei  $\iota$  die Einbettung  $\Sigma \rightarrow M$  bezeichne und  $z_\Sigma \in H_p^\infty(M; \mathbb{R})$  denjenigen Zykel, der ganz in  $\Sigma$  liegt und für den  $[z] = [z_\Sigma]$  gilt.

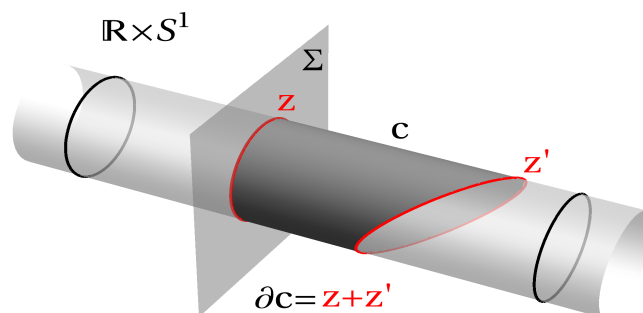


Abb.: Veranschaulichendes Beispiel zur Bemerkung.

### 5.3.5 Satz (Stokes für Ketten)

Sei  $c \in C_p^\infty(M; \mathbb{R})$  eine glatte  $p$ -Kette in einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  und  $\omega \in \Omega_{p-1}M$  eine  $(p-1)$ -Form. Dann gilt

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

**Beweis:** Siehe [Lee03, Thm.16.10] oder [War83, 4.7].  $\square$

### 5.3.6 Satz (von de Rham)

Für jede glatte Mannigfaltigkeit  $M$  und jede natürliche Zahl  $p$  ist der de Rham-Homomorphismus

$$\begin{aligned} dRH : H_{dR}^p M &\longrightarrow (H_p^\infty(M; \mathbb{R}))^* \\ \omega &\longmapsto (c \longmapsto (dRH(\omega))(c) = \int_c \omega) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.  $(H_p^\infty(M; \mathbb{R}))^*$  bezeichnet hier wieder den Dualraum von  $H_p^\infty(M; \mathbb{R})$

**Beweis:** Siehe [Lee03, Thm.16.12] oder [War83, Thm.4.17].  $\square$

In der Literatur steht anstelle von  $(H_p^\infty(M; \mathbb{R}))^*$  die Kohomologiegruppe  $H^p(M; \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_p M, \mathbb{R})$ . Nach Satz 5.3.2 und weil  $\mathbb{R}$  ein Körper der Charakteristik Null ist, folgt aber  $\text{Hom}(H_p M, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(H_p^\infty(M; \mathbb{R}), \mathbb{R})$ .

### 5.3.7 Folgerung

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Gibt es eine Zuordnung von reellen Zahlen  $\pi(z)$  zu  $p$ -Zykeln  $z \in H_p^\infty(M; \mathbb{R})$ , so daß für  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $z, z' \in H_p^\infty(M; \mathbb{R})$   $\pi(\lambda z + \mu z') = \lambda \pi(z) + \mu \pi(z')$  und  $\pi(\text{Rand}) = 0$  erfüllt sind, dann gibt es eine geschlossene  $p$ -Form  $\omega$  mit

$$\int_z \omega = \pi(z).$$

Ist  $\dim(H_p^\infty(M; \mathbb{R})) = b_p$ ,  $(\mathbf{a}_{i=1}^{b_p} z_i)$  eine Basis von  $H_p^\infty(M; \mathbb{R})$  und  $\mathbf{a}_{i=1}^{b_p} \pi_i$  irgendwelche reellen Zahlen, dann gibt es eine geschlossene  $p$ -Form  $\omega$  mit

$$\int_{z_i} \omega = \pi_i.$$

**Beweis:** Folgt aus der Surjektivität des de Rham-Homomorphismus.  $\square$



### 5.3.8 Folgerung (Exaktheitskriterium für Formen)

Sei  $M$  eine glatte,  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \Omega_p M$  eine geschlossene  $p$ -Form,  $1 \leq p \leq m$ .  $\omega$  ist exakt genau dann, wenn

$$\int_z \omega = 0$$

für alle glatten  $p$ -Zykel  $z \in H_p^\infty(M; \mathbb{R})$  ist.

Ist  $H_p^\infty(M; \mathbb{R})$  endlichdimensional, dann reicht es, diese Aussage auf einer Basis  $(\mathbf{a}_{i=1}^{b_p} z_i)$  von  $H_p^\infty(M; \mathbb{R})$  zu prüfen. Die reellen Zahlen  $\pi_i(\omega) := \int_{z_i} \omega$  heißen die Perioden von  $\omega$  bzgl. dieser Basis.

Man beachte, daß wenn das Exaktheitskriterium für eine kompakt getragene  $p$ -Form  $\omega \in \Omega_{pc} M$  erfüllt ist, diese nicht notwendigerweise kompakt exakt sein muß, d.h.  $\omega = d\theta$ ,  $\theta \in \Omega_{p-1} M$ , aber nicht notwendigerweise  $\theta \in \Omega_{(p-1)c} M$ . Dies hat zur Folge, daß obwohl  $\omega \neq 0 \in H_{dR,c}^p M$  gilt, dennoch  $\omega = 0 \in H_{dR}^p M$  gelten kann.

Um zu prüfen ob eine komplexwertige Differentialform exakt ist, genügt es nach den Aussagen von Unterabschnitt 5.1.8, die Integrale über die reellen Zykel zu betrachten.

### 5.3.9 Lemma

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit und  $\Sigma$  eine Cauchyhyperfläche. Für alle natürlichen Zahlen  $p$  gilt

$$H_{dR}^p M \cong H_{dR}^p \Sigma.$$

**Beweis:** Da  $(M, g)$  global hyperbolisch ist, gilt  $M \cong \mathbb{R} \times \Sigma$ . Mit der Künnethformel 5.2.12 folgt  $H_p(M; \mathbb{R}) \cong H_p(\Sigma; \mathbb{R})$  und da isomorphe Räume isomorphe Dualräume haben, folgt mit dem Satz von de Rham

$$H_{dR}^p M \cong (H_p(M; \mathbb{R}))^* \cong (H_p(\Sigma; \mathbb{R}))^* \cong H_{dR}^p \Sigma.$$

□

Aus diesem Lemma folgt unmittelbar, daß die  $m$ -te de Rhamsche Kohomologiegruppe einer  $m$ -dimensionalen global hyperbolischen Raumzeit verschwindet. Man beachte auch, daß diese Aussage keinesfalls für die kompakt getragene Kohomologie richtig sein muß.

### 5.3.10 Bemerkung

Als weitere Anwendung wird nun gezeigt, daß für  $H_{dR}^1 M = 0$  jede Lösung des Cauchyproblems 3.2 des Maxwellfeldes exakt ist.  $H_{dR}^1 M = 0$  impliziert nach Lemma 5.3.9 und der Poincarédualität 5.1.2

$$0 = H_{dR}^1 M \cong H_{dR}^1 \Sigma \cong (H_{dR,c}^2 \Sigma)^* \cong H_{dR,c}^2 \Sigma.$$

Jede geschlossene kompakt getragene 2-Form auf  $\Sigma$  ist also exakt, d.h. jedes magnetische Feld  $B \in \Omega_{2c}(\Sigma, \mathbb{C})$ , was als Cauchydatum in Satz 3.2 vorgegeben wird, ist exakt

$$B = dA, \quad A \in \Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C}).$$

Dies hat zur Folge, daß jede Lösung  $F \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  von Satz 3.2 exakt ist. Dafür reicht es nach Unterabschnitt 5.1.8 aus, zu zeigen, daß jede reelle Lösung von Satz 3.2 exakt ist. Nach Bemerkung 5.3.4 ist jeder glatte 2-Zykel  $z$  in  $M$  homolog zu einem glatten 2-Zykel  $z_\Sigma$ , der vollständig in  $\Sigma$  enthalten ist. Sei  $F$  eine reellwertige Lösung von Satz 3.2, dann ist

$$\int_z F = \int_{z_\Sigma} F = \int_{z_\Sigma} i^{pb} F = - \int_{z_\Sigma} B = - \int_{z_\Sigma} dA = - \int_{\partial z_\Sigma} A = 0.$$

Nach Folgerung 5.3.8 ist  $F$  exakt. Genau dieselbe Argumentation zeigt auch, daß jede geschlossene und kompakt getragene 2-Form exakt ist, siehe Unterabschnitt 4.3.2.

# Kapitel 6

## Die Quantisierung des Feldstärketensors

In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß das Cauchyproblem des Feldstärketensors wohlgestellt und lösbar ist, ohne elektromagnetische Vektorpotentiale einzuführen. Des weiteren wurde dort die Feldalgebra des Feldstärketensors konstruiert mit dem Mangel, daß nicht genau bekannt war, was die Kommutatorrelation sein soll.

In Kapitel 4 wurde das elektromagnetische Vektorpotential quantisiert und die so erhaltene Feldalgebra des Potentials mit der in Kapitel 3 konstruierten Feldalgebra des Feldstärketensors verglichen, um eine Idee für den zu wählenden Kommutator zu erhalten.

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Methode zur Konstruktion der Feldalgebra des Feldstärketensors angeben, die Struktur dieser diskutieren und beweisen, daß der zu wählende Kommutator wirklich der Lichnerowicz-kommutator (4.4.1) ist.

Sei daher für das ganze Kapitel  $(M, g)$  eine 4-dimensionale, orientierte, global hyperbolische Raumzeit mit beliebiger Topologie und  $\iota : \Sigma \rightarrow M$  eine raumartige glatte Cauchyhyperfläche von  $M$ .

### 6.1 Die universelle Algebra der Feldstärken

Wir geben nun die Realisierung der Feldalgebra des Feldstärketensors durch die Konstruktion der universellen Algebra eines Systems lokaler Feldstärkealgebren an. Dies überträgt im Wesentlichen die Tatsache, daß jeder Feldstärketensor lokal durch Potentiale darstellbar ist, auf die Ebene von Algebren. Wir folgen dabei den Ideen von [Fre89], [Fre], [Hol08] und [KÖ1]. Die Konstruktion erfolgt in mehreren Schritten.

### 6.1.1 Schritt 1: Zerlegung der Raumzeit

Da  $(M, g)$  global hyperbolisch mit raumartiger glatter Cauchyhyperfläche  $\Sigma$  ist, folgt aus Satz C.3.7, daß jeder Punkt  $p \in M$  in einer raumartigen glatten Cauchyhyperfläche  $\Sigma'$  liegt, die diffeomorph zu  $\Sigma$  ist oder schon gleich. Nach Folgerung 5.1.7 existiert um jeden Punkt  $q \in \Sigma'$  eine zusammenziehbare, in der Topologie von  $\Sigma'$  offene Umgebung  $S \Subset \Sigma'$ .  $S$  ist eine raumartige, achronale und glatte Hyperfläche in  $M$  und daher nach [O'N83, Lem.14.42] akausal. Nach [O'N83, Lem.14.43] gilt, daß die Cauchyentwicklung  $D^M(S)$  von  $S$  in der Topologie von  $M$  offen und global hyperbolisch ist. Es folgt weiter, daß  $D^M(S) \cong \mathbb{R} \times S$  und daher zusammenziehbar ist. Mit dieser Konstruktion läßt sich nun eine Überdeckung von  $M$

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

durch zusammenziehbare global hyperbolische Raumzeiten  $(M_i, g)$ ,  $i \in I$ , finden und insbesondere die Existenz einer solchen Überdeckung zeigen.

### 6.1.2 Schritt 2: Die lokalen Feldalgebren

Auf jeder der zusammenziehbaren global hyperbolischen Raumzeiten  $(M_i, g)$ ,  $i \in I$ , konstruiere man die lokalen Feldalgebren  $\mathfrak{F}(M_i)$  der Feldstärkeoperatoren genau nach der Vorgehensweise, wie sie in Abschnitt 3.5 beschrieben wurde. Insbesondere gilt nach Abschnitt 4.4 die Gleichheit  $\mathfrak{F}(M_i) = \mathfrak{A}(M_i)$  und daher weiß man, das als Kommutatorrelation der Lichnerowiczkommutator (4.4.1) zu verwenden ist.

Die lokalen Feldalgebren  $\mathfrak{F}(M_i)$  des Feldstärketensors sind also freie  $*$ -Algebren über  $\mathbb{C}$  mit Eins, deren Erzeuger die lokal verschmierte Feldoperatoren  $\widehat{\mathbf{F}}_i(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_{2c}M_i$ , sind. Es werden nach Konstruktion die Relationen

$$\begin{aligned} d\widehat{\mathbf{F}}_i(\eta) &:= \widehat{\mathbf{F}}_i(\delta\eta) = 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{3c}(M_i, \mathbb{C}) \\ -\delta\widehat{\mathbf{F}}_i(\theta) &:= \widehat{\mathbf{F}}_i(-d\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \Omega_{1c}(M_i, \mathbb{C}), \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

und

$$\left[ \widehat{\mathbf{F}}_i(\omega), \widehat{\mathbf{F}}_i(\omega') \right] = i\hbar \left( \int_{M_i} G\omega \wedge *d\delta\omega' \right) 1_{\mathfrak{F}(M_i)} \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega_{2c}(M_i, \mathbb{C}) \quad (6.1.2)$$

erfüllt. Da  $\text{supp}(\omega), \text{supp}(\omega') \subseteq M_i$  sind, kann die Integration auch auf die gesamte Raumzeit  $M$  ausgedehnt werden. Weiter gilt

$$\widehat{\mathbf{F}}_i(\omega) = \widehat{\mathbf{F}}_j(\omega) \quad (6.1.3)$$

falls  $\text{supp}(\omega) \subseteq M_i \cap M_j$  ist.

### 6.1.3 Schritt 3: Die universelle Algebra

Ist  $M_i \subseteq M_j$ , dann gilt  $\mathfrak{F}(M_i) \subseteq \mathfrak{F}(M_j)$ , da Formen aus  $\Omega_{2c}(M_i, \mathbb{C})$  durch Null glatt auf  $M_j$  fortgesetzt als Formen  $\omega \in \Omega_{2c}(M_j, \mathbb{C})$  aufgefaßt werden können. Demnach gibt es für Mengen der Überdeckung mit  $M_i \subseteq M_j$  Algebrenhomomorphismen  $\alpha_{ij} : \mathfrak{F}(M_i) \rightarrow \mathfrak{F}(M_j)$ , nämlich einfach die Inklusionen. Für diese Algebrenhomomorphismen gelten auch die Kompabilitätsbedingungen  $\alpha_{jk} \circ \alpha_{ij} = \alpha_{ik}$  für  $M_i \subseteq M_j \subseteq M_k$ .

Wegen dieser genannten Eigenschaften wird von dem System der lokalen Feldalgebren  $\mathfrak{F}(M_i)$ ,  $i \in I$ , eine  $*$ -Algebra mit Eins  $\mathfrak{F}_u(M)$  definiert, die durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert wird (siehe hierfür insbesondere [Fre] und [Fre89]):

- $\exists$  Einbettungen  $\alpha_i : \mathfrak{F}(M_i) \rightarrow \mathfrak{F}_u(M)$ , sodaß  $\alpha_j \circ \alpha_{ij} = \alpha_i$  für  $M_i \subseteq M_j$  ist.
- Für jede Familie von Algebrenhomomorphismen  $\varphi_i : \mathfrak{F}(M_i) \rightarrow A$ , sodaß die Kompabilitätsbedingung  $\varphi_j \circ \alpha_{ij} = \varphi_i$  für  $M_i \subseteq M_j$  erfüllt ist, gibt es einen Algebrenhomomorphismus  $\varphi_u : \mathfrak{F}_u(M) \rightarrow A$  mit  $\varphi_u \circ \alpha_i = \varphi_i$ .

Durch diese beiden Eigenschaften wird  $\mathfrak{F}_u(M)$  als  $*$ -Algebra mit Eins eindeutig festgelegt.  $\mathfrak{F}_u(M)$  wird die *universelle Algebra* des Systems  $\{M_i\}_{i \in I}$  genannt und die Einbettungen werden in dem vorliegenden Fall durch die Inklusionen gegeben. Daher wird  $\mathfrak{F}_u(M)$  von den Elementen der Gestalt  $\widehat{\mathbf{F}}_i(\omega)$  erzeugt, wobei  $\text{supp}(\omega) \subseteq M_i$ ,  $i \in I$ , ist.

Da  $\{M_i\}_{i \in I}$  kein gerichtetes System ist, denn zu zusammenziehbaren  $M_i$  und  $M_j$  muß keine zusammenziehbare global hyperbolische Raumzeit  $M_k$  mit  $M_i, M_j \subseteq M_k$  existieren. Aus diesem Grund hat  $\mathfrak{F}_u(M)$  nicht die Struktur eines direkten Limes (auch induktiver Limes genannt) von lokalen Algebren, kann also nicht als Vereinigung von lokalen Algebren beschrieben werden. Daher treten neue Relationen auf, die nicht auf der Ebene lokaler Algebren berechnet werden können.

### 6.1.4 Schritt 4: Globale Feldoperatoren

In  $\mathfrak{F}_u(M)$  lassen sich nun globale Feldoperatoren  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  für  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  definieren. Sei nämlich  $\{\psi_i\}_{i \in I}$  eine Zerlegung der Eins zu der Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ . Definiere

$$\widehat{\mathbf{F}}(\omega) := \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i(\psi_i \omega)$$

$\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  ist hiermit wohldefiniert, denn:

- Die Summe ist endlich.

Die Zerlegung der Eins ist lokal endlich, d.h.  $\forall x \in M \exists U(x)$  Umgebung von  $x$ , sodaß  $\text{supp}(\psi_i) \cap U(x) \neq \emptyset$  nur für endlich viele  $\psi_i$ . Überdecke mit solchen Mengen  $\text{supp}(\omega)$ , dann reichen wegen der Kompaktheit endlich viele (jede dieser endlich vielen Mengen  $U(x)$  wird nur von endlich vielen der  $\psi_i$  geschnitten). Es folgt, daß  $\text{supp}(\omega)$  nur von endlich vielen der  $\psi_i$  geschnitten wird, da eine Überdeckung von  $\text{supp}(\omega)$  gefunden wurde, die bereits nur von endlich vielen der  $\psi_i$  geschnitten wird.

- $\widehat{\mathbf{F}}$  ist linear.

Seien  $\omega, \omega' \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , dann gilt wegen der Linearität der  $\widehat{\mathbf{F}}_i$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}(\lambda\omega + \mu\omega') &= \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i(\psi_i(\lambda\omega + \mu\omega')) = \lambda \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i(\psi_i\omega) + \mu \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i(\psi_i\omega') \\ &= \lambda \widehat{\mathbf{F}}(\omega) + \mu \widehat{\mathbf{F}}(\omega'). \end{aligned}$$

- Die Definition ist unabhängig von der Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$  und der zugeordneten Zerlegung der Eins.

Sei nämlich  $M = \bigcup_{j \in J} N_j$  eine weitere Überdeckung und  $\{\varphi_j\}_{j \in J}$  eine zugeordnete Zerlegung der Eins.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}(\omega) &= \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i(\psi_i\omega) = \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i\left(\sum_{j \in J} \varphi_j \psi_i\omega\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_i(\varphi_j \psi_i\omega) \\ &\stackrel{(6.1.3)}{=} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j(\varphi_j \psi_i\omega) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j\left(\sum_{i \in I} \varphi_j \psi_i\omega\right) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j(\varphi_j\omega), \end{aligned}$$

wobei die Linearität von  $\widehat{\mathbf{F}}$  ausgenutzt wurde. Die Summen durften vertauscht werden, da sie ja in Wahrheit endliche Summen sind.

Für den somit wohldefinierten globalen Feldoperator  $\widehat{\mathbf{F}}$  gelten wegen der Eigenschaften (6.1.1), (6.1.2) und (6.1.3) der lokalen Feldoperatoren die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}(\omega) &= \widehat{\mathbf{F}}_i(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_{2c}(M_i, \mathbb{C}), \\ \widehat{\mathbf{F}}(\delta\eta) &= 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C}), \\ \widehat{\mathbf{F}}(-d\theta) &= 0 \quad \forall \theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C}), \\ \widehat{\mathbf{F}}(\square\omega) &= 0 \quad \forall \omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Die angegebenen Relationen werden durch die folgenden Rechnungen bewiesen:

Sei  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$ , dann ist

$$\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i(\psi_i \omega) = \widehat{\mathbf{F}}_i\left(\sum_{i \in I} \psi_i \omega\right) = \widehat{\mathbf{F}}_i(\omega).$$

Sei  $\eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C})$ , dann

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}(\delta\eta) &= \widehat{\mathbf{F}}\left(\delta\left(\sum_{j \in J} \varphi_j \eta\right)\right) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}(\delta(\varphi_j \eta)) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i(\psi_i \delta(\varphi_j \eta)) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_j(\psi_i \delta(\varphi_j \eta)) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j\left(\sum_{i \in I} \psi_i \delta(\varphi_j \eta)\right) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j(\delta(\varphi_j \eta)) = 0. \end{aligned}$$

Für  $\theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  gilt

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}(-d\theta) &= \widehat{\mathbf{F}}\left(-d\left(\sum_{j \in J} \varphi_j \theta\right)\right) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}(-d(\varphi_j \theta)) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_i(-\psi_i d(\varphi_j \theta)) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \widehat{\mathbf{F}}_j(-\psi_i d(\varphi_j \theta)) = \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j\left(-\sum_{i \in I} \psi_i d(\varphi_j \theta)\right) \\ &= \sum_{j \in J} \widehat{\mathbf{F}}_j(-d(\varphi_j \theta)) = 0. \end{aligned}$$

Wegen  $\square = -\delta d - d\delta$  und der Linearität von  $\widehat{\mathbf{F}}$  folgt  $\widehat{\mathbf{F}}(\square\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$ .

Die universelle Algebra  $\mathfrak{F}_u(M)$  ist die globale Feldalgebra der Feldstärkeoperatoren. Für die in Abschnitt 3.5 angegebene Feldalgebra  $\mathfrak{F}(M)$  gilt sicherlich immer  $\mathfrak{F}(M) \subseteq \mathfrak{F}_u(M)$  und in den in Abschnitt 4.4 beschriebenen Spezialfällen mit  $H_{dR}^1 M = 0$  auch die Gleichheit  $\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{F}_u(M)$ . Wir beweisen nun, daß die Vertauschungsrelation in  $\mathfrak{F}_u(M)$  durch den Lichnerowiczkommutator (4.4.1) gegeben ist.

### 6.1.5 Satz (Kommutatorrelation)

Fordert man die Lokalität, d.h.  $[\widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega')] = 0$ , wann immer  $\text{supp}(\omega)$  und  $\text{supp}(\omega')$  raumartig zueinander liegen, so wird die Kommutatorrelation in  $\mathfrak{F}_u(M)$  durch den Lichnerowiczkommutator gegeben:

$$[\widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega')] = i\hbar \left( \int_M G \delta\omega \wedge * \delta\omega' \right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)} \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}).$$

**Beweis:** Wähle eine raumartige glatte Cauchyhyperfläche  $\Sigma_Z$  in der Zukunft von  $\text{supp}(\omega)$  und  $\text{supp}(\omega')$ , sodaß diese  $\Sigma_Z$  nicht schneiden. Betrachte die kompakte Menge  $K := (J_+^M(\text{supp}(\omega)) \cap \Sigma_Z) \cup (J_+^M(\text{supp}(\omega')) \cap \Sigma_Z)$ . Überdecke  $K$  mit endlich vielen zusammenziehbaren und in der Topologie von  $\Sigma_Z$  offenen Mengen  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Dies ist möglich, da jeder Punkt in  $\Sigma_Z$  eine zusammenziehbare Umgebung besitzt und da  $K$  kompakt ist. Bilde zu diesen Mengen die Cauchyentwicklungen  $D^M(U_i)$ . Die Cauchyentwicklungen sind zusammenziehbare global hyperbolische Raumzeiten (gleiche Argumentation wie in Unterabschnitt 6.1.1). Sei nun  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, N'$  eine Verfeinerung derart, daß

$$V_k \subset U_i \text{ für ein } i \text{ und } V_k \cap V_{k'} \neq \emptyset \implies V_k \cup V_{k'} \subset U_{i'} \text{ für ein } i' \quad (6.1.5)$$

gelten. Solch eine Verfeinerung existiert, wie durch folgende Vorgehensweise gezeigt werden soll.

Nehme um jeden Punkt von  $K$  eine offene Umgebung, deren Abschluß noch ganz in einem der  $U_i$  enthalten ist. Das ist wegen der lokalen Diffeomorphie zum  $\mathbb{R}^3$  möglich. Da  $K$  kompakt ist, reichen endlich viele dieser Mengen aus, um  $K$  zu überdecken, etwa  $n \in \mathbb{N}$  viele. Ordne diese  $n$  Mengen derart an, daß  $V_{il_i}$  die  $l_i$ -te Menge bezeichne, deren Abschluß noch ganz in  $U_i$  enthalten ist. Ist der Abschluß einer dieser Mengen in mehreren der  $U_i$  ganz enthalten, dann wird sie demjenigen  $U_i$  mit dem größten Wert für  $i$  zugeordnet. Die so erhaltenen und disjunkten Mengensysteme werden mit  $\mathcal{U}_i$  bezeichnet. In einem  $\mathcal{U}_i$  befinden sich  $n_i$  ( $\sum_{i=1, \dots, N} n_i = n$ ) Mengen  $V_{il_i}$ , d.h.  $|\mathcal{U}_i| = n_i$ .

Tritt für  $V_{il_i}$  und  $V_{jl_j}$ , o.B.d.A.  $j > i$ , der Fall ein, daß die Eigenschaft (6.1.5) nicht erfüllt ist, dann lassen sich  $V_{il_i}$  und  $V_{jl_j}$  in vier offene Mengen zerlegen, die (6.1.5) erfüllen. Bezeichne  $S_{ij} := U_i \cap U_j$ , dann betrachte die Mengen  $\tilde{V}_{il_i} := V_{il_i} \cap (\Sigma \setminus \overline{S_{ij}})$ ,  $\tilde{V}_{jl_j} := V_{jl_j} \cap (\Sigma \setminus \overline{S_{ij}})$ ,  $\hat{V}_{il_i} := V_{il_i} \cap S_{ij}$  und  $\hat{V}_{jl_j} := V_{jl_j} \cap S_{ij}$ . Weiter sei  $\tilde{R}_{il_i}$  eine offene Umgebung von  $V_{il_i} \cap \partial U_j$ , deren Abschluß ganz in  $U_i$  liegt und  $\tilde{R}_{jl_j}$  eine offene Umgebung von  $V_{jl_j} \cap \partial U_i$ , deren Abschluß ganz in  $U_j$  liegt und  $\tilde{R}_{il_i} \cap \tilde{R}_{jl_j} = \emptyset$  erfüllt. Solche zwei Mengen gibt es, denn nach der lokalen Diffeomorphie zum  $\mathbb{R}^3$  gibt es zu jedem Punkt von  $V_{il_i} \cap \partial U_j$  eine offene Umgebung, deren Abschluß schon ganz in  $U_i$  enthalten ist. Definiere die Vereinigung dieser Mengen als  $\tilde{R}_{il_i}$ . Um jeden Punkt von  $V_{jl_j} \cap \partial U_i$  gibt es nun eine offene Umgebung, deren Abschluß ganz in  $U_j$  enthalten ist und  $\tilde{R}_{il_i}$  nicht schneidet, denn sonst wäre dieser Punkt ein Element von  $\partial \tilde{R}_{il_i}$  im Widerspruch zu  $\tilde{R}_{il_i} \subset U_i$  und damit also die gewünschte Menge  $\tilde{R}_{jl_j}$ . Definiere nun  $R_{il_i} := (V_{il_i} \cap \tilde{R}_{il_i}) \cup \tilde{V}_{il_i}$  und  $R_{jl_j} := (V_{jl_j} \cap \tilde{R}_{jl_j}) \cup \tilde{V}_{jl_j}$ , dann gelten für  $R_{il_i} \subset U_i$  und  $\hat{V}_{il_i}, R_{jl_j}, \hat{V}_{il_i} \subset U_j$  die Eigenschaft (6.1.5),  $R_{il_i} \cup \hat{V}_{il_i} \cup R_{jl_j} \cup \hat{V}_{il_i} = V_{il_i} \cup V_{jl_j}$  und  $R_{il_i}$  erfüllt zu allen Mengen die Eigenschaft (6.1.5), zu denen  $V_{il_i}$  schon (6.1.5) erfüllt hat.



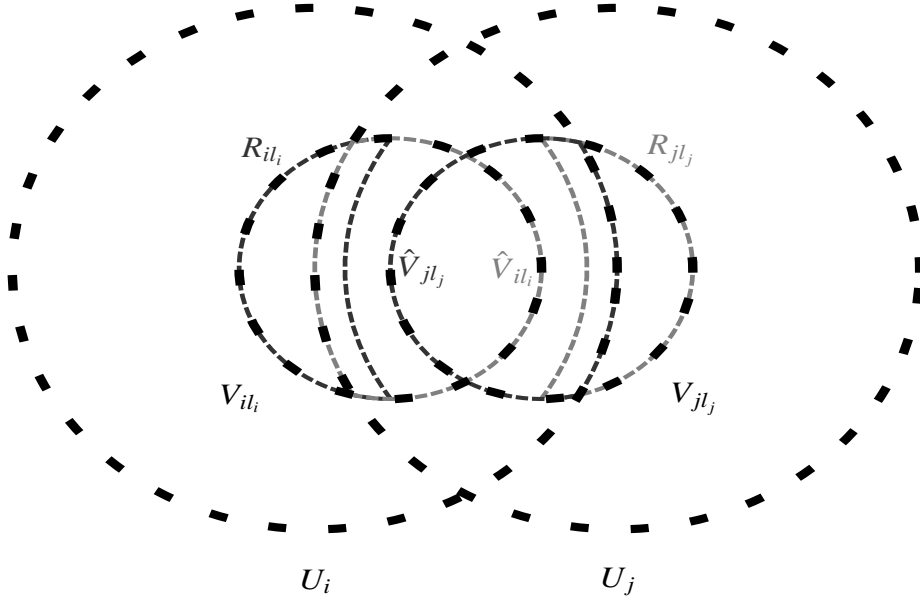


Abb.: Zur Zerlegung zweier Mengen, die (6.1.5) nicht erfüllen.

Wann immer also eine Situation auftritt, bei der (6.1.5) nicht erfüllt ist, führe diese Zerlegung durch, füge die Mengen  $\hat{V}_{il_i}$ ,  $R_{jl_j}$ ,  $\hat{V}_{il_i}$  zu  $\mathcal{U}_j$  hinzu und verwende  $R_{il_i}$  anstelle von  $V_{il_i}$  als Menge in  $\mathcal{U}_i$ :

$$V_{il_i} \text{ und } V_{jl_j} \text{ erfüllen (6.1.5) nicht : } V_{il_i} \mapsto R_{il_i}, V_{jl_j} \mapsto \hat{V}_{il_i}, R_{jl_j}, \hat{V}_{jl_j}.$$

Die gewünschte Verfeinerung  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, N'$ , kann man daher aus den Mengen  $V_{il_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $l_i = 1, \dots, n_i$ , nach dem Schema gewinnen, in welchem die Schnitte  $V_{il_i} \cap V_{jl_j}$  in der folgenden Reihenfolge betrachtet werden:

$$\begin{aligned} & V_{i1} \cap V_{(i+1)l_{i+1}} \text{ in der Reihenfolge } l_{i+1} = 1, \dots, n_{i+1} \\ & V_{i2} \cap V_{(i+1)l_{i+1}} \text{ in der Reihenfolge } l_{i+1} = 1, \dots, n_{i+1} \\ & \quad \vdots \\ & V_{in_1} \cap V_{(i+1)l_{i+1}} \text{ in der Reihenfolge } l_{i+1} = 1, \dots, n_{i+1} \\ & \\ & V_{i1} \cap V_{(i+2)l_{i+2}} \text{ in der Reihenfolge } l_{i+2} = 1, \dots, n_{i+2} \\ & V_{i2} \cap V_{(i+2)l_{i+2}} \text{ in der Reihenfolge } l_{i+2} = 1, \dots, n_{i+2} \\ & \quad \vdots \\ & V_{in_1} \cap V_{(i+2)l_{i+2}} \text{ in der Reihenfolge } l_{i+2} = 1, \dots, n_{i+2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 V_{i1} \cap V_{Nl_N} \text{ in der Reihenfolge } l_N = 1, \dots, n_N \\
 V_{i2} \cap V_{Nl_N} \text{ in der Reihenfolge } l_N = 1, \dots, n_N \\
 \vdots \\
 V_{in_1} \cap V_{Nl_N} \text{ in der Reihenfolge } l_N = 1, \dots, n_N.
 \end{array}$$

Starte mit  $i = 1$  und ende mit  $N - 1$ . Wann immer die Eigenschaft (6.1.5) nicht erfüllt ist, führe die zuvor angegebene Zerlegung durch. Dieses Schema führt zu der gewünschten Verfeinerung  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, N'$ , denn nach Konstruktion sind in endlich vielen Schritten insgesamt nur endlich viele Mengen hinzuzunehmen. Sind die in  $\mathcal{U}_i$  und  $\mathcal{U}_j$  enthaltenen Mengen  $V_{il_i}$  und  $V_{jl_j}$ ,  $j > i$ , einmal von der Form, daß (6.1.5) gilt, dann bleibt diese Eigenschaft nach Konstruktion der Zerlegung auch nach der Betrachtung von Schnitten der Gestalt  $V_{jl_j} \cap V_{j'l'_j}$ ,  $j' > j$ , und den damit verbundenen Zerlegungen erhalten.

Zu den Mengen der Überdeckung  $K \subset \bigcup_{j=1, \dots, N'} V_j$  bilde die Cauchyentwicklungen  $D^M(V_j)$ . Jedes  $D^M(V_j)$  ist vollständig in einem  $D^M(U_i)$  enthalten nach Konstruktion. Gilt  $D^M(V_j) \cap D^M(V_{j'}) = \emptyset$ , so liegen  $D^M(V_j)$  und  $D^M(V_{j'})$  raumartig getrennt zueinander, gilt  $D^M(V_j) \cap D^M(V_{j'}) \neq \emptyset$ , so gibt es ein  $D^M(U_i)$  mit  $D^M(V_j) \cup D^M(V_{j'}) \subset D^M(U_i)$ , was auch aus der Konstruktion der  $V_j$  und den Eigenschaften der Cauchyentwicklung folgt. Da die  $D^M(V_j)$ ,  $j = 1, \dots, N'$ , endlich viele Mengen sind, findet man eine Cauchyhyperfläche  $\Sigma_{Z^+}$  in der Zukunft und eine Cauchyhyperfläche  $\Sigma_{Z^-}$  in der Vergangenheit von  $\Sigma_Z$ , sodaß die Mengen  $J_+^M(\text{supp}(\omega)) \cap \Sigma_{Z^+}$ ,  $J_+^M(\text{supp}(\omega')) \cap \Sigma_{Z^+}$ ,  $J_+^M(\text{supp}(\omega)) \cap \Sigma_{Z^-}$  und  $J_+^M(\text{supp}(\omega')) \cap \Sigma_{Z^-}$  ganz in  $\bigcup_{j=1, \dots, N'} D^M(V_j)$  enthalten sind.

Sei  $\chi^+$ ,  $\chi^-$  die Zerlegung der Eins zugeordnet zu  $I_+^M(\Sigma_{Z^-})$ ,  $I_-^M(\Sigma_{Z^+})$ . Bilde nun die 2-Formen

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega} &= \omega - \square \chi^- G_+ \omega, \\
 \tilde{\omega}' &= \omega' - \square \chi^- G_+ \omega'.
 \end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften von  $\chi^-$ ,  $G_+$  und nach Konstruktion folgt, daß  $\tilde{\omega}$  und  $\tilde{\omega}'$  kompakt getragen sind, und ihre Träger liegen in  $\bigcup_{j=1, \dots, N'} D^M(V_j)$ .

Sei nun  $\{\psi_j\}_{j=1, \dots, N'}$  eine Zerlegung der Eins zu  $\{D^M(V_j)\}_{j=1, \dots, N'}$ , dann berechnet sich der Kommutator vorerst zu

$$\left[ \widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega') \right] \stackrel{(6.1.4)}{=} \left[ \widehat{\mathbf{F}}(\tilde{\omega}), \widehat{\mathbf{F}}(\tilde{\omega}') \right] = \sum_{j, j'=1}^{N'} \left[ \widehat{\mathbf{F}}(\psi_j \tilde{\omega}), \widehat{\mathbf{F}}(\psi_{j'} \tilde{\omega}') \right].$$

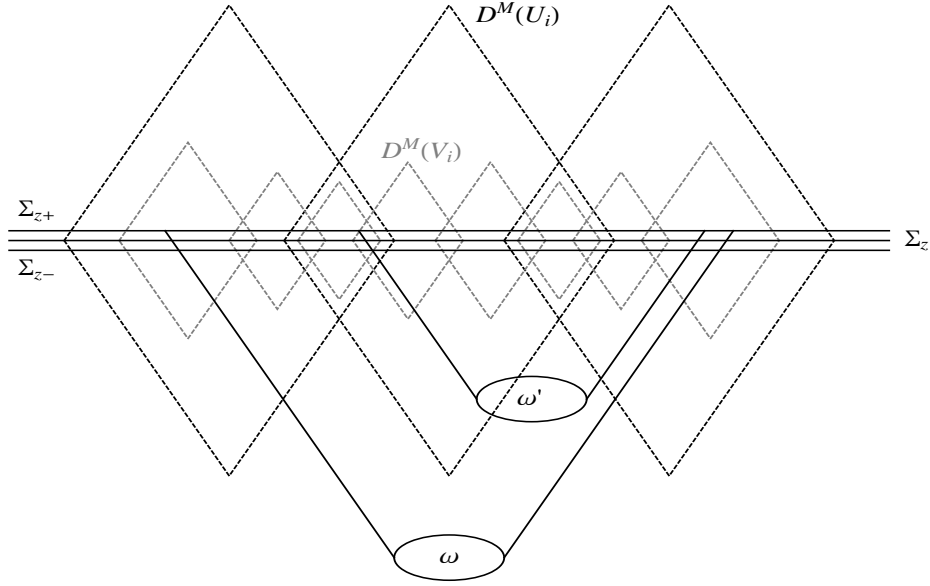


Abb.: Graphische Veranschaulichung der Idee des Beweises.

Nach Konstruktion des Mengensystems  $\{D^M(V_j)\}_{j=1,\dots,N'}$  bedeutet ein leerer Schnitt  $D^M(V_j) \cap D^M(V_{j'}) = \emptyset$ , daß  $D^M(V_j)$  und  $D^M(V_{j'})$  raumartig zueinander liegen. Da wir explizit Lokalität fordern, folgt für den Kommutator

$$\left[ \widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega') \right] = \sum_{j,j' \mid D^M(V_j) \cap D^M(V_{j'}) \neq \emptyset} \left[ \widehat{\mathbf{F}}(\psi_j \tilde{\omega}), \widehat{\mathbf{F}}(\psi_{j'} \tilde{\omega}') \right].$$

Weiter bedeutet  $D^M(V_j) \cap D^M(V_{j'}) \neq \emptyset$  nach Konstruktion des Mengensystems  $\{D^M(V_j)\}_{j=1,\dots,N'}$ , daß  $D^M(V_j) \cup D^M(V_{j'})$  ganz in einer Menge des Systems  $\{D^M(U_i)\}_{i=1,\dots,N}$  liegt. Die Mengen dieses Mengensystems sind zusammenziehbare global hyperbolische Raumzeiten, sodaß der Kommutator berechnet werden kann. Dieser ist nämlich der Lichnerowiczkommutator (4.4.1). Es folgt somit

$$\left[ \widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega') \right] = \sum_{j,j' \mid D^M(V_j) \cap D^M(V_{j'}) \neq \emptyset} i \hbar \left( \int_M G \delta(\psi_j \tilde{\omega}) \wedge * \delta(\psi_{j'} \tilde{\omega}') \right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)}.$$

Der Lichnerowiczkommutator ist wegen der Eigenschaften des Propagators  $G$  Null, wenn die Träger von zwei 2-Formen raumartig getrennt liegen. Aus diesem Grund kann man die fehlenden Summanden hinzuaddieren ohne den

Kommutator zu ändern

$$\begin{aligned}
 [\widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega')] &= \sum_{j,j' \mid D^M(V_j) \cap D^M(V_{j'}) \neq \emptyset} i \hbar \left( \int_M G \delta(\psi_j \tilde{\omega}) \wedge * \delta(\psi_{j'} \tilde{\omega}') \right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)} \\
 &+ \sum_{j,j' \mid D^M(V_j) \cap D^M(V_{j'}) = \emptyset} i \hbar \underbrace{\left( \int_M G \delta(\psi_j \tilde{\omega}) \wedge * \delta(\psi_{j'} \tilde{\omega}') \right)}_{=0} 1_{\mathfrak{F}_u(M)} \\
 &= \sum_{j,j'=1}^{N'} i \hbar \left( \int_M G \delta(\psi_j \tilde{\omega}) \wedge * \delta(\psi_{j'} \tilde{\omega}') \right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)} \\
 &= i \hbar \left( \int_M G \delta \left( \sum_{j=1}^{N'} \psi_j \tilde{\omega} \right) \wedge * \delta \left( \sum_{j'=1}^{N'} \psi_{j'} \tilde{\omega}' \right) \right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)} \\
 &= i \hbar \left( \int_M G \delta \tilde{\omega} \wedge * \delta \tilde{\omega}' \right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)} \\
 &= i \hbar \left( \int_M G \delta \omega \wedge * \delta \omega' \right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)}.
 \end{aligned}$$

□

## 6.2 Das Zentrum der Feldalgebra

Im Fall  $H_{dR}^2 M \neq 0$  erhält die Feldalgebra  $\mathfrak{F}_u(M)$  des Feldstärketensors eine neue Eigenschaft, die für  $H_{dR}^2 M = 0$  nicht vorhanden ist und das Zentrum der Algebra betrifft. Dieses ist dann nämlich nicht trivial. Das *Zentrum* einer Algebra  $A$  ist die Unteralgebra  $Z$  aller derjenigen Elemente, die mit allen anderen Elementen aus der Algebra  $A$  kommutieren. Das Zentrum heißt genau dann *trivial*, wenn  $Z = \mathbb{C} \cdot 1_A$  ist.

Anhand des Kommutators, gegeben durch Satz 6.1.5, lassen sich alle Elemente des Zentrums der Algebra  $\mathfrak{F}_u(M)$  bestimmen. Sei also  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  so, daß

$$[\widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega')] = 0 \quad \forall \omega' \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$$

gilt. Es folgt dann

$$\int_M G \omega \wedge * d \delta \omega' = \int_M d \delta G \omega \wedge * \omega' = 0 \quad \forall \omega' \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$$

und wegen der Nichtausgeartetheit dieser symmetrischen Paarung, siehe Abschnitt B.9.3,

$$d \delta G \omega = 0.$$

Es gilt also

$$\widehat{\mathbf{F}}(\omega) \in Z \iff d\delta G\omega = 0 = -\delta dG\omega.$$

$\delta d\omega$  und  $d\delta\omega$  liegen daher im Kern von  $G$  und daher gilt nach Lemma C.6.5

$$\begin{aligned} \delta d\omega &= \square\alpha, \quad \alpha \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}), \\ d\delta\omega &= \square\beta, \quad \beta \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Weiter kann man

$$\begin{aligned} \delta\delta d\omega = 0 &= \delta\square\alpha = \square\delta\alpha \implies 0 = G_{\pm}\square\delta\alpha = \delta\alpha, \\ dd\delta\omega = 0 &= d\square\beta = \square d\beta \implies 0 = G_{\pm}\square d\beta = d\beta \end{aligned}$$

folgern und daraus wiederum

$$\square\omega = -\delta d\omega - d\delta\omega = -\square\alpha - \square\beta \implies G_{\pm}\square\omega = \omega = -\alpha - \beta.$$

$\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  ist also genau dann im Zentrum, wenn  $\omega = -\alpha - \beta$  für  $\alpha, \beta \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $\delta\alpha = 0$  und  $d\beta = 0$  ist.

### 6.2.1 Das Zentrum in einem Spezialfall

Angenommen es gilt  $H_{dR}^2 M = 0$ . Dann folgt nach der vorherigen Überlegung für  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  im Zentrum von  $\mathfrak{F}_u(M)$ , daß  $\omega = -\alpha - \beta$  für  $\alpha, \beta \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $\delta\alpha = 0$  und  $d\beta = 0$  ist. Da aber nun  $H_{dR}^2 M = 0$  ist, folgt nach der Poincarédualität 5.1.2  $H_{dR,c}^2 M = 0$  und daher  $\alpha = \delta\eta$  für ein  $\eta \in \Omega_{3c}(M, \mathbb{C})$ , siehe Lemma 5.1.3, und  $\beta = d\theta$  für ein  $\theta \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$ . Es folgt deswegen  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{\mathbf{F}}(-\alpha - \beta) = \widehat{\mathbf{F}}(-\delta\eta - d\theta) = 0$  nach (6.1.4). Das Zentrum ist in diesem Spezialfall trivial.

### 6.2.2 Nicht triviale Zentrumsэлементы

Es wird nun untersucht wie für  $H_{dR}^2 M \neq 0$  nicht triviale Elemente des Zentrums  $Z$  von  $\mathfrak{F}_u(M)$  konstruiert werden können. Die Idee hierfür stammt aus [Hol08], wir nehmen vereinfachend an, daß sogar  $0 < \dim(H_{dR}^2 M) = b_2 < \infty$  gilt. Diese Annahme ist nicht essentiell für die Existenz nicht trivialer Zentrumsэлементы, erleichtert aber deren Konstruktion und Interpretation. Nach der Poincarédualität 5.1.2 gilt

$$(H_{dR}^2 M)^* \cong H_{dR}^2 M \cong (H_{dR,c}^2 M)^* \cong H_{dR,c}^2 M.$$

Jedes Element aus  $(H_{dR}^2 M)^*$  ist daher von der Gestalt

$$H_{dR}^2 M \ni \omega \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

für ein eindeutig bestimmtes  $\eta \in H_{dR,c}^2 M$ . Da durch jeden glatten 2-Zykel  $z \in H_2^\infty(M; \mathbb{R})$  eine wohldefinierte, lineare Abbildung  $\int_z : H_{dR}^2 M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \mapsto \int_z \omega$  gegeben wird, existiert also zu jedem  $z \in H_2^\infty(M; \mathbb{R})$  ein eindeutig bestimmtes  $\omega_z \in H_{dR,c}^2 M$  mit

$$\int_z \omega = \int_M \omega \wedge \omega_z \quad \forall \omega \in H_{dR}^2 M.$$

Nach Satz 5.1.9 gibt es einen Feldstärketensor  $F' \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$ , der nicht exakt ist, d.h. es gibt nach Folgerung 5.3.8 einen 2-Zykel  $z \in H_2^\infty(M, \mathbb{R})$  mit

$$0 \neq \int_z F' = \int_M F' \wedge \omega_z.$$

Definiere nun das Algebraelement

$$\widehat{\mathbf{Z}}_m(z) := \widehat{\mathbf{F}}(\omega_z).$$

Dieses hängt nur von der Homologiekategorie von  $z$  bzw. nur von der kompakten getragenen de Rham-Kohomologiekategorie von  $\omega_z$  ab. Denn sei  $[\omega'_z] = [\omega_z]$ , dann ist  $\omega'_z = \omega_z + d\theta$  und daher

$$\widehat{\mathbf{F}}(\omega'_z) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega_z + d\theta) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega_z) + \widehat{\mathbf{F}}(d\theta) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega_z).$$

$\widehat{\mathbf{Z}}_m(z)$  liegt nun im Zentrum der Algebra wegen

$$\left[ \widehat{\mathbf{Z}}_m(z), \widehat{\mathbf{F}}(\omega) \right] = \int_M G\omega_z \wedge *d\delta\omega = - \int_z dG\delta\omega = 0 \quad \forall \omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$$

nach dem Satz von Stokes für Ketten 5.3.5. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob  $\widehat{\mathbf{Z}}_m(z)$  ein komplexes Vielfaches der Identität ist.  $\widehat{\mathbf{Z}}_m(z) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega_z)$  ist nach Konstruktion von  $\mathfrak{F}_u(M)$  nicht Null und wegen des zu Beginn Gesagten korrespondiert zu der Quantenobservable  $\widehat{\mathbf{Z}}_m(z)$  die klassische Observable

$$\mathbf{Z}_m(z) : F \mapsto \int_M F \wedge \omega_z = \int_z F,$$

wobei  $F$  eine Lösung der quellenfreien Maxwellgleichungen sein soll. Dieses Integral ist für die exakten Feldstärketensoren sicherlich Null, es gibt aber durch die Voraussetzung  $H_{dR}^2 M \neq 0$  auch nicht exakte Feldstärketensoren, sodaß das Integral nicht verschwindet. Aus diesem Grund ist für ein solches  $z$  die klassische Observable  $\mathbf{Z}_m(z)$  weder die 0- noch die 1-Abbildung und deswegen ist die Quantenobservable  $\widehat{\mathbf{Z}}_m(z)$  weder die Null noch die Identität. Die analoge Diskussion gilt wegen

$$\int_M \omega \wedge *\omega_z = \int_M \omega_z \wedge *\omega = \int_M *\omega \wedge \omega_z = \int_z *\omega \quad \forall \omega \in H_{dR}^2 M$$

auch für  $\widehat{\mathbf{Z}}_e(z) := \widehat{\mathbf{F}}(*\omega_z)$ .

### 6.2.3 Interpretation konstruierter Zentrumselemente

Die Darstellung von  $\mathbf{Z}_m(z)(F)$  und  $\mathbf{Z}_e(z)(F)$  als Integrale  $\int_z F$  bzw.  $\int_z *F$  ermöglicht eine direkte Interpretation dessen, welchen klassischen Observablen  $\widehat{\mathbf{Z}}_m(z)$  und  $\widehat{\mathbf{Z}}_e(z)$  entsprechen.  $\widehat{\mathbf{Z}}_m(z)$  korrespondiert zu der klassischen Observable des magnetischen Flußes durch  $z$  und entspricht damit der magnetischen Ladung von  $z$ , die mit dem elektromagnetischen Feld assoziiert wird.  $\widehat{\mathbf{Z}}_e(z)$  korrespondiert dementsprechend zu der klassischen Observable des elektrischen Flußes und gibt daher die elektrische Ladung von  $z$  wieder, die mit dem elektromagnetischen Feld assoziiert wird. Der Begriff „Ladung“ ist aber nicht im Sinne von Ladung in der Elementarteilchenphysik zu verstehen, wie bereits in Unterabschnitt 2.7.3 diskutiert wurde, da die Feldstärketensoren  $F$  Lösungen der quellenfreien Maxwellgleichungen sein sollen.

### 6.2.4 Bemerkung

Es soll noch kurz angesprochen werden, wie nicht triviale Zentrumselemente im Fall  $\dim(H_{dR}^2 M) = \infty$  angegeben werden können. Es gibt dann nach Voraussetzung und Satz 5.1.9 einen nicht exakten Feldstärketensor  $F' \in \Omega_2(M, \mathbb{C})$  und nach Folgerung 5.3.8 einen 2-Zykel  $z \in H_2^\infty(M, \mathbb{R})$  mit

$$\int_z F' \neq 0.$$

Weiter gibt es auch ein  $\omega_z \in H_{dR,c}^2 M$  mit

$$\int_z F' = \int_M F' \wedge \omega_z.$$

Gäbe es so ein  $\omega_z$  nicht, dann würde dies  $\int_M F' \wedge \omega = 0$   $\omega \in H_{dR,c}^2 M$  bedeuten, denn sonst könnte man reskalieren. Dies ist aber ein Widerspruch, denn nach der Poincarédualität 5.1.2 folgt unweigerlich  $[F'] = 0 \in H_{dR}^2(M, \mathbb{C})$ , was nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Mit den Elementen  $\widehat{\mathbf{Z}}_m(\omega_z) := \widehat{\mathbf{F}}(\omega_z)$  und  $\widehat{\mathbf{Z}}_e(\omega_z) := \widehat{\mathbf{F}}(*\omega_z)$  sind dann nicht triviale Elemente des Zentrums der Feldalgebra des Feldstärketensors gegeben.

## 6.3 Zeitschichtaxiom

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Zeitschichtaxiom. Es soll gezeigt werden, daß die Algebra des Feldstärketensors, realisiert durch die universelle Algebra  $\mathfrak{F}_u(M)$  nach Abschnitt 6.1, dem Zeitschichtaxiom genügt. Darüber hinaus werden in diesem Abschnitt auch die Algebra der Cauchyhyperfläche  $\mathfrak{F}(\Sigma)$  und der Algebrenisomorphismus  $\mathfrak{F}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{F}_u(M)$  angegeben.

### 6.3.1 Lemma

Die universelle Algebra  $\mathfrak{F}_u(M)$  der Feldoperatoren des Feldstärketensors, so wie sie in Abschnitt 6.1 konstruiert wurde, erfüllt das Zeitschichtaxiom.

**Beweis:** Sei  $O(\Sigma)$  eine beliebige offene Umgebung von  $\Sigma$ . Es reicht zu zeigen, daß es für jedes  $\omega \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  ein  $\omega' \in \Omega_{2c}(M, \mathbb{C})$  mit  $\text{supp}(\omega') \subset O(\Sigma)$  und  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega')$  gibt. Da  $O(\Sigma)$  eine offene Umgebung von  $\Sigma$  ist und  $J_{\pm}^M(\text{supp}(\omega)) \cap \Sigma$  kompakt, gibt es jeweils eine Cauchyhyperfläche  $\Sigma_Z$  in der Zukunft und eine Cauchyhyperfläche  $\Sigma_V$  in der Vergangenheit von  $\Sigma$ , sodaß  $J_{\pm}^M(\text{supp}(\omega)) \cap \Sigma_Z \subset O(\Sigma)$  und  $J_{\pm}^M(\text{supp}(\omega)) \cap \Sigma_V \subset O(\Sigma)$  gelten. Bezeichne nun  $\chi^+, \chi^-$  die Zerlegung der Eins zu  $I_+^M(\Sigma_V), I_-^M(\Sigma_Z)$ , dann definiere

$$\omega' = \omega - \square\chi^+G_-\omega - \square\chi^-G_+\omega.$$

Wegen den Eigenschaften von  $\chi^{\pm}, G_{\pm}$  und  $G$  gilt, daß  $\text{supp}(\omega')$  kompakt ist und in  $O(\Sigma)$  liegt. Weiter gilt wegen  $\text{supp}(\chi^+G_-\omega), \text{supp}(\chi^-G_+\omega)$  kompakt und (6.1.4) die Gleichheit  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega') = \widehat{\mathbf{F}}(\omega)$ .  $\square$

### 6.3.2 Die Algebra der Cauchyhyperfläche

Sei  $\Sigma = \bigcup_{k \in K} \Sigma_k$  eine Überdeckung von  $\Sigma$  durch zusammenziehbare offene Mengen. O.B.d.A. sei weiter  $D^M(\Sigma_k)$ ,  $k \in K$ , bereits in der Überdeckung  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$  aus Unterabschnitt 6.1.1 enthalten. Betrachte die lokalen Feldalgebren des Feldstärketensors  $\mathfrak{F}(M_k)$ ,  $M_k := D^M(\Sigma_k)$  und  $k \in K \subset I$ . Die lokalen Algebren der Cauchyhyperfläche  $\mathfrak{F}(\Sigma_k)$  sind  $*$ -Algebren mit Eins, erzeugt durch die Symbole der Gestalt

$$\Phi_k(B, E) \text{ mit } (B, E) \in \Omega_{2c}(M_k, \mathbb{C}) \times \Omega_{1c}(M_k, \mathbb{C}) \text{ und } dB = 0, \quad -\delta E = 0$$

mit der Vertauschungsrelation

$$\left[ \Phi_k(B_1, E_1), \Phi_k(B_2, E_2) \right] = i\hbar \left( \int_{\Sigma} [A_1] \wedge *E_2 - [A_2] \wedge *E_1 \right) 1_{\mathfrak{F}(\Sigma_k)},$$

wobei  $A_1, A_2 \in \Omega_{1c}(\Sigma_k, \mathbb{C})$  mit  $dA_1 = B_1$  und  $dA_2 = B_2$ . Die Existenz von  $A_1$  und  $A_2$  wird durch  $H_{dR}^1 M_k = 0$  gesichert und das Integral ist unabhängig vom Repräsentanten der Eichäquivalenzklasse.

#### Die globale Algebra der Cauchyhyperfläche

Für  $\Sigma_k \subseteq \Sigma_l$  gilt  $\mathfrak{F}(\Sigma_k) \subseteq \mathfrak{F}(\Sigma_l)$ , da  $\Phi_k(B, E) \in \mathfrak{F}(\Sigma_k)$  als Element von  $\mathfrak{F}(M_l)$  aufgefaßt werden kann, indem  $B$  und  $E$  durch Null auf  $\Sigma_l$  glatt fortgesetzt



werden. Hieraus folgt, daß durch die Inklusionen Algebrenhomomorphismen  $\iota_{kl} : \mathfrak{F}(\Sigma_k) \longrightarrow \mathfrak{F}(\Sigma_l)$  gegeben werden, die der Kompatibilitätsbedingung  $\iota_{ln} \circ \iota_{kl} = \iota_{kn}$  für  $M_k \subseteq M_l \subseteq M_n$  genügen. Als Algebra der Cauchyhyperfläche  $\mathfrak{F}(\Sigma)$  setzen wir daher die universelle Algebra  $\mathfrak{F}_u(\Sigma)$  des System  $\{\mathfrak{F}(\Sigma_k)\}_{k \in K}$ . Aus Konsistenzgründen und um nachher einen den Kommutator erhaltenden Algebrenisomorphismus zu erhalten, verwenden wir als Kommutator

$$\left[ \Phi_k(B_k, E_k), \Phi_l(B_l, E_l) \right] = i \hbar \left( \int_{\Sigma} [A_k] \wedge *E_l - [A_l] \wedge *E_k \right) 1_{\mathfrak{F}(\Sigma)},$$

wobei  $A_k \in \Omega_{1c}(M_k, \mathbb{C})$  mit  $dA_k = B_k$  und  $A_l \in \Omega_{1c}(M_l, \mathbb{C})$  mit  $dA_l = B_l$ .

### 6.3.3 Der Algebrenisomorphismus

Wir beginnen lokale Algebrenisomorphismen  $\varphi_{\Sigma_k M_k} : \mathfrak{F}(\Sigma_k) \longrightarrow \mathfrak{F}(M_k)$  zu konstruieren, die den Kommutator erhalten. Als Hilfskonstruktionen verwenden wir die lokalen Feldalgebren des Vektorpotentials  $\mathfrak{A}(M_k)$ , konstruiert wie in Unterabschnitt 4.3.2, und die lokalen Algebren der Cauchyhyperfläche des Vektorpotentials  $\mathfrak{A}(\Sigma_k)$ . Die  $*$ -Algebren mit Eins  $\mathfrak{A}(\Sigma_k)$  werden erzeugt durch die Symbole der Gestalt

$$\Phi([\mathcal{A}], \Pi) \text{ mit } ([\mathcal{A}], \Pi) \in (\Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C})/\sim) \times \Omega_{1c}(\Sigma, \mathbb{C}) \text{ und } \delta\Pi = 0$$

mit der Vertauschungsrelation

$$\left[ \Phi([\mathcal{A}_1], \Pi_1), \Phi([\mathcal{A}_2], \Pi_2) \right] = i \hbar \left( \int_{\Sigma} [\mathcal{A}_1] \wedge *\Pi_2 - [\mathcal{A}_2] \wedge *\Pi_1 \right) 1_{\mathfrak{A}(\Sigma_k)}.$$

#### Lokale Algebrenisomorphismen

Da  $\Sigma_k$  zusammenziehbar ist, ist der Algebrenhomomorphismus  $\gamma_k$ , definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_k : \mathfrak{F}(\Sigma_k) &\longrightarrow \mathfrak{A}(\Sigma_k) \\ \Phi(B, E) &\longmapsto \Phi([\mathcal{A}], E), \\ 1_{\mathfrak{F}(\Sigma_k)} &\longmapsto 1_{\mathfrak{A}(\Sigma_k)}, \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{A} \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$  mit  $d\mathcal{A} = B$ , ein Isomorphismus.  $\gamma$  ist wohldefiniert, den gilt  $d\mathcal{A}' = B$  für ein weiteres  $\mathcal{A}' \in \Omega_{1c}(M, \mathbb{C})$ , dann ist  $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$  eine geschlossene Form und daher auch exakt. Also  $[\mathcal{A}'] = [\mathcal{A}]$ .  $\gamma_k$  ist bijektiv, die Umkehrabbildung wird explizit gegeben durch den Algebrenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \gamma_k^{-1} : \mathfrak{A}(\Sigma_k) &\longrightarrow \mathfrak{F}(\Sigma_k) \\ \Phi([\mathcal{A}], E) &\longmapsto \Phi(d\mathcal{A}, E), \\ 1_{\mathfrak{A}(\Sigma_k)} &\longmapsto 1_{\mathfrak{F}(\Sigma_k)}. \end{aligned}$$

Der Erhalt des Kommutators ist offensichtlich nach Definition.

Jedem Element  $\Phi([\mathcal{A}], \Pi) \in \mathfrak{A}(\Sigma_k)$  kann man eindeutig ein Element  $[\widehat{\mathbf{A}}]_k(\theta) \in \mathfrak{A}(M_k)$  wie folgt zuordnen. Nach den Sätzen 4.1.1 und 4.1.3 gibt es nämlich eine Lösung  $G\theta \in \Omega_1(M_k, \mathbb{C})$ ,  $\theta \in \Omega_{1c}(M_k, \mathbb{C})$  mit  $\delta\theta = 0$ , des Cauchyproblems des Vektorpotentials zu den Cauchydaten  $([\mathcal{A}], \Pi)$ . Dieses  $[\widehat{\mathbf{A}}]_k(\theta) \in \mathfrak{A}(M_k)$  ist so durch  $([\mathcal{A}], \Pi)$  eindeutig bestimmt, denn sei z.B.  $G\phi$ ,  $\phi \in \Omega_{1c}(M_k, \mathbb{C})$  mit  $\delta\phi = 0$ , eine weitere Lösung des Cauchyproblems des Vektorpotentials zu diesen Cauchydaten. Dann gilt nach der Eindeutigkeitsaussage 4.1.2  $[G\phi] = [G\theta]$  und daher  $\phi = \theta - \delta d\theta'$ ,  $\theta' \in \Omega_{1c}(M_k, \mathbb{C})$ . Siehe hierfür die Unterabschnitte 4.2.4 und 4.3.2 und beachte, daß  $M_k$  zusammenziehbar ist. Mit den Eigenschaften von  $\mathfrak{A}(M_k)$  nach Unterabschnitt 4.3.2, speziell der Linearität und dem Erfüllen der Feldgleichungen im Sinne von Distributionen, berechnet man  $[\widehat{\mathbf{A}}]_k(\phi) = [\widehat{\mathbf{A}}]_k(\theta - \delta d\theta') = [\widehat{\mathbf{A}}]_k(\theta)$ .

Bezeichne nun  $\alpha_{\Sigma_k M_k}$  denjenigen Algebrenhomomorphismus, der Elemente von  $\mathfrak{A}(\Sigma_k)$  auf Elemente aus  $\mathfrak{A}(M_k)$  nach dieser Vorschrift eindeutig abbildet.  $\alpha_{\Sigma_k M_k}$  ist ein Isomorphismus, die Umkehrabbildung wird explizit gegeben durch den Algebrenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha_{\Sigma_k M_k}^{-1} = \alpha_{M_k \Sigma_k} : \mathfrak{A}(M_k) &\longrightarrow \mathfrak{A}(\Sigma_k) \\ [\widehat{\mathbf{A}}]_k(\theta) &\longmapsto \Phi([\iota^{pb} G\theta], *^{-1} \iota^{pb} * dG\theta), \\ 1_{\mathfrak{A}(M_k)} &\longmapsto 1_{\mathfrak{A}(\Sigma_k)}, \end{aligned}$$

also im Prinzip durch die Abbildung auf die Cauchydaten von  $G\theta$ .  $\alpha_{\Sigma_k M_k}$  erhält den Kommutator, da

$$\begin{aligned} \alpha_{\Sigma M} \left( \left[ \Phi([\mathcal{A}_1], \Pi_1), \Phi([\mathcal{A}_2], \Pi_2) \right] \right) &= \alpha_{\Sigma M} \left( i\hbar \left( \int_{\Sigma} [\mathcal{A}_1] \wedge * \Pi_2 - [\mathcal{A}_2] \wedge * \Pi_1 \right) 1_{\mathfrak{A}(\Sigma)} \right) \\ &= i\hbar s_{\Sigma} \left( ([\mathcal{A}_1], \Pi_1), ([\mathcal{A}_2], \Pi_2) \right) \alpha_{\Sigma M} (1_{\mathfrak{A}(\Sigma)}) = i\hbar s_{\mathbb{L}} ([G\theta_1], [G\theta_2]) 1_{\mathfrak{A}(M)} \\ &= i\hbar \left( \int_M G\theta_1 \wedge * \theta_2 \right) 1_{\mathfrak{A}(M)} = \left[ [\widehat{\mathbf{A}}](\theta_1), [\widehat{\mathbf{A}}](\theta_2) \right]. \end{aligned}$$

In Abschnitt 4.4 wurde festgestellt, daß in dem vorliegenden Fall eines zusammenziehbaren  $M_k$  die Gleichheit  $\mathfrak{A}(M_k) = \mathfrak{F}(M_k)$  gilt. Aus diesem Grund ist  $\alpha_{\Sigma_k M_k}$  sogar ein Algebrenisomorphismus  $\mathfrak{A}(\Sigma_k) \longrightarrow \mathfrak{F}(M_k)$ , der den Kommutator erhält. Schaltet man  $\gamma_k$  vor, so erhält man einen Algebrenisomorphismus

$$\varphi_{\Sigma_k M_k} := \alpha_{\Sigma_k M_k} \circ \gamma_k : \mathfrak{F}(\Sigma_k) \longrightarrow \mathfrak{F}(M_k),$$

der den Kommutator erhält.

## Globaler Algebrenisomorphismus

Nach der Konstruktion der Feldalgebra des Feldstärketensors als universellen Algebra  $\mathfrak{F}_u(M)$  nach Abschnitt 6.1 gilt  $\mathfrak{F}(M_k) \subset \mathfrak{F}_u(M) \forall k \in K$  und  $\varphi_{\Sigma_k M_k}$  kann daher auch direkt als Algebrenhomomorphismus  $\mathfrak{F}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{F}_u(M)$  aufgefaßt werden. Es liegt das folgende Diagramm vor

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{F}(\Sigma_k) & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma_k M_k}} & \mathfrak{F}_u(M) \\
 \text{Inklusion } \iota_k \downarrow & & \nearrow \\
 \mathfrak{F}_u(\Sigma) & & 
 \end{array}$$

Die Frage ist nun, ob ein Algebrenisomorphismus  $\varphi_{\Sigma M} : \mathfrak{F}_u(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{F}_u(M)$  existiert, der den Kommutator erhält.

Sei  $\Sigma_k \subseteq \Sigma_l$ , dann ist  $\varphi_{\Sigma_l M_l} \circ \iota_{kl} = \varphi_{\Sigma_k M_k}$  erfüllt, wobei  $\iota_{kl}$  die Inklusion  $\mathfrak{F}(\Sigma_k) \rightarrow \mathfrak{F}(\Sigma_l)$  bezeichne. Da diese Kompatibilitätsbedingung erfüllt wird, existiert nach den Eigenschaften der universellen Algebra, siehe Unterabschnitt 6.1.3, ein Algebrenhomomorphismus  $\varphi_u : \mathfrak{F}_u(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{F}_u(M)$ , der  $\varphi_u \circ \iota_k = \varphi_{\Sigma_k M_k}$  erfüllt. Sei  $a \in \mathfrak{F}_u(\Sigma)$  ein allgemeines Element, dann läßt sich  $a$  schreiben als  $a = \sum_{i,j} z_{ij} \Phi_i(B_j, E_j)$ , nur endlich viele Summanden sind ungleich Null. Gilt nun  $\varphi_u(a) = 0 \in \mathbb{F}_u(M)$ , dann gilt wegen der Eindeutigkeitsaussagen für die lokalen Algebren

$$\begin{aligned}
 \varphi_u(a) &= \varphi_u\left(\sum_{i,j} z_{ij} \Phi_i(B_j, E_j)\right) = \sum_{i,j} \varphi_u(z_{ij} \Phi_i(B_j, E_j)) \\
 &= \sum_{i,j} \varphi_u \circ \iota_k(z_{ij} \Phi_i(B_j, E_j)) = \sum_{i,j} \varphi_{\Sigma_i M_i}(z_{ij} \Phi_i(B_j, E_j)) \\
 &= \sum_{i,j} z_{ij} \widehat{\mathbf{F}}_i(\tilde{\omega}_j) = \sum_i \widehat{\mathbf{F}}_i(\omega_i) = 0,
 \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\widehat{\mathbf{F}}_i(\omega_i) = 0 \quad \forall i \implies \sum_j z_{ij} \Phi_i(B_j, E_j) = 0 \quad \forall i \implies a = 0.$$

$\varphi_u$  ist also injektiv.  $\varphi_u$  ist auch surjektiv, denn sei  $\widehat{\mathbf{F}}_i(\omega)$  ein Erzeuger von  $\mathfrak{F}_u(M)$ ,  $\omega \in \Omega_{2c}(M_i, \mathbb{C})$ ,  $i \in I$ . Sei weiter  $O(\Sigma) \subseteq \bigcup_{k \in K} M_k$  eine offene Umgebung von  $\Sigma$ , dann gibt es nach Lemma 6.3.1 ein  $\omega' \in \Omega_{2c}(O(\Sigma), \mathbb{C})$  mit  $\widehat{\mathbf{F}}_i(\omega) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega')$ .

$$\widehat{\mathbf{F}}(\omega') = \sum_{k \in K} \widehat{\mathbf{F}}_k(\psi_k \omega') = \sum_{k \in K} \varphi_{\Sigma_k M_k}(\Phi_k(B_k, E_k)),$$

da  $\mathfrak{F}(\Sigma_k) \cong \mathfrak{F}(M_k)$  ist.  $\{\psi_k\}_{k \in K}$  bezeichne die Zerlegung der Eins zugeordnet zu  $\{M_k\}_{k \in K}$ .  $\sum_{k \in K} \Phi_k(B_k, E_k) \in \mathfrak{F}_u(\Sigma)$  ist also dasjenige Element mit

$$\varphi_u\left(\sum_{k \in K} \Phi_k(B_k, E_k)\right) = \widehat{\mathbf{F}}_i(\omega)$$

und  $\varphi_u$  ist demnach surjektiv und insgesamt also bijektiv. Weiter erhält  $\varphi_u$  auch die Kommutatorrelation, da

$$\begin{aligned} \varphi_u\left(\left[\Phi_k(B, E), \Phi_l(B', E')\right]\right) &= i\hbar \left(\int_{\Sigma} [A] \wedge *E' - [A'] \wedge *E\right) \varphi_u(1_{\mathfrak{F}_u(\Sigma)}) \\ &= i\hbar \left(\int_{\Sigma} [l^{pb}G\theta] \wedge *E' - [l^{pb}G\theta'] \wedge *E\right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)} = i\hbar \left(\int_M G\theta \wedge *\theta'\right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)} \\ &= i\hbar \left(\int_M G\delta\omega \wedge *\delta\omega'\right) 1_{\mathfrak{F}_u(M)} = \left[\widehat{\mathbf{F}}(\omega), \widehat{\mathbf{F}}(\omega')\right], \end{aligned}$$

gilt, wobei  $\varphi_u(\Phi_k(B, E)) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega)$  mit  $\omega \in \Omega_{2c}(M_k, \mathbb{C})$  und  $\varphi_u(\Phi_l(B, E)) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega')$  mit  $\omega' \in \Omega_{2c}(M_l, \mathbb{C})$  eindeutig bestimmt sind.

## 6.4 Quantisiertes Maxwellfeld als lcQFT

Zum Abschluß soll gezeigt werden, daß das quantisierte Maxwellfeld eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie nach Abschnitt 1.3 definiert.

### 6.4.1 Satz (Quantisiertes Maxwellfeld als lcQFT)

Die Vorschrift  $\mathfrak{F}_u$  definiert einen kovarianten Funktor zwischen den Kategorien  $\mathfrak{Man}$  und  $*\mathfrak{Alg}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_u : \mathfrak{Man} &\longrightarrow * \mathfrak{Alg} \\ M &\longmapsto \mathfrak{F}_u(M), \end{aligned}$$

$$\text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M, g), (M', g')) \ni \psi \longmapsto \mathfrak{F}_u\psi \in \text{Mor}_{*\mathfrak{Alg}}(\mathfrak{F}_u(M), \mathfrak{F}_u(M')),$$

wobei  $\mathfrak{F}_u\psi$  als Algebrenhomomorphismus mit  $\mathfrak{F}_u\psi(\widehat{\mathbf{F}}(\omega)) := \widehat{\mathbf{F}}'(\psi_{pf}\omega)$  und  $\mathfrak{F}_u\psi(1_{\mathfrak{F}_u(M)}) := 1_{\mathfrak{F}_u(M')}$  definiert wird.  $\psi_{pf}$  bezeichnet das Drücken mit  $\psi$ , siehe Unterabschnitt A.5.5. Darüber hinaus ist die so definierte lokal kovariante Quantenfeldtheorie kausal und genügt dem Zeitschichtaxiom.

**Beweis:** Wohldefiniertheit: Sei  $\psi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M, g), (M', g'))$ . Es ist zu zeigen daß  $\mathfrak{F}_u\psi \in \text{Mor}_{*\mathfrak{Alg}}(\mathfrak{F}_u(M), \mathfrak{F}_u(M'))$  ist.  $\mathfrak{F}_u\psi$  ist ein Algebrenhomomorphismus  $\mathfrak{F}_u(M) \longrightarrow \mathfrak{F}_u(M')$  nach Definition.  $\mathfrak{F}_u\psi$  ist auch ein  $*$ -Morphismus,

da für alle  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) \in \mathfrak{F}_u(M)$  gilt:

$$\mathfrak{F}_u\psi(\widehat{\mathbf{F}}(\omega)^*) = \mathfrak{F}_u\psi(\widehat{\mathbf{F}}(\bar{\omega})) = \widehat{\mathbf{F}}'(\psi_{pf}\bar{\omega}) \stackrel{B.9.2}{=} \widehat{\mathbf{F}}'(\overline{\psi_{pf}\omega}) = \widehat{\mathbf{F}}'(\psi_{pf}\omega)^*.$$

Gelte nun  $\mathfrak{F}_u\psi(\widehat{\mathbf{F}}(\omega)) = \widehat{\mathbf{F}}'(\psi_{pf}\omega) = 0 \in \mathfrak{F}_u(M')$ . Nach der Konstruktion von  $\mathfrak{F}_u(M')$ , der lokalen Feldalgebren des Feldstärketensors  $\mathfrak{F}(M'_i)$  und (6.1.4) muß eine der drei Möglichkeiten

$$\begin{aligned} \psi_{pf}\omega &= \square\omega' \text{ für ein } \omega' \in \Omega_{2c}(M', \mathbb{C}), \\ \psi_{pf}\omega &= -d\theta \text{ für ein } \theta \in \Omega_{1c}(M', \mathbb{C}), \\ \psi_{pf}\omega &= \delta\eta \text{ für ein } \eta \in \Omega_{3c}(M', \mathbb{C}), \end{aligned}$$

eintreten. Die erste Möglichkeit ist wegen  $\square = -\delta d - d\delta$  und der Linearität auf die anderen beiden Fälle zurückführbar. Für diese schließen wir mit den Aussagen aus Definition A.5.5

$$\begin{aligned} \psi_{pf}\omega = -d\theta &\implies \psi^{pb}\psi_{pf}\omega = \omega = -\psi^{pb}d\theta = -d\psi^{pb}\theta, \\ \psi_{pf}\omega = \delta\eta &\implies \psi^{pb}\psi_{pf}\omega = \omega = \psi^{pb}\delta\eta = \delta\psi^{pb}\eta, \end{aligned}$$

also gilt schon  $\widehat{\mathbf{F}}(\omega) = 0 \in \mathfrak{F}_u(M)$ .  $\mathfrak{F}_u\psi$  ist deswegen injektiv und insgesamt wohldefiniert. Als Konsistenzüberprüfung kann man mit den Eigenschaften des Zurückholens von Differentialformen und der Diffeomorphieinvarianz des Integrals zeigen, daß  $\mathfrak{F}_u\psi$  den Kommutator erhält.

Kovarianzeigenschaften: Für alle Objekte  $\mathfrak{F}_u(M)$  aus der Kategorie  $\ast\text{-}\mathfrak{Alg}$  gilt

$$\mathfrak{F}_u id_M(\widehat{\mathbf{F}}(\omega)) = \widehat{\mathbf{F}}(id_{M,pf}\omega) = \widehat{\mathbf{F}}(\omega) \quad \forall \widehat{\mathbf{F}}(\omega) \in \mathfrak{F}_u(M).$$

Damit folgt  $\mathfrak{F}_u id_M = id_{\mathfrak{F}_u(M)}$ . Seien weiter  $\psi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M, g), (M', g'))$  und  $\psi' \in \text{Mor}_{\mathfrak{Man}}((M', g'), (M'', g''))$  Morphismen, deren Verknüpfung  $\psi' \circ \psi$  Sinn macht. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_u(\psi' \circ \psi)(\widehat{\mathbf{F}}(\omega)) &= \widehat{\mathbf{F}}''((\psi' \circ \psi)_{pf}\omega) = \widehat{\mathbf{F}}''(\psi'_{pf}(\psi_{pf}\omega)) = \mathfrak{F}_u\psi'(\widehat{\mathbf{F}}'(\psi_{pf}\omega)) \\ &= \mathfrak{F}_u\psi'(\mathfrak{F}_u\psi(\widehat{\mathbf{F}}(\omega))) = (\mathfrak{F}_u\psi' \circ \mathfrak{F}_u\psi)(\widehat{\mathbf{F}}(\omega)) \quad \forall \widehat{\mathbf{F}}(\omega) \in \mathfrak{F}_u(M), \end{aligned}$$

woraus  $\mathfrak{F}_u(\psi' \circ \psi) = \mathfrak{F}_u\psi' \circ \mathfrak{F}_u\psi$  für alle Morphismen folgt, deren Verknüpfung sinnvoll ist.

Kausalität und Zeitschichtaxiom: Die durch  $\mathfrak{F}_u$  definierte lokal kovariante Quantenfeldtheorie ist kausal nach der Struktur des Kommutators nach Satz 6.1.5, dem Lichnerowiczkommutator. Das Zeitschichtaxiom wird nach den Aussagen aus Abschnitt 6.3 erfüllt.  $\square$

# Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir uns mit dem quantisierten Maxwellfeld auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten befaßt. Der Fokus lag auf einer Quantisierung des Maxwellfeldes für beliebige Topologien der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit und auf einer Behandlung im Sinne der Algebraischen Quantenfeldtheorie.

Wir haben die Wohlgestelltheit des Cauchyproblems des Maxwellfeldes auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten gezeigt, unabhängig von deren Topologie und ohne die Einführung von Potentialen, die Feldalgebra des Feldstärketensors konstruiert und deren Struktur untersucht. Die Feldalgebra des Feldstärketensors konstruierten wir u.a. als universelle Algebra eines Systems lokaler Feldalgebren. Dadurch erhielten wir eine Idee für einen Beweis, um explizit zu zeigen, daß die Kommutatorrelation in der Feldalgebra des Feldstärketensors durch den Lichnerowiczkommutator gegeben ist. Wir stellten fest, daß für den Fall einer nicht trivialen 2-ten de Rham-Kohomologiegruppe die Feldalgebra des Feldstärketensors ein nicht triviales Zentrum besitzt. Wir konnten nicht triviale Zentrumselemente explizit konstruieren, welche die Interpretation von nicht trivialen elektrischen und magnetischen Flüssen zuließen. Weiter zeigten wir die Gültigkeit des Zeit-schichtaxioms und konstruierten die Algebra der Cauchyhyperfläche sowie den Algebrenisomorphismus von dieser in die Feldalgebra des Feldstärketensors. Zum Schluß stellten wir fest, daß das quantisierte Maxwellfeld eine lokal kovariante Quantenfeldtheorie definiert.

Bei all diesen Betrachtungen und expliziten Konstruktionen erwies sich das Konzept der de Rham-Kohomologie und der singulären Homologie als äußerst hilfreich.

## Ausblick

Die Theorie des quantisierten Maxwellfeldes ist zu umfangreich, als daß in dieser Arbeit alle Aspekte betrachtet werden konnten.

Das Auftreten von Superauswahlsektoren konnten wir nicht über die bereits in [AS80] erhaltenen Resultate hinaus behandeln. Superauswahlsektoren

ren sind ein interessantes Thema und werden aktuell von R. Brunetti und G. Ruzzi ([BR05], [BR08]) behandelt.

Weiter sind wir der Meinung, daß die in Unterabschnitt 4.3.2 angemerkte Diskrepanz zwischen der klassischen und der quantisierten Theorie des Vektorpotentials ausführlicher untersucht werden sollte. In Abschnitt 4.4 wurde für  $H_{dR}^1 M \neq 0$  die Existenz von Elementen der Feldalgebra des Vektorpotentials festgestellt, die *nicht* auf ein Element der Feldalgebra des Feldstärketensors führen. Das bedeutet, daß es für  $H_{dR}^1 M \neq 0$  in der quantisierten Theorie Feldoperatoren des Vektorpotentials gibt, die keinen Feldstärkeoperator liefern. Dieser Umstand sollte ebenfalls eingehender untersucht werden.

Das sehr wichtige Thema der (Hadamard-)Zustände des Maxwellfeldes auf allgemeinen global hyperbolischen Raumzeiten wurde in dieser Arbeit nicht behandelt und ist eine Aufgabe, die in Zukunft in Angriff genommen werden sollte.

Wir haben den Elektromagnetismus als Theorie von Differentialformen behandelt. Er kann aber auch als eine  $U(1)$ -Eichfeldtheorie aufgefaßt werden. Die Potentiale sind dann Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln und der Feldstärketensor ist die Krümmung dieses Zusammenhanges. Es ist nun ein weiterer Schritt, unsere Behandlung des Elektromagnetismus (als Theorie von Differentialformen) in die Sprache der Eichfeldtheorien zu übersetzen, was zu neuen Erkenntnissen führen könnte.

Es wäre auch interessant zu untersuchen, ob es mit den Methoden dieser Arbeit möglich ist, den Aharonov-Bohm Effekt zu erklären.

# Anhang A

## Glatte Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel wollen wir kurz und knapp die wichtigsten Begriffe und Konstruktionen auf glatten Mannigfaltigkeiten besprechen, mit denen wir in dieser Arbeit zu tun haben. Primär wollen wir erklären, was man unter einer Differentialform versteht und wie man diese handhabt. Dabei können wir aber im Rahmen dieser Arbeit nicht in die Details gehen. Hierfür verweisen wir auf die mannigfaltige Literatur über Differentialgeometrie. Viele Konzepte, wie z.B. Topologie, Orientierbarkeit von und Integration auf glatten Mannigfaltigkeiten werden wir nicht einführen, aber trotzdem deren Ergebnisse und Begriffe verwenden.

### A.1 Grundbegriffe

Unter einer  $m$ -dimensionalen *glatten Mannigfaltigkeit*  $M$  versteht man einen topologischen Hausdorffraum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und lokal diffeomorph zu offenen Mengen des  $\mathbb{R}^m$  ist. Für eine mathematisch präzisere Definition und insbesondere um sich mit solch wichtigen Begriffen wie „Karte“, „Kartenwechsel“, „Atlas“, „glatte Struktur“, „Diffeomorphismus“, „glatte Einbettung“, usw. vertraut zu machen, verweisen wir auf die angegebene Literatur. Mit der dort verwendeten Definition sind glatte Mannigfaltigkeiten immer lokal kompakt und parakompakt.

#### A.1.1 Definition und Satz (Zerlegung der Eins)

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{X} := \{X_i\}_{i \in I}$  eine beliebige, offene Überdeckung von  $M$ . Eine zu  $\mathcal{X}$  zugeordnete Zerlegung der Eins ist eine Familie von glatten Funktionen  $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$ , mit den Eigenschaften

- $0 \leq \psi_i \leq 1 \quad \forall i \in I$ .



- $\text{supp}(\psi_i) \subset X_i$ .
- Die Menge der Träger  $\text{supp}(\psi_i)$  ist lokal endlich, d.h.  $\forall p \in M \exists O$  offene Umgebung von  $p$  mit  $O \cap \text{supp}(\psi_i) \neq \emptyset$  nur für endlich viele der  $\psi_i$ .
- $\sum_{i \in I} \psi_i(p) = 1 \quad \forall p \in M$ .

Zu jeder beliebigen, offenen Überdeckung  $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i \in I}$  von  $M$  existiert eine zugeordnete Zerlegung der Eins.

**Beweis:** Siehe [Lee03, Thm.2.25]. □

### A.1.2 Folgerung (Glatte Abschneidefunktion)

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Für jede abgeschlossene Menge  $A \Subset M$  und jede offene Menge  $U \Subset M$  mit  $A \subset U$  gibt es eine glatte Abschneidefunktion  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}$  von  $A$  getragen in  $U$ , d.h.

$$\begin{aligned} \text{supp}(\chi) &\subset U, \\ 0 &\leq \chi \leq 1, \\ \chi|_A &\equiv 1. \end{aligned}$$

### A.1.3 Tangential- und Kotangentialraum

Für eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$  definieren wir ihren *Tangentialraum*  $T_p M$  bei einem Punkt  $p \in M$  in der algebraischen Weise als Vektorraum aller Derivationen auf den Funktionskeimen. Der *Kotangentialraum*  $T_p^* M$  ist dann als der Dualraum des Tangentialraumes definiert. Beide sind für alle  $p \in M$   $m$ -dimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und ist  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$  um  $p \in M$ , dann werden explizite Basen des Tangential- und Kotangentialraumes gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_i^\varphi \Big|_p &= \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p : \mathcal{C}_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ [f]_p &\longmapsto \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)), \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

und

$$d_p \varphi^i : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v_p \longmapsto d_p \varphi^i(v_p) = v_p([\varphi^i]_p), \quad i = 1, \dots, m.$$

Bei einem Kartenwechsel, etwa beim Wechsel von der Karte  $(U, \varphi)$  in eine Karte  $(V, \psi)$  mit  $U \cap V \neq \emptyset$ , erhält man somit als Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} \partial_i^\varphi \Big|_p &= \frac{\partial(\psi^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \partial_j^\psi \Big|_p =: T^{\varphi \rightarrow \psi}{}^j{}_i(p) \partial_j^\psi \Big|_p, \\ \psi v_p^j &= T^{\varphi \rightarrow \psi}{}^j{}_i(p) \varphi v_p^i, \\ d_p \varphi^i &= \frac{\partial(\varphi^i \circ \psi^{-1})}{\partial x^j}(\psi(p)) d_p \psi^j =: T^{\psi \rightarrow \varphi}{}^i{}_j(p) d_p \psi^j, \\ \psi \omega_j(p) &= T^{\psi \rightarrow \varphi}{}^i{}_j(p) \varphi \omega_i(p). \end{aligned}$$

Dieses Transformationsverhalten ist genau dasjenige, durch welches man Vektoren in der Physik charakterisiert. Die auftauchenden Matrizen  $T^{\varphi \rightarrow \psi}{}^j{}_i(p)$  und  $T^{\psi \rightarrow \varphi}{}^i{}_j(p)$  nennt man die *Matrizen des Kartenwechsels*. Wegen der Kettenregel gilt

$$T^{\varphi \rightarrow \psi}{}^j{}_i(p) T^{\psi \rightarrow \varphi}{}^k{}_j(p) = \delta_i^k = T^{\varphi \rightarrow \psi}{}^k{}_j(p) T^{\psi \rightarrow \varphi}{}^j{}_i(p).$$

### A.1.4 Lemma (Tangentialabbildung)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale und  $N$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und  $f : M \longrightarrow N$  eine glatte Abbildung.  $f$  induziert eine lineare Abbildung  $Tf : TM \longrightarrow TN$  mittels

$$(T_p f)(v_p)([h]_{f(p)}) = v_p([h \circ f]_p),$$

wobei  $T_p f = Tf \Big|_p$  und  $h \in \mathcal{C}_{f(p)}^\infty(N)$  ist. Diese Abbildung  $Tf$  heißt die Tangentialabbildung von  $f$ .

Die Tangentialabbildung erfüllt die Kettenregel und ist  $f$  ein Diffeomorphismus, so ist  $T_p f$  ein Isomorphismus für alle  $p \in M$ .

## A.2 Eingebettete Untermannigfaltigkeiten

Raumartige glatte Cauchyhyperflächen (siehe C.2.7) sind glatte eingebettete Untermannigfaltigkeiten. In Hinsicht auf das Cauchyproblem, empfinden

wir es daher als äußerst nützlich, einige Eigenschaften von eingebetteten Untermannigfaltigkeiten anzugeben, sowie deren Tangential-/Kotangentialraum mit denen der umgebenden Mannigfaltigkeit in Verbindung zu bringen. Hierbei greifen wir dem noch nicht eingeführten Begriff des Zurückholens von  $(0,s)$ -Tensoren (siehe A.5.5) vor.

### A.2.1 Definition (Eingebettete Untermannigfaltigkeit)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und  $n \leq m$ . Eine Teilmenge  $N \subset M$  heißt  $n$ -dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $M$  genau dann, wenn es für alle  $p \in N$  eine Karte  $(V, \phi)$  von  $M$  um  $p$  gibt, mit

$$\phi(V \cap N) = \phi(V) \cap \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\} \times \mathbb{R}^n.$$

Karten  $(V, \phi)$  von  $M$ , welche die in der Definition genannte Eigenschaft besitzen, heißen *Schnittkarten* von  $M$  für  $N$ . Diese haben ein interessantes Verhalten bei Kartenwechsel, was kurz angesprochen werden soll. Sind  $(V, \phi)$  und  $(W, \theta)$  zwei Schnittkarten einer  $m$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit  $M$  für eine  $n$ -dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit  $N$  mit  $V \cap W \neq \emptyset$ ,  $n \leq m$ . Dann gilt wegen  $\left. \begin{smallmatrix} m-n \\ \mathbf{a}^n \phi^i \end{smallmatrix} \right|_N = 0 = \left. \begin{smallmatrix} m-n \\ \mathbf{a}^n \theta^i \end{smallmatrix} \right|_N$  für alle Punkte  $q \in N \cap V \cap W$  für die Matrizen der Kartenwechsel von  $(V, \phi)$  nach  $(W, \theta)$  und umgekehrt:

$${}^{\phi \mapsto \theta} T^i_j(q) = {}^{\theta \mapsto \phi} T^i_j(q) = 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m-n\} \times \{m-n+1, m\}$$

In Matrixschreibweise gilt also

$${}^{\phi \mapsto \theta} T(q) = \begin{pmatrix} {}^{\phi \mapsto \theta} T^1_1(q) & \dots & {}^{\phi \mapsto \theta} T^1_{m-n}(q) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{\phi \mapsto \theta} T^{m-n}_1(q) & \dots & {}^{\phi \mapsto \theta} T^{m-n}_{m-n}(q) & 0 & \dots & 0 \\ {}^{\phi \mapsto \theta} T^{m-n+1}_1(q) & \dots & {}^{\phi \mapsto \theta} T^{m-n+1}_{m-n}(q) & {}^{\phi \mapsto \theta} T^{m-n+1}_{m-n+1}(q) & \dots & {}^{\phi \mapsto \theta} T^{m-n+1}_m(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{\phi \mapsto \theta} T^m_1(q) & \dots & {}^{\phi \mapsto \theta} T^m_{m-n}(q) & {}^{\phi \mapsto \theta} T^m_{m-n+1}(q) & \dots & {}^{\phi \mapsto \theta} T^m_m(q) \end{pmatrix}$$

und

$$\theta_{\rightarrow\phi} T(q) = \begin{pmatrix} \theta_{\rightarrow\phi} T_1^1(q) & \cdots & \theta_{\rightarrow\phi} T_{m-n}^1(q) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{\rightarrow\phi} T_1^{m-n}(q) & \cdots & \theta_{\rightarrow\phi} T_{m-n}^{m-n}(q) & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{\rightarrow\phi} T_1^{m-n+1}(q) & \cdots & \theta_{\rightarrow\phi} T_{m-n}^{m-n+1}(q) & \theta_{\rightarrow\phi} T_{m-n+1}^{m-n+1}(q) & \cdots & \theta_{\rightarrow\phi} T_m^{m-n+1}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{\rightarrow\phi} T_1^m(q) & \cdots & \theta_{\rightarrow\phi} T_{m-n}^m(q) & \theta_{\rightarrow\phi} T_{m-n+1}^m(q) & \cdots & \theta_{\rightarrow\phi} T_m^m(q) \end{pmatrix}.$$

### A.2.2 Satz (Glatte Struktur)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit,  $n \leq m$  und  $N$  eine  $n$ -dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit. Mit der von  $M$  induzierten Topologie wird  $N$  eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und es gibt genau eine  $C^\infty$ -Struktur für  $N$ , so daß die Inklusion  $\iota : N \rightarrow M$  eine glatte Einbettung wird. Diese  $C^\infty$ -Struktur wird erzeugt durch den Atlas

$$\mathcal{A} := \left\{ (U := V \cap N, \varphi := pr_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^m} \circ \phi|_U) \mid (V, \phi) \text{ ist Schnitkarte von } M \text{ für } N \right\},$$

wobei  $pr_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Projektion auf die letzten  $n$  Komponenten bezeichne.

**Beweis:** Siehe [Lee03, Thm.8.2]. □

Mit einer glatten eingebetteten Untermannigfaltigkeit ist immer eine eingebettete Untermannigfaltigkeit nach Definition A.2.1 gemeint, die mit der induzierten Topologie und genau mit der in Satz A.2.2 angegebenen glatten Struktur versehen ist. Eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $N$ , die aus einer Schnitkarte  $(V, \phi)$  von  $M$  für  $N$  wie in Satz A.2.2 konstruiert wurde, heißt die zu  $(V, \phi)$  zugehörige Karte von  $N$ . Für die Komponentenfunktionen einer Schnitkarte  $(V, \phi)$  von  $M$  für  $N$  und deren zugehörigen Karte  $(U, \varphi)$  von  $N$  gilt für  $m - n + 1 \leq i \leq m$  die Gleichheit

$$\phi^i|_U = pr^{\mathbb{R}^m, i} \circ \phi|_U = pr^{\mathbb{R}^n, i} \circ pr_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{R}^m} \circ \phi|_U = pr^{\mathbb{R}^m, i} \circ \varphi = \varphi^i.$$

### A.2.3 Tangentialraum

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und  $N$  eine glatte,  $n$ -dimensionale, eingebettete Untermannigfaltigkeit,  $n \leq m$ . Sei weiter  $q \in N$ .

Wegen der in Satz A.2.2 explizit angegebenen  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur, kann man  $T_q N$  mit  $T_q M$  in einen sehr nützlichen Zusammenhang bringen. Gegeben eine Schnittkarte  $(V, \phi)$  von  $M$  für  $N$  um  $q$ , so werden die besagten Tangentialräume gegeben durch

$$T_q M = \text{Spann}\left(\left. \begin{matrix} m \\ \mathbf{a} \\ \partial_i^\phi \end{matrix} \right|_q\right),$$

$$T_q N = \text{Spann}\left(\left. \begin{matrix} m \\ \mathbf{a} \\ \partial_i^\varphi \end{matrix} \right|_q\right),$$

wobei  $(U, \varphi)$  die zu  $(V, \phi)$  gehörige Karte von  $N$  sei. Da die Umkehrabbildung von  $\varphi$  gegeben wird durch  $\varphi^{-1} = (\phi|_U)^{-1} \circ \varsigma$ , wobei

$$\varsigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x^{m-n+1}, \dots, x^m) \longmapsto \left(\begin{matrix} m-n \\ \mathbf{a} \\ 0 \end{matrix}, x^{m-n+1}, \dots, x^m\right),$$

folgt für alle glatten Funktionen  $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_{m-n+1}^\varphi|_q(f) \\ \vdots \\ \partial_m^\varphi|_q(f) \end{pmatrix} &= d_{\varphi(q)}(f \circ \varphi^{-1}) = d_{\varphi(q)}(f \circ \phi^{-1} \circ \varsigma) \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} d_{\varsigma \circ \varphi(q)}(f \circ \phi^{-1}) d_{\varphi(q)} \varsigma \\ &= d_{\phi(q)}(f \circ \phi^{-1}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varsigma^1}{\partial x^{m-n+1}}|_{\varphi(q)} & \cdots & \frac{\partial \varsigma^1}{\partial x^m}|_{\varphi(q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varsigma^{m-n}}{\partial x^{m-n+1}}|_{\varphi(q)} & \cdots & \frac{\partial \varsigma^{m-n}}{\partial x^m}|_{\varphi(q)} \\ \frac{\partial \varsigma^{m-n+1}}{\partial x^{m-n+1}}|_{\varphi(q)} & \cdots & \frac{\partial \varsigma^{m-n+1}}{\partial x^m}|_{\varphi(q)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varsigma^m}{\partial x^{m-n+1}}|_{\varphi(q)} & \cdots & \frac{\partial \varsigma^m}{\partial x^m}|_{\varphi(q)} \end{pmatrix} \\ &= (\partial_1^\phi|_q(f), \dots, \partial_m^\phi|_q(f)) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{m-n+1}^\phi \Big|_q (f) \\ \vdots \\ \partial_m^\phi \Big|_q (f) \end{pmatrix}.$$

Ähnlich hilfreiche Aussagen lassen sich auch über den Kotangententialraum machen.

### A.2.4 Kotangententialraum

Sei wieder  $M$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit,  $N$  eine glatte,  $n$ -dimensionale, eingebettete Untermannigfaltigkeit,  $n \leq m$  und  $q \in N$ . Sei  $(V, \phi)$  Schnittkarte von  $M$  für  $N$  und  $(U, \varphi)$  die zugehörige Karte von  $N$ . Die Kotangententialräume am Punkt  $q$  haben die Gestalt

$$T_q^* M = \text{Spann}(\overset{m}{\mathbf{a}} d_q \phi^i),$$

$$T_q^* N = \text{Spann}(\underset{i=m-n+1}{\mathbf{a}} d_q \varphi^i).$$

Mittels des Zurückholens von  $(0, s)$ -Tensoren durch die Hilfe der Einbettung  $\iota : N \rightarrow M$  erhält man  $\forall q \in U$

$$\iota^{pb}(d\phi^i)_q(\partial_j^\varphi \Big|_q) = d_q \phi^i((T_q \iota)(\partial_j^\varphi \Big|_q)) = d_q \phi^i(\partial_j^\phi \Big|_q) = \delta_j^i,$$

wobei

$$((T_q \iota)(\partial_j^\varphi \Big|_q))(\phi^k) \stackrel{A.1.4}{=} \partial_j^\varphi \Big|_q (\phi^k \circ \iota) \stackrel{A.2.3}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls } 1 \leq k \leq m-n, \\ \partial_j^\phi \Big|_q (\phi^k), & \text{falls } m-n+1 \leq k \leq m \end{cases}$$

benutzt wurde. Es folgt

$$\iota^{pb}(d\phi^j) \Big|_U = d\varphi^j, \quad j \in \{m-n+1, \dots, m\}.$$

Dies hätte man auch direkt aus Lemma A.1.4 mittels

$$\iota^{pb}(d\phi^i) \Big|_U \stackrel{A.1.4}{=} d(\phi^i \circ \iota) \Big|_U = \begin{cases} 0, & \text{falls } 1 \leq i \leq m-n \\ d(\phi^i \Big|_N) \Big|_U = d\varphi^i, & \text{falls } m-n+1 \leq i \leq m \end{cases}$$

folgern können. Auf Grund dieser Tatsachen ist es besonders einfach, in Schnittkarten das Zurückholen von Differentialformen auszurechnen.

## A.3 Vektorbündel

Der Vorteil der mathematischen Formulierung der Größen des Elektromagnetismus als Differentialformen ist nicht nur die sehr elegante und kompakte Form, welche die Maxwellgleichungen annehmen, sondern auch die in [BGP07] bereitgestellte Lösungstheorie von Differentialgleichungen, die in Termen normal hyperbolischer Differentialoperatoren und Schnitten in Vektorbündeln formuliert ist. Siehe hierfür auch Abschnitt C.5. Darüber hinaus lassen sich die Maxwellgleichungen in der differentialgeometrischen Formulierung besonders einfach auf beliebige, gekrümmte Raumzeiten verallgemeinern. Der Begriff des Vektorbündels ist aber nicht nur für eine elegante Formulierung der Maxwellgleichungen und der Lösungstheorie von Differentialgleichungen wichtig, sondern auch ganz allgemein unverzichtbar für die Geometrie auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten. Das Vektorbündel ist z.B. unerlässlich für die Definition der kovarianten Ableitung und damit für die Definition des Riemanntensors, der die Informationen über die Krümmung einer Mannigfaltigkeit trägt.

### A.3.1 Definition (Glatte Vektorraumbündel)

Ein  $k$ -dimensionales glattes  $\mathbb{R}$ -Vektorraumbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Tripel  $(E, M, \pi)$ , bestehend aus zwei glatten Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $E$  und einer glatten Abbildung  $\pi : E \rightarrow M$ , so daß gelten:

(VB1) Für jedes  $p \in M$  läßt sich auf  $E_p = \pi^{-1}(p)$  die Struktur eines  $k$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes definieren.

(VB2) Für jedes  $p \in M \exists$  offene Umgebung  $U \subseteq M$  von  $p$  und ein Diffeomorphismus  $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{R}^k \\
 \searrow \pi & & \swarrow pr_1 \\
 & U &
 \end{array}$$

kommutiert, und  $\forall q \in U$  ist  $\phi|_{E_q} : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k$  ein Vektorraumisomorphismus.

Das Paar  $(\pi^{-1}(U), \phi)$  nennt man eine Bündelkarte. Mit einem  $k$ -Vektorbündel wird zukünftig immer ein  $k$ -dimensionales glattes  $\mathbb{R}$ -Vektorraumbündel ge-

meint sein. Kommt es nicht auf die Dimension an, so sprechen wir einfach von einem *Vektorbündel*.

### A.3.2 Definition (Schnitt)

Sei  $(E, M, \pi)$  ein Vektorbündel. Eine Abbildung  $s : M \rightarrow E$  mit

$$\pi \circ s = id_M.$$

heißt ein *Schnitt in E*. Die Menge aller Schnitte in  $E$  wird mit  $\Gamma(E)$  bezeichnet.

Ein *glatter Schnitt* in  $E$  ist ein Schnitt in  $E$ , so daß  $s : M \rightarrow E$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Abbildung ist. Die Menge aller glatten Schnitte in  $E$  wird mit  $\Gamma^\infty(E)$  bezeichnet. Die so definierten Schnitte bezeichnet man auch als *globale Schnitte*, da sie auf ganz  $M$  definiert sind. Im Gegensatz dazu bezeichnet man Schnitte, die nur auf einer Teilmenge  $N \subset M$  definiert sind, als *lokale Schnitte*. Die Menge aller lokal auf  $N \subset M$  definierten Schnitte erhält das Symbol  $\Gamma(N, E)$ . Erlaubt  $N$  zusätzlich die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, so bezeichnet  $\Gamma^\infty(N, E)$  die Menge aller lokal auf  $N$  definierten Schnitte, die als Abbildungen  $N \rightarrow E$  glatt sind. Der *Träger* eines Schnittes  $s : N \subseteq M \rightarrow E$  ist definiert als die abgeschlossene Menge

$$\text{supp}(s) := \overline{\{p \in N \mid s(p) \neq 0 \in E_p\}} \subseteq M.$$

Mengen von Schnitten mit kompakten Träger erhalten als zusätzlichen unteren Index ein „c“, z.B.  $\Gamma_c^\infty(N, E)$  für die glatten, kompakt getragenen Schnitte  $N \rightarrow E$ .

### A.3.3 Beispiele (Tangential- und Kotangentialbündel)

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

- Auf dem *Tangentialbündel*  $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$  existiert eine eindeutig bestimmte  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur, so daß  $TM$  eine glatte,  $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit wird,  $(TM, M, pr_M^{TM})$  ein  $m$ -Vektorraumbündel und alle Koordinatenvektorfelder  $\partial_i^p : U \rightarrow TM$  glatte, lokale Schnitte.
- Ebenso gibt es auf dem *Kotangentialbündel*  $T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^* M$  genau eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Struktur, so daß  $T^*M$  eine glatte,  $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit wird,  $(T^*M, M, pr_M^{T^*M})$  ein  $m$ -Vektorraumbündel und alle Koordinatenkovektorfelder  $d\varphi^i : U \rightarrow T^*M$  glatte, lokale Schnitte.



Für diese eindeutigen Strukturen verweisen wir auf [Lee03, Lem.4.1], [Lee03, Lem.5.14] und [Lee03, Prop.6.5]. Wir werden das Tangentialbündel  $(TM, M, pr_M^{TM})$  und das Kotangentialbündel  $(T^*M, M, pr_M^{T^*M})$  immer mit diesen eindeutigen  $C^\infty$ -Strukturen betrachten. Die Schnitte im Tangentialbündel heißen *Vektorfelder* und die Schnitte im Kotangentialbündel *Kovektorfelder*. Wir werden diese Begriffe aber für glatte Schnitte verwenden, da wir nur mit solchen arbeiten.

## A.4 Multilineare Algebra

Bevor definiert werden kann, was eine Differentialform ist, benötigen wir noch ein paar Grundlagen aus der multilinearen Algebra. Insbesondere brauchen wir den Begriff eines Tensors und den Begriff des Dachproduktes. Dabei werden wir aber lediglich „Arbeitsdefinitionen“ angeben.

### A.4.1 (r, s)-Tensor

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, dann nennt man eine  $\mathbb{R}$ -multilineare Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

einen *r-fach kontravarianten und s-fach kovarianten Tensor* oder einfach kurz *(r, s)-Tensor*. Die Menge aller (r, s)-Tensoren über einen endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  wird mit  $T_s^r(V)$  bezeichnet und bildet einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Speziell gilt  $T_1^0(V) = V^*$ ,  $T_0^1(V) = (V^*)^* = V$  und es wird  $T_0^0(V) = \mathbb{R}$  gesetzt.

### A.4.2 Tensorprodukt

Sei  $V$  ein m-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $T \in T_s^r(V)$ ,  $T' \in T_{s'}^{r'}(V)$ ,  $\overset{s+s'}{\underset{i=1}{\mathbf{a}}} v_i \in V$ ,  $\overset{r+r'}{\underset{j=1}{\mathbf{a}}} \omega^j \in V^*$ . Dann macht das *Tensorprodukt*  $\otimes$  aus  $T$  und  $T'$  einen  $(r+r', s+s')$ -Tensor  $T \otimes T' \in T_{s+s'}^{r+r'}(V)$  durch die Definition

$$(T \otimes T')(\overset{r+r'}{\underset{j=1}{\mathbf{a}}} \omega^j, \overset{s+s'}{\underset{i=1}{\mathbf{a}}} v_i) := T(\overset{r}{\underset{j=1}{\mathbf{a}}} \omega^j, \overset{s}{\underset{i=1}{\mathbf{a}}} v_i) T'(\overset{r+r'}{\underset{j=r+1}{\mathbf{a}}} \omega^j, \overset{s+s'}{\underset{i=s+1}{\mathbf{a}}} v_i).$$

$\otimes$  ist durch diese Definition  $\mathbb{R}$ -bilinear und assoziativ. Mit Hilfe des Tensorproduktes kann man eine Basis von  $T_s^r(V)$  explizit aufschreiben. Ist nämlich

$(\overset{m}{\mathbf{a}} v_i)$  eine Basis von  $V$  und  $(\overset{m}{\mathbf{a}} \alpha^j)$  eine Basis von  $V^*$ , so ist

$$\left\{ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{j_s} \mid 1 \leq i_k, j_l \leq m, 1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s \right\}$$

eine Basis von  $T_s^r(V)$ . Jeder Tensor  $T$  aus  $T_s^r(V)$  läßt sich also schreiben als

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{j_s},$$

wobei  $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T\left(\overset{r}{\mathbf{a}} \alpha^{i_k}, \overset{s}{\mathbf{a}} e_{j_l}\right) \in \mathbb{R}$  ist.

### A.4.3 Alternierende (0, s)-Tensoren und Dachprodukt

Ist  $V$   $m$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so bezeichnet man den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller alternierenden  $(0, s)$ -Tensoren mit

$$\Lambda_s(V) = \left\{ \omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ ist alternierend} \right\}$$

Aus einem  $(0, s)$ -Tensor  $T \in T_s^0(V)$  kann man mit Hilfe der Abbildung  $\text{Alt}_s : T_s^0(V) \longrightarrow \Lambda_s(V)$  einen alternierenden  $(0, s)$ -Tensor  $\text{Alt}_s(T) \in \Lambda_s(V)$  machen.  $\text{Alt}_s$  ist dabei gegeben durch die Vorschrift

$$\text{Alt}_s(T) := \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} \text{sign}(\sigma) \cdot {}^\sigma T,$$

was expliziter für  $\overset{s}{\mathbf{a}} v_i \in V$

$$(\text{Alt}_s(T))\left(\overset{s}{\mathbf{a}} v_i\right) := \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} \text{sign}(\sigma) \cdot T\left(\overset{s}{\mathbf{a}} v_{\sigma(i)}\right)$$

bedeutet. Mit dem *Dachprodukt*  $\wedge$  bildet man nun aus Tensoren  $\omega \in \Lambda_s(V)$  und  $\eta \in \Lambda_t(V)$  einen Tensor  $\omega \wedge \eta \in \Lambda_{s+t}(V)$  durch

$$\omega \wedge \eta := \frac{(s+t)!}{s!t!} \text{Alt}_{s+t}(\omega \otimes \eta).$$

Das Dachprodukt ist dann per Definition assoziativ, bilinear und graduiert kommutativ, d.h.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{st} \eta \wedge \omega$ . Mit einer Basis  $(\overset{s}{\mathbf{a}} \alpha^i)$  von  $V^*$ , ist durch

$$\left\{ \alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_s} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq m \right\}$$

eine explizite Basis von  $\Lambda_s(V)$  gegeben, insbesondere ist also

$$\dim(\Lambda_s(V)) = \binom{m}{s}, \quad 0 \leq s \leq m.$$

Mit Hilfe der Basis erhält man auch einen expliziteren Ausdruck des Dachproduktes durch das Tensorprodukt

$$\alpha^{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_s} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_s} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha^{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \alpha^{i_{\sigma(s)}}.$$

## A.5 Tensorfelder und Differentialformen

Die Rollen des Vektorraumes  $V$  und seines dualen Vektorraumes  $V^*$  in A.4 übernehmen auf Mannigfaltigkeiten der Tangentialraum  $T_p M$  und der Kotangentialraum  $T_p^* M$  bei einem Punkt  $p \in M$ . Als Verallgemeinerung des Tangential- und Kotangentialbündels werden die Bündel

$$T_s^r M := \bigcup_{p \in M} T_s^r(T_p M),$$

$$\Lambda_s M := \bigcup_{p \in M} \Lambda_s(T_p M)$$

der  $(r, s)$ -Tensoren und der alternierenden  $(0, s)$ -Tensoren betrachtet. Diese haben, genau wie das Tangential- und Kotangentialbündel, eindeutige  $\mathcal{C}^\infty$ -Strukturen, welche diese Bündel zu Vektorbündeln machen und alle Koordinatentensorfelder sind glatte, lokale Schnitte. Genauer gilt mit diesen eindeutigen  $\mathcal{C}^\infty$ -Strukturen:

- $T_s^r M$  ist eine glatte,  $(m + m^{r+s})$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $(T_s^r M, M, pr_M^{T_s^r M})$  ein  $m^{r+s}$ -Vektorraumbündel.
- $\Lambda_s M$  ist eine glatte,  $(m + \binom{m}{s})$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $(\Lambda_s M, M, pr_M^{\Lambda_s M})$  ein  $\binom{m}{s}$ -Vektorraumbündel.

Wir werden diese Bündel immer mit diesen eindeutigen  $\mathcal{C}^\infty$ -Strukturen versehen betrachten!

### A.5.1 Definition ((r, s)-Tensorfeld)

Schnitte im Vektorbündel  $(T_s^r M, M, pr_M^{T_s^r M})$  der  $(r, s)$ -Tensoren heißen  $(r, s)$ -Tensorfelder.

Wie bei den Vektor- und Kovektorfeldern werden wir aber mit dem Begriff Tensorfeld immer einen glatten Schnitt bezeichnen!

### A.5.2 Definition (s-Differentialform)

Ein glatter Schnitt im Vektorbündel  $(\Lambda_s M, M, pr_M^{\Lambda_s M})$  der alternierenden  $(0, s)$ -Tensoren heißt  $s$ -Differentialform oder kürzer  $s$ -Form. Die Menge aller  $s$ -Formen bezeichnet man mit  $\Omega_s M$ , die Menge aller  $s$ -Formen mit kompakten Trägern mit  $\Omega_{sc} M$ .

### A.5.3 Lemma (Lokale Darstellung)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit,  $(T_s^r M, M, pr_M^{T_s^r M})$  das Vektorbündel der  $(r, s)$ -Tensoren,  $(\Lambda_s M, M, pr_M^{\Lambda_s M})$  das Vektorbündel der antisymmetrischen  $(0, s)$ -Tensoren und  $(U, \varphi)$  eine beliebige Karte von  $M$ . Dann gilt für  $T \in \Gamma^\infty(T_s^r M)$

$$T \Big|_U = \varphi T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1}^\varphi \otimes \dots \otimes \partial_{i_r}^\varphi \otimes d\varphi^{j_1} \otimes \dots \otimes d\varphi^{j_s},$$

wobei  $\varphi T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T \left( \overset{r}{\mathbf{a}} d\varphi^{i_k}, \overset{s}{\mathbf{a}} \partial_{j_l}^\varphi \right) \in \mathcal{C}^\infty(U)$  ist. Für  $\omega \in \Omega_s M$  gilt

$$\omega \Big|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} \varphi \omega_{i_1 \dots i_s} d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_s} = \frac{1}{s!} \varphi \omega_{i_1 \dots i_s} d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_s},$$

wobei  $\varphi \omega_{i_1 \dots i_s} = \omega \left( \overset{s}{\mathbf{a}} \partial_{i_k}^\varphi \right) \in \mathcal{C}^\infty(U)$  ist.

### A.5.4 Lemma (Transformationsverhalten)

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $(T_s^r M, M, pr_M^{T_s^r M})$  das Vektorbündel der  $(r, s)$ -Tensoren und seien  $(U, \varphi)$  und  $(V, \psi)$  zwei Karten von  $M$  mit  $U \cap V = W \neq \emptyset$ . Dann gilt für die Komponentenfunktion von  $T \in \Gamma^\infty(T_s^r M)$  folgendes Transformationsverhalten auf  $W$  unter Kartenwechsel:

$$\psi T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \prod_{a=1}^r \frac{\partial(\psi^{i_a} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^{k_a}} \prod_{b=1}^s \frac{\partial(\varphi^{j_b} \circ \psi^{-1})}{\partial x^{l_b}} \varphi T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}.$$

### A.5.5 Definition (Zurückholen und Drücken)

Seien  $M$  und  $N$  zwei glatte Mannigfaltigkeiten,  $F : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung und  $p \in M$ . Das Zurückholen (englisch: „pullback“) nach  $M$  mittels  $F$  ist diejenige Abbildung

$$F^{pb} : T_s^0(T_{F(p)}N) \rightarrow T_s^0(T_pM)$$

definiert durch

$$(F^{pb}S)\binom{s}{i=1} v_i := S\binom{s}{i=1} T_p F(v_i) \quad \forall \binom{s}{i=1} v_i \in T_pM.$$

Ist ferner  $F$  ein Diffeomorphismus, so definiert das Zurückholen mittels  $F$  einen glatten Bündelisomorphismus

$$F^{pb} : T_s^0N \rightarrow T_s^0M.$$

Weiterhin kann man dann einen weiteren glatten Bündelisomorphismus

$$F_{pf} : T_s^0M \rightarrow T_s^0N$$

definieren, das Drücken (englisch: „pushforward“) nach  $N$  mittels  $F$ ,

$$(F_{pf}R)\binom{s}{i=1} w_i := R\binom{s}{i=1} T_{F(p)}F^{-1}(w_i) \quad \forall \binom{s}{i=1} w_i \in T_{F(p)}N$$

für  $R \in T_s^0(T_pM)$ .

Das Zurückholen und Drücken von  $(0, s)$ -Tensoren läßt sich ohne Mühe auf  $(0, s)$ -Tensorfelder erweitern durch

$$\begin{aligned} F^{pb} : \Gamma^\infty(TN) &\rightarrow \Gamma^\infty(TM), & (F^{pb}S)_p &:= F^{pb}(S_{F(p)}) \quad \forall p \in M, \\ F_{pf} : \Gamma^\infty(TM) &\rightarrow \Gamma^\infty(TN), & (F_{pf}R)_q &:= F_{pf}(R_{F^{-1}(q)}) \quad \forall q \in N, \end{aligned}$$

für  $S \in \Gamma^\infty(T_s^0N)$  und  $R \in \Gamma^\infty(T_s^0M)$ . Hierdurch werden glatte Tensorfelder auf glatte Tensorfelder abgebildet und es gilt für alle  $q \in N$

$$\begin{aligned} (F_{pf}(F^{pb}S))_q\binom{s}{i=1} w_i &= F_{pf}\left((F^{pb}S)_{F^{-1}(q)}\binom{s}{i=1} w_i\right) = F_{pf}(F^{pb}S_q)\binom{s}{i=1} w_i \\ &= S_q\binom{s}{i=1} w_i \quad \forall \binom{s}{i=1} w_i \in T_qN \end{aligned}$$

$$\implies F_{pf} \circ F^{pb} = id_{\Gamma^\infty(T_s^0N)}.$$

Analog zeigt man

$$F^{pb} \circ F_{pf} = id_{\Gamma^\infty(T_s^0 M)}.$$

Weiter gelten für die lokalen Darstellungen in einer Karte  $(U, \varphi)$  von  $N$  bzw.  $(V, \psi)$  von  $M$

$$F^{pb} \left( \frac{1}{s!} \varphi \omega_{i_1 \dots i_s} d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_s} \right) = \frac{1}{s!} (\varphi \omega_{i_1 \dots i_s} \circ F) d(\varphi^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(\varphi^{i_s} \circ F),$$

$$F_{pf} \left( \frac{1}{s!} \psi \eta_{i_1 \dots i_s} d\psi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\psi^{i_s} \right) = \frac{1}{s!} (\psi \eta_{i_1 \dots i_s} \circ F^{-1}) d(\psi^{i_1} \circ F^{-1}) \wedge \dots \wedge d(\psi^{i_s} \circ F^{-1}),$$

wobei  $\omega \in \Omega_s N$  und  $\eta \in \Omega_s M$ . Vorausgreifend merken wir auch an, daß das Zurückholen und das Drücken mit der äußeren Ableitung  $d$ , siehe den nachfolgenden Unterabschnitt, vertauscht. Wird sogar mittels einer Isometrie zurückgeholt bzw. gedrückt, dann vertauscht dies mit dem Hodge-\*-Operator, siehe Abschnitt B.6, und damit mit der Koableitung  $\delta$ , siehe Abschnitt B.7. Dies kann man mit Hilfe der lokalen Darstellungen und Definition B.1.1 ohne großen Aufwand zeigen.

### A.5.6 Die äußere Ableitung

Die *äußere Ableitung*

$$d : \Omega_s M \longrightarrow \Omega_{s+1} M$$

$$\omega \longmapsto d\omega,$$

lokal in einer Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$

$$d\omega \Big|_U = \frac{1}{s!} \partial_{i_0}^\varphi \omega_{i_1 \dots i_s} d\varphi^{i_0} \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_s},$$

ist ein linearer Ableitungsoperator, der aus einer  $s$ -Form eine  $(s+1)$ -Form macht und auf allen glatten Mannigfaltigkeiten existiert. Für eine präzise Definition der äußeren Ableitung und für ihre Eigenschaften siehe z.B. [Lee03, Thm.12.14]. Eine Differentialform  $\omega \in \Omega_s M$ , für die  $d\omega = 0$  gilt, heißt *geschlossen*. Gilt sogar die Gleichheit  $\omega = d\theta$  für  $\theta \in \Omega_{s-1} M$ , so heißt  $\omega$  *exakt*.

### A.5.7 Lemma (Äußere Ableitung lokal)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit,  $(U, \varphi)$  irgendeine Karte von  $M$  und  $\omega \in \Omega_s M$  eine  $s$ -Form. Dann gilt lokal

$$d\omega \Big|_U = \frac{1}{(s+1)!} \varphi d\omega_{i_0 \dots i_s} d\varphi^{i_0} \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_s},$$

wobei

$$\varphi d\omega_{i_0 \dots i_s} := \sum_{l=0}^s (-1)^l \partial_{i_l}^{\varphi} \omega_{i_0 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_s}$$

total antisymmetrisch in seinen Indizes  $i_0, \dots, i_s$  ist.

**Beweis:** Sei  $(U, \varphi)$  eine beliebige Karte von  $M$ . Alle lokalen Größen sind in dieser Karte zu verstehen. Die Antisymmetrie der  $\varphi(d\omega)_{i_0 \dots i_s}$  ist klar per definitionem. Für die weitere Aussage berechne mit Hilfe der Laplaceschen Entwicklungsformel der Determinanten

$$\begin{aligned} d\omega \Big|_U \left( \overset{s}{\mathbf{a}} \partial_{j_l} \right) &= \frac{1}{s!} \partial_{k_0} \omega_{k_1 \dots k_s} d\varphi^{k_0} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_s} \left( \overset{s}{\mathbf{a}} \partial_{j_l} \right) \\ &= \frac{1}{s!} \partial_{k_0} \omega_{k_1 \dots k_s} \det \begin{pmatrix} \delta_{j_0}^{k_0} & \dots & \delta_{j_s}^{k_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_0}^{k_s} & \dots & \delta_{j_s}^{k_s} \end{pmatrix} \\ &= \partial_{k_0} \omega_{k_1 \dots k_s} \left( \delta_{j_0}^{k_0} \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{k_1} & \dots & \delta_{j_s}^{k_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{k_s} & \dots & \delta_{j_s}^{k_s} \end{pmatrix} - \delta_{j_1}^{k_0} \det \begin{pmatrix} \delta_{j_0}^{k_1} & \dots & \delta_{j_s}^{k_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_0}^{k_s} & \dots & \delta_{j_s}^{k_s} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-1)^s \delta_{j_s}^{k_0} \det \begin{pmatrix} \delta_{j_0}^{k_1} & \dots & \delta_{j_{s-1}}^{k_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_0}^{k_s} & \dots & \delta_{j_{s-1}}^{k_s} \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{s!} \\ &= \sum_{l=0}^s (-1)^l \partial_{j_l} \omega_{j_0 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_s}. \end{aligned}$$

□

# Anhang B

## Semi-Riemannsche Differentialgeometrie

Lorentzmannigfaltigkeiten sind ein Spezialfall semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten, die wiederum glatte Mannigfaltigkeiten mit der Zusatzstruktur eines metrischen Tensors sind. In diesem Kapitel möchten wir einige wichtige Folgerungen und Konstruktionen aus dieser Zusatzstruktur vorstellen. Hauptsächlich wollen wir den Hodge-\*-Operator und die Koableitung einführen. Eine detailliertere und weitreichendere Einführung in die Welt semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten ist z.B. [O'N83].

### B.1 Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Eine  $m$ -dimensionale *semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit*  $(M, g)$  ist eine  $m$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einem nicht ausgearteten symmetrischen  $(0,2)$ -Tensorfeld  $g$  von konstantem Index, d.h für alle  $p \in M$  ist die symmetrische, bilineare Abbildung  $g_p$  nicht ausgeartet und die Signatur ist für alle  $g_p$  dieselbe. Im Falle, daß  $g_p$  für alle  $p \in M$  positiv definit ist, nennt man  $g$  eine *Riemannsche Metrik* und  $(M, g)$  eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Da  $g_p$  per Definition für alle  $p \in M$  nicht ausgeartet ist, ist die Fundamentalmatrix  $g_{ij}(p)$  bzgl. einer (und damit jeder) Basis von  $T_p M$  invertierbar für alle  $p \in M$ . Die inverse Matrix erhält obere Indizes, also  $g^{ij}(p)$  mit

$$g^{ij}(p) \cdot g_{jk}(p) = \delta_k^i.$$

Mit dem metrischen Tensor werden bei Komponentenfunktionen von Tensorfeldern die Indizes herauf- oder heruntergezogen. Ist z.B.  $\omega$  ein  $(0,s)$ -Tensorfeld auf  $M$ , dann wird definiert:

$$\omega_{i_1 \dots i_s} g^{i_1 k} =: \omega^k_{i_2 \dots i_s}.$$



### B.1.1 Definition (Isometrie)

Seien  $(M, g)$  und  $(M', g')$  zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $I : M \rightarrow M' \in C^\infty(M, M')$ .  $I$  heißt eine Isometrie genau dann, wenn  $I$  ein Diffeomorphismus und  $g = I^{pb}g'$  gilt.

Lokal in einer Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  bedeutet dies zusammen mit Definition A.5.5

$$\varphi g_{ij} = \varphi \circ I^{-1} g'_{ij} \circ I.$$

## B.2 Lineare Zusammenhänge

A priori ist es mathematisch nicht klar, wie man Tangentialräume an verschiedenen Punkten miteinander vergleichen soll und somit Problemstellungen wie z.B. die Definition einer Richtungsableitung eines Vektorfeldes längs eines anderen Vektorfeldes angeht. Zur Behandlung solcher Fragestellungen wurde der Begriff des linearen Zusammenhangs eingeführt. Physikalisch motiviert treten lineare Zusammenhänge in der ART bei der Verallgemeinerung partieller Ableitungen auf. Da die partielle Ableitung eines Tensors i.A. kein Tensor mehr ist, bedarf es eines neuen Ableitungsbegriffs, den der kovarianten Ableitung. Die kovariante Ableitung ist gerade so konstruiert, daß die kovariante Ableitung eines Tensors wieder ein Tensor ist. Wir geben nun die Definition und Konstruktionen linearer Zusammenhänge an.

### B.2.1 Definition (Linearer Zusammenhang)

Sei  $\pi : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel. Ein linearer Zusammenhang oder auch kovariante Ableitung auf  $(E, M, \pi)$  ist ein Operator

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(E) &\longrightarrow \Gamma^\infty(E) \\ (X, s) &\longmapsto \nabla_X s, \end{aligned}$$

sodaß  $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall X \in \Gamma^\infty(TM)$  und  $\forall s \in \Gamma^\infty(E)$  die folgenden Axiome erfüllt sind:

(LZ1)  $\nabla_X s$  ist  $\mathbb{R}$ -bilinear in  $X \in \Gamma^\infty(TM)$  und in  $s \in \Gamma^\infty(E)$ .

(LZ2)  $\nabla_{fX} s = f \nabla_X s$ .

(LZ3)  $\nabla_X (fs) = \underbrace{X(f)}_{=df(X)} s + f \nabla_X s$  (Produktregel).

### B.2.2 Definition (Christoffelsymbole)

Sei  $\nabla$  linearer Zusammenhang auf dem Tangentialbündel  $(TM, M, \pi)$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$ . Dann heißen die Entwicklungskoeffizienten  $\mathcal{T}_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  der Entwicklung

$$\nabla_{\partial_i^\varphi} \partial_j^\varphi = \mathcal{T}_{ij}^k \partial_k^\varphi$$

die Christoffelsymbole von  $\nabla$  bzgl. der Karte  $(U, \varphi)$ .

### B.2.3 Linearer Zusammenhang mal anders

Sei  $\nabla$  ein linearer Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(E, M, \pi)$ , dann besteht die Möglichkeit  $\nabla$  als Abbildung

$$\nabla : \Gamma^\infty(E) \longrightarrow \Gamma^\infty(T^*M \otimes E)$$

aufzufassen. Sei nämlich  $X \in TM$  und  $\mathcal{E} \in E^*$ , dann ist

$$\nabla s, (\nabla s)_p(X_p, \mathcal{E}_p) := (\nabla_X s)_p(\mathcal{E}_p) \in \mathbb{R}$$

für alle  $p \in M$   $\mathbb{R}$ -bilinear, also

$$(\nabla s)_p \in T_p^*M \otimes E_p^* \quad \forall p \in M.$$

Da  $\nabla_X s \in \Gamma^\infty(E)$  ist, ist  $\nabla s \in \Gamma^\infty(T^*M \otimes E)$ .

### B.2.4 Lemma (Induzierte lineare Zusammenhänge I)

Sei  $\nabla^E$  ein linearer Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(E, M, \pi_E)$  und  $\nabla^{E'}$  linearer Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(E', M, \pi_{E'})$ .

- Mittels

$$\nabla_X^{E \otimes E'}(s \otimes s') := \nabla_X^E s \otimes s' + s \otimes \nabla_X^{E'} s'$$

wird ein linearer Zusammenhang  $\nabla^{E \otimes E'}$  auf  $E \otimes E'$  induziert.

- Mittels

$$\nabla_X^{E \oplus E'}(s, s') := (\nabla_X^E s, \nabla_X^{E'} s')$$

wird ein linearer Zusammenhang  $\nabla^{E \oplus E'}$  auf  $E \oplus E'$  induziert.

### B.2.5 Lemma (Induzierte lineare Zusammenhänge II)

Sei  $\nabla$  linearer Zusammenhang auf dem Tangentialbündel  $(TM, M, \pi)$ . Dann induziert  $\nabla$  für alle  $r, s \geq 0$  eindeutig lineare Zusammenhänge  $\nabla_s^r$  auf den Tensorbündeln  $(T_s^r M, M, \pi_s^r)$  mit den folgenden Eigenschaften:

(i)  $\nabla_0^1 = \nabla$ .

(ii) Für  $f \in \Gamma^\infty(T_0^0 M)$  und  $X \in \Gamma^\infty TM$  gilt

$$\nabla_{0X}^0 f = (id_M, df(X)) = (id_M, X(f)).$$

(iii) Für  $\Theta \in \Gamma^\infty(T_1^0 M) = \Gamma^\infty(T^* M)$  und  $X, Y \in \Gamma^\infty TM$  gilt

$$(\nabla_{1X}^0 \Theta)(Y) = X(\Theta(Y)) - \Theta(\nabla_X Y).$$

(iv) Für  $T \in \Gamma^\infty(T_s^r M), T' \in \Gamma^\infty(T_{s'}^{r'} M)$  und  $X \in \Gamma^\infty TM$  gilt

$$\nabla_{s+s'}^{r+r'} X(T \otimes T') = \nabla_{sX}^r T \otimes T' + T \otimes \nabla_{s'X}^{r'} T'.$$

Expliziter gilt für  $T \in \Gamma^\infty(T_s^r M), \overset{s}{\mathbf{a}} X_i, V \in \Gamma^\infty TM$  und  $\overset{r}{\mathbf{a}} \Theta^j \in \Gamma^\infty(T^* M)$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{sV}^r(T)(\overset{r}{\mathbf{a}} \Theta^j, \overset{s}{\mathbf{a}} X_i) &= V(T(\overset{r}{\mathbf{a}} \Theta^j, \overset{s}{\mathbf{a}} X_i)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^r T(\Theta^1, \dots, \nabla_{1V}^0 \Theta^j, \dots, \Theta^r, \overset{s}{\mathbf{a}} X_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s T(\overset{r}{\mathbf{a}} \Theta^j, X_1, \dots, \nabla_V X_i, \dots, X_s). \end{aligned}$$

### B.2.6 Lemma (Kovariante Ableitung von p-Formen)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit,  $(U, \varphi)$  irgendeine Karte von  $M$ ,  $\omega \in \Omega_p M$  eine  $p$ -Form,  $0 \leq p \leq m$ , und  $\nabla$  ein linearer Zusammenhang auf dem Tangentialbündel  $(TM, M, pr_M^{TM})$ . Sei weiter der von  $\nabla$  auf dem Vektorbündel  $(\Lambda_s M, M, pr_M^{\Lambda_s M})$  induzierte lineare Zusammenhang auch mit  $\nabla$  bezeichnet, dann gilt lokal

$$\nabla \omega \Big|_U = \frac{1}{p!} \varphi \nabla_{i_0} \varphi \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_0} \otimes d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p},$$

wobei

$$\varphi \nabla_{i_0} \varphi \omega_{i_1 \dots i_p} := (\nabla \omega \Big|_U)_{i_0 i_1 \dots i_p} = \partial_{i_0}^{\varphi} \varphi \omega_{i_1 \dots i_p} - \sum_{l=1}^p \Gamma_{i_0 i_l}^k \varphi \omega_{i_1 \dots i_{l-1} k i_{l+1} \dots i_p}.$$

**Beweis:** Es wird kein Kartenwechsel durchgeführt, deswegen sind alle lokalen Größen in der Karte  $(U, \varphi)$  zu verstehen.

$$\begin{aligned} (\nabla \omega \Big|_U)_{\binom{p}{l=0} \partial_{i_l}} &= (\nabla_{\partial_{i_0}} \omega)_{\binom{p}{l=1} \partial_{i_l}} \\ &\stackrel{B.2.5}{=} \partial_{i_0} (\omega_{\binom{p}{l=1} \partial_{i_l}}) - \sum_{l=1}^p \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_{l-1}}, \nabla_{\partial_{i_0}} \partial_{i_l}, \partial_{i_{l+1}}, \dots, \partial_{i_p}) \\ &= \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p} - \sum_{l=1}^p \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_{l-1}}, \Gamma_{i_0 i_l}^k \partial_k, \partial_{i_{l+1}}, \dots, \partial_{i_p}) \\ &= \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p} - \sum_{l=1}^p \Gamma_{i_0 i_l}^k \omega_{i_1 \dots i_{l-1} k i_{l+1} \dots i_p} \quad (=: \nabla_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p}) \\ \implies \nabla \omega \Big|_U &= \nabla_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_0} \otimes d\varphi^{i_1} \otimes \dots \otimes d\varphi^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \nabla_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_0} \otimes d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}. \end{aligned}$$

□

## B.3 Der Levi-Civita Zusammenhang

Unter allen linearen Zusammenhängen auf dem Tangentialbündel einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es einen besonders ausgezeichneten, den metrischen oder Levi-Civita Zusammenhang. Dieser lineare Zusammenhang ist symmetrisch, die Metrik ist kovariant konstant und er ist durch diese beiden Eigenschaften schon eindeutig festgelegt.

### B.3.1 Satz (Levi-Civita Zusammenhang)

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es existiert genau ein linearer Zusammenhang  $\nabla$  auf dem Tangentialbündel  $(TM, M, pr_M^{TM})$ , sodaß  $\forall X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TM)$  gelten:

$$(LCZ1) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad (\nabla \text{ ist torsionsfrei bzw. symmetrisch}).$$

(LCZ2)  $Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$  ( $\nabla$  ist Riemannsch).

Dieser Zusammenhang ist durch die Formel

$$2g(\nabla_X Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

eindeutig bestimmt und heißt der Levi-Civita Zusammenhang von  $(M, g)$ . Ist  $(U, \varphi)$  eine Karte, so gilt für die Christoffelsymbole von  $\nabla$  bzgl. dieser Karte die Formel

$$\mathfrak{T}_{ij}^k = \frac{1}{2} \varphi^{kl} (\partial_i^\varphi \varphi_{jl} + \partial_j^\varphi \varphi_{il} - \partial_l^\varphi \varphi_{ij}).$$

### B.3.2 Lemma (Lokale Eigenschaften)

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\nabla$  der Levi-Civita Zusammenhang und  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$ , dann gelten:

- (i)  $\mathfrak{T}_{ij}^k = \mathfrak{T}_{ji}^k$ .
- (ii)  $\mathfrak{T}_{ij}^i = 0 = \mathfrak{T}_{ij}^j$ .
- (iii)  $\mathfrak{T}_{ij}^i = \frac{1}{\sqrt{|\varphi g|}} \partial_j^\varphi \sqrt{|\varphi g|}$ .

### B.3.3 Lemma (Levi-Civita und partielle Ableitung)

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Omega_s M \rightarrow \Omega_s M$  der vom Levi-Civita Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(\Lambda_p M, M, pr_M^{\Lambda_s M})$  induzierte lineare Zusammenhang,  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$  und  $\omega \in \Omega_p M$  eine  $p$ -Form,  $1 \leq p \leq m$ . Dann gilt lokal auf  $U$

$$\nabla_i^\varphi \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} = \frac{1}{\sqrt{|\varphi g|}} \partial_i^\varphi \left( \varphi \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} \sqrt{|\varphi g|} \right).$$

**Beweis:** Wähle irgendeine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  und rechne lokal in dieser. Auf der einen Seite ist

$$\nabla_i \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} \stackrel{B.2.6}{=} \partial_i \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} + \Gamma_{kl}^k \omega^{l j_1 \dots j_{p-1}} + \sum_{n=1}^{p-1} \Gamma_{il}^{j_n} \omega^{i j_1 \dots j_{n-1} l j_{n+1} \dots j_{p-1}} \\ \stackrel{B.2.6}{=} \partial_i \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} + \Gamma_{kl}^k \omega^{l j_1 \dots j_{p-1}},$$

da  $\Gamma_{il}^{j_1 \dots j_{p-1}}$  symmetrisch in  $i$  und  $l$  ist und  $\omega^{i j_1 \dots j_{p-1}}$  antisymmetrisch. Auf der anderen Seite ist aber auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left( \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} \sqrt{|g|} \right) &= \partial_i \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} + \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \sqrt{|g|} \\ &\stackrel{B.3.2}{=} \partial_i \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} + \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} \Gamma_{il}^l. \end{aligned}$$

Beide Ausdrücke stimmen also überein, was die Behauptung war.  $\square$

### B.3.4 Lemma (Levi-Civita und äußere Ableitung)

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$ ,  $\nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Omega_s M \rightarrow \Omega_s M$  der vom Levi-Civita Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(\Lambda_s M, M, \text{pr}_M^{\Lambda_s M})$  induzierte lineare Zusammenhang und  $\omega \in \Omega_p M$  eine  $p$ -Form. Dann gilt lokal

$$d\omega \Big|_U = \frac{1}{p!} \varphi \nabla_{i_0} \varphi \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_0} \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}$$

und damit insbesondere auch

$$d\omega \Big|_U = \frac{1}{(p+1)!} \varphi d\omega_{i_0 \dots i_p} d\varphi^{i_0} \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p},$$

wobei

$$\varphi d\omega_{i_0 \dots i_p} = \sum_{l=0}^p (-1)^l \varphi \nabla_{i_l} \varphi \omega_{i_0 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_p}.$$

**Beweis:** Wähle eine beliebige Karte  $(U, \varphi)$ . Da kein Kartenwechsel durchgeführt wird, sind alle lokalen Ausdrücke in dieser Karte zu verstehen:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p!} \nabla_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_0} \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p} \\ &= \frac{1}{p!} \left( \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p} - \sum_{l=1}^p \underbrace{\Gamma_{i_0 i_l}^k}_{\text{symmetrisch in } i_0 \text{ und } i_l} \omega_{i_1 \dots i_{l-1} k i_{l+1} \dots i_p} \right) \underbrace{d\varphi^{i_0} \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}}_{\text{antisymmetrisch in } i_0 \text{ und } i_l} \\ &= \frac{1}{p!} \partial_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_0} \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p} \\ &= d\omega \Big|_U. \end{aligned}$$

Der Rest der Aussage folgt aus Lemma A.5.7.  $\square$

## B.4 Der Riemanntensor

Bei der Untersuchung der Krümmung von Mannigfaltigkeiten ist der Riemanntensor das zentrale Objekt der Interesse. Er gibt im Wesentlichen an, inwieweit die kovarianten Ableitungen des Levi-Civita Zusammenhangs nicht miteinander vertauschen.

### B.4.1 Definition (Riemannscher Krümmungstensor)

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\nabla$  der Levi-Civita Zusammenhang auf dem Tangentialbündel  $(TM, M, pr_M^{TM})$ . Die Abbildung

$$R : \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(TM) \longrightarrow \Gamma^\infty(TM)$$

$$R_{XY}(Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

definiert ein  $(1, 3)$ -Tensorfeld  $R \in \Gamma^\infty(T_3^1 M)$ , genannt der Riemannsche Krümmungstensor oder kürzer Riemanntensor von  $\nabla$ , mittels:

$$R_p(\Theta_p, X_p, Y_p, Z_p) = \Theta_p(R_{X_p Y_p}(Z_p)) \quad \forall \Theta_p \in T_p^* M, \forall X_p, Y_p, Z_p \in T_p M.$$

### B.4.2 Lemma (Komponentenfunktionen)

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\nabla$  der Levi-Civita Zusammenhang,  $R$  der Riemannsche Krümmungstensor und  $(U, \varphi)$  eine Karte. Die Komponentenfunktionen  $\varphi R_{ijk}^l \in \mathcal{C}^\infty(U)$  und  $\varphi R_{ijkl} \in \mathcal{C}^\infty(U)$  werden gegeben durch die Formeln

$$\varphi R_{ijk}^l = \partial_i^\varphi \varphi \Gamma_{jk}^l - \partial_j^\varphi \varphi \Gamma_{ik}^l - (\varphi \Gamma_{ik}^r \varphi \Gamma_{jr}^l - \varphi \Gamma_{jk}^s \varphi \Gamma_{is}^l),$$

$$\varphi R_{ijkl} := \varphi R_{ijk}^n \varphi g_{nl}$$

und erfüllen die Symmetrien:

- (i)  $\varphi R_{ijk}^l = -\varphi R_{jik}^l \quad (\iff \varphi R_{ijkl} = -\varphi R_{jikl})$ .
- (ii)  $\varphi R_{ijkl} = -\varphi R_{ijlk}$ .
- (iii)  $\varphi R_{ijk}^l + \varphi R_{jki}^l + \varphi R_{kij}^l = 0 \quad (\iff \varphi R_{ijkl} + \varphi R_{jkil} + \varphi R_{kijl} = 0)$ .
- (iv)  $\varphi R_{ijkl} = \varphi R_{klij}$ .

### B.4.3 Definition (Ricci- und skalare Krümmung)

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\nabla$  der Levi-Civita Zusammenhang und  $R$  der Riemannsche Krümmungstensor.

- Der Riccitenor  $\text{Ric}$ , auch Riccikrümmung genannt, ist definiert als der eindeutig bestimmte  $(0,2)$ -Tensor, der in einer beliebigen Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  die folgenden Komponentenfunktionen hat

$$\varphi \text{Ric}_{ij} := \varphi R_{ij} = \varphi R^l_{lij}$$

- Die skalare Krümmung ist die skalare Größe  $\text{skal}$ , die in einer beliebigen Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  gegeben wird durch

$$\text{skal} = R := R^i_i.$$

### B.4.4 Lemma (Kommutator kovarianter Ableitungen)

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\nabla$  der vom Levi-Civita Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(\Lambda_p M, M, \text{pr}_M^{\Lambda_s M})$  induzierte lineare Zusammenhang und  $\omega \in \Omega_p M$  eine  $p$ -Form. Dann gilt in einer beliebigen Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$

$$[\varphi \nabla_i, \varphi \nabla_j] \varphi \omega_{n_1 \dots n_p} = (\varphi \nabla_i \varphi \nabla_j - \varphi \nabla_j \varphi \nabla_i) \varphi \omega_{n_1 \dots n_p} = \sum_{l=1}^p \varphi R^k_{jin_l} \varphi \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k n_{l+1} \dots n_p}.$$

**Beweis:** Fixiere eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$ . Alle Ableitungen und Komponentenfunktionen sind in dieser Karte zu verstehen.

$$\begin{aligned} \nabla_i \omega_{n_1 \dots n_p} &= \partial_i \omega_{n_1 \dots n_p} - \sum_{l=1}^p \Gamma^k_{in_l} \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k \dots n_p} \\ \nabla_j \omega_{n_1 \dots n_p} &= \partial_j \omega_{n_1 \dots n_p} - \sum_{l=1}^p \Gamma^k_{jn_l} \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k \dots n_p} \end{aligned}$$

$\implies$

$$\nabla_i \nabla_j \omega_{n_1 \dots n_p} = \partial_i \nabla_j \omega_{n_1 \dots n_p} - \Gamma^b_{ij} \nabla_b \omega_{n_1 \dots n_p} - \sum_{a=1}^p \Gamma^b_{ina} \nabla_j \omega_{n_1 \dots n_{a-1} b n_{a+1} \dots n_p}$$



$$\begin{aligned}
 &= \partial_i (\partial_j \omega_{n_1 \dots n_p} - \sum_{l=1}^p \Gamma_{jn_l}^k \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k \dots n_p}) \\
 &\quad - \Gamma_{ij}^b (\partial_b \omega_{n_1 \dots n_p} - \sum_{l=1}^p \Gamma_{bn_l}^k \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k n_{l+1} \dots n_p}) \\
 &\quad - \sum_{a=1}^p \Gamma_{ina}^b (\partial_j \omega_{n_1 \dots n_{a-1} b n_{a+1} \dots n_p} - \Gamma_{jb}^k \omega_{n_1 \dots n_{a-1} k n_{a+1} \dots n_p} \\
 &\quad\quad - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq a}}^p \Gamma_{jn_l}^k \omega_{n_1 \dots b k \dots n_p}) \\
 \nabla_j \nabla_i \omega_{n_1 \dots n_p} &= \partial_j (\partial_i \omega_{n_1 \dots n_p} - \sum_{l=1}^p \Gamma_{in_l}^k \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k n_{l+1} \dots n_p}) \\
 &\quad - \Gamma_{ji}^b (\partial_b \omega_{n_1 \dots n_p} - \sum_{l=1}^p \Gamma_{bn_l}^k \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k n_{l+1} \dots n_p}) \\
 &\quad - \sum_{a=1}^p \Gamma_{jna}^b (\partial_i \omega_{n_1 \dots n_{a-1} b n_{a+1} \dots n_p} - \Gamma_{ib}^k \omega_{n_1 \dots n_{a-1} k n_{a+1} \dots n_p} \\
 &\quad\quad - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq a}}^p \Gamma_{in_l}^k \omega_{n_1 \dots b k \dots n_p}) \\
 \implies \\
 [\nabla_i, \nabla_j] \omega_{n_1 \dots n_p} &= - \sum_{l=1}^p (\partial_i \Gamma_{jn_l}^k) \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k n_{l+1} \dots n_p} + \sum_{l=1}^p (\partial_j \Gamma_{in_l}^k) \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k n_{l+1} \dots n_p} \\
 &\quad + \sum_{a=1}^p \Gamma_{ina}^b \Gamma_{jb}^k \omega_{n_1 \dots n_{a-1} k n_{a+1} \dots n_p} - \sum_{a=1}^p \Gamma_{jna}^b \Gamma_{ib}^k \omega_{n_1 \dots n_{a-1} k n_{a+1} \dots n_p} \\
 &= \sum_{l=1}^p \left( -\partial_i \Gamma_{jn_l}^k + \partial_j \Gamma_{in_l}^k + \Gamma_{in_l}^b \Gamma_{jb}^k - \Gamma_{jn_l}^b \Gamma_{ib}^k \right) \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k \dots n_p} \\
 &\stackrel{B.4.2}{=} \sum_{l=1}^p R_{jin_l}^k \omega_{n_1 \dots n_{l-1} k n_{l+1} \dots n_p}.
 \end{aligned}$$

□

## B.5 Kalkül mit Epsilonsymbolen

Bei lokalen Rechnungen mit dem Hodge\*-Operator tauchen Summen über Permutationen indizierter Größen auf, die mit dem Signum dieser Permuta-

tion einhergehen. Um mit diesen komfortabel zu rechnen und sie kompakt aufzuschreiben, führen wir die Epsilon-symbole ein. Dieser Abschnitt soll zeigen, wie wir mit den Epsilon-symbolen rechnen und welche Beziehungen für diese gelten. Wir möchten an dieser Stelle direkt darauf hinweisen, daß wir die Epsilon-symbole als rein abstrakte, aber bequeme Schreibweise verwenden. Die Symbole selbst haben keine zusätzliche Struktur! Sie sind bei uns nicht die Komponenten irgendeines Tensors und haben auch nicht das entsprechende Transformationsverhalten unter Basiswechsel! Schreiben wir z.B. die Indizes oben oder unten an die Epsilon-symbole, dann nur, um die Summenkonvention zu erzwingen! Auf den Wert des Epsilon-symbols hat dies jedoch keinerlei Auswirkung.

### B.5.1 Definition (Epsilon-symbole)

Die  $m$ -dimensionalen *Epsilon-symbole*  $\epsilon_{j_1 \dots j_m}$  sind definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} \epsilon_{j_1 \dots j_m} &:= \det(e_{j_1} | \dots | e_{j_m}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } \binom{m}{\mathbf{a} j_i}_{i=1} \text{ ist eine gerade Permutation von } \binom{m}{\mathbf{a} i}_{i=1}, \\ -1 & \text{für } \binom{m}{\mathbf{a} j_i}_{i=1} \text{ ist eine ungerade Permutation von } \binom{m}{\mathbf{a} i}_{i=1}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hierbei sind die  $e_i \in \mathbb{R}^m$  die Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^m$ . Es gilt z.B. mit den Epsilon-symbolen für die Determinante einer  $(m \times m)$ -Matrix  $M$  mit Komponenten  $M^{ij}$

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^m M^{i\sigma(i)} = \epsilon_{j_1 \dots j_m} \prod_{i=1}^m M^{ij_i},$$

oder etwas allgemeiner für  $m$  indizierte Größen

$$\epsilon_{i_1 \dots i_m} A^{i_1} B^{i_2} \dots N^{i_m} = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) A^{\sigma(1)} B^{\sigma(2)} \dots N^{\sigma(m)}.$$

Weiter ist nach Definition

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_1 \dots i_m} \cdot \epsilon_{j_1 \dots j_m} &= \det((e_{i_1} | \dots | e_{i_m})^T) \cdot \det(e_{j_1} | \dots | e_{j_m}) \\ &= \det((e_{i_1} | \dots | e_{i_m})^T (e_{j_1} | \dots | e_{j_m})) \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \dots & \delta_{i_1 j_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_m j_1} & \dots & \delta_{i_m j_m} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wovon bei der Kontraktion zweier Epsilon-Symbole miteinander Gebrauch gemacht wird. Die folgenden zwei Lemmata geben zwei wichtige Rechenbeziehungen zwischen den Epsilon-Symbolen und der Determinanten an:

### B.5.2 Lemma (Epsilon-Symbole und Determinante)

Betrachte die  $m$ -dimensionalen Epsilon-Symbole, also die Epsilon-Symbole mit  $m$  Indizes, welche die Werte 1 bis  $m$  annehmen. Für eine  $(m \times m)$ -Matrix  $M$  gilt dann

$$\epsilon_{j_1 \dots j_m} \prod_i^m M^{k_i j_i} = \epsilon^{k_1 \dots k_m} \det \begin{pmatrix} M^{11} & \dots & M^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M^{m1} & \dots & M^{mm} \end{pmatrix},$$

wobei  $\overset{m}{\mathbf{a}} k_i$  eine Permutation von  $\overset{m}{\mathbf{a}} i$  ist.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \epsilon_{j_1 \dots j_m} \prod_i^m M^{k_i j_i} &= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i^m M^{k_i \sigma(i)} = \det \begin{pmatrix} M^{k_1 1} & M^{k_1 2} & \dots & M^{k_1 m} \\ M^{k_2 1} & M^{k_2 2} & \dots & M^{k_2 m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ M^{k_m 1} & M^{k_m 2} & \dots & M^{k_m m} \end{pmatrix} \\ &= \epsilon^{k_1 \dots k_m} \det \begin{pmatrix} M^{11} & \dots & M^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M^{m1} & \dots & M^{mm} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Antisymmetrie der Determinanten unter Vertauschung von Zeilen und Spalten benutzt.  $\square$

### B.5.3 Lemma (Kontraktionen der Epsilon-Symbole)

Betrachte die  $m$ -dimensionalen Epsilon-Symbole, also die Epsilon-Symbole mit  $m$  Indizes, welche die Werte 1 bis  $m$  annehmen. Sei weiter  $1 \leq s \leq m$ , dann gilt für die  $(m-s)$ -fache Kontraktion

$$\epsilon_{i_1 \dots i_s k_{s+1} \dots k_m} \epsilon^{j_1 \dots j_s k_{s+1} \dots k_m} = (m-s)! \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \dots & \delta_{i_s}^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_1}^{j_s} & \dots & \delta_{i_s}^{j_s} \end{pmatrix}.$$

**Beweis:** Ist  $\overset{s}{\mathbf{a}} i_l$  keine Permutation von  $\overset{s}{\mathbf{a}} j_l$ , so sind beide Seiten Null und die Gleichheit ist offensichtlich. Sei also  $\overset{s}{\mathbf{a}} i_l$  eine Permutation von  $\overset{s}{\mathbf{a}} j_l$ . Nach Definition der Epsilon-symbole gilt

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{i_1 \dots i_s k_{s+1} \dots k_m} \epsilon^{j_1 \dots j_s k_{s+1} \dots k_m} &= \sum_{k_{s+1}, \dots, k_m} \det(e_{i_1} | \dots | e_{k_m}) \det(e_{j_1} | \dots | e_{k_m}) \\
 &= \sum_{k_{s+1}, \dots, k_m} \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 1} & \dots & \delta_{k_m 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_1 m} & \dots & \delta_{k_m m} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1 1} & \dots & \delta_{k_m 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1 m} & \dots & \delta_{k_m m} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{k_{s+1}, \dots, k_m} \left( \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{i_l \sigma(l)} \right) \left( \prod_{l=s+1}^m \delta_{k_l \sigma(l)} \right) \right) \\
 &\quad \cdot \left( \sum_{\pi \in S_m} \operatorname{sgn}(\pi) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{j_l \pi(l)} \right) \left( \prod_{l=s+1}^m \delta_{k_l \pi(l)} \right) \right) \\
 &= \sum_{\sigma, \pi \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\pi) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{i_l \sigma(l)} \right) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{j_l \pi(l)} \right) \left( \prod_{l=s+1}^m \delta_{\sigma(l) \pi(l)} \right) \\
 &= \sum_{\sigma, \tilde{\pi} \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tilde{\pi} \circ \sigma) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{i_l \sigma(l)} \right) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{j_l \tilde{\pi} \circ \sigma(l)} \right) \left( \prod_{l=s+1}^m \delta_{\sigma(l) \tilde{\pi} \circ \sigma(l)} \right) \\
 &= \sum_{\tilde{\pi} \in S_m} \operatorname{sgn}(\tilde{\pi}) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{j_l \tilde{\pi}(i_l)} \right) \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ \sigma(l)=i_l \forall l \in \{1, \dots, s\}}} \left( \prod_{l=s+1}^m \delta_{\sigma(l) \tilde{\pi} \circ \sigma(l)} \right) \\
 &= \sum_{\substack{\tilde{\pi} \in S_m \\ \tilde{\pi}(l)=l, \forall l \notin \{i_1, \dots, i_s\}}} \operatorname{sgn}(\tilde{\pi}) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{j_l \tilde{\pi}(i_l)} \right) \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ \sigma(l)=i_l \forall l \in \{1, \dots, s\}}} 1 \\
 &= (m-s)! \sum_{\substack{\tilde{\pi} \in S_m \\ \tilde{\pi}(l)=l, \forall l \notin \{i_1, \dots, i_s\}}} \operatorname{sgn}(\tilde{\pi}) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{j_l \tilde{\pi}(i_l)} \right) \\
 &= (m-s)! \sum_{\tilde{\sigma} \in S_s} \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) \left( \prod_{l=1}^s \delta_{j_l i_{\tilde{\sigma}(l)}} \right) \\
 &= (m-s)! \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1 i_1} & \dots & \delta_{j_1 i_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_s i_1} & \dots & \delta_{j_s i_s} \end{pmatrix} = (m-s)! \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \dots & \delta_{i_s}^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_1}^{j_s} & \dots & \delta_{i_s}^{j_s} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

## B.6 Der Hodge-\*-Operator

Der Hodge-\*-Operator bildet in einer  $m$ -dimensionalen, orientierten, semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit bijektiv  $p$ -Formen auf  $(m-p)$ -Formen ab und ist sehr hilfreich dabei, Gleichungen mit Formen global zu schreiben.

### B.6.1 Satz (Hodge-\*-Operator)

Sei  $(M, g)$  eine orientierte,  $m$ -dimensionale, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit.

- (a) Für jedes  $p = 1, \dots, m$ , definiert  $g$  eine eindeutig bestimmte, nicht ausgeartete, symmetrische  $\mathbb{R}$ -Bilinearform auf  $\Lambda_p(T_x M)$ , die ebenfalls wie das Skalarprodukt auf  $T_x M$  mit  $g_x$  notiert wird und welche

$$g_x(\omega_x^1 \wedge \dots \wedge \omega_x^p, \eta_x^1 \wedge \dots \wedge \eta_x^p) = \det(g_x(\#\omega_x^i, \#\eta_x^j))$$

erfüllt, wann immer  $\overset{p}{\mathbf{a}} \omega_x^i, \overset{p}{\mathbf{a}} \eta_x^j \in \Lambda_1(T_x M)$  sind.  $\#$  ist hierbei definiert durch  $\#\omega_x^i := g_x^{kl} \omega_{x,k}^i \partial_l^\varphi \Big|_x$ , wobei  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$  um  $x$  ist.

- (b) Für jedes  $p = 0, \dots, m$  existiert eine eindeutig bestimmte, glatte, lineare Abbildung  $*$  :  $\Lambda_p M \rightarrow \Lambda_{m-p} M$ , der Hodge-\*-Operator, welcher

$$\omega_x \wedge *\eta_x = g_x(\omega_x, \eta_x) dV_g(x)$$

erfüllt für alle  $\omega_x \in \Lambda_p(T_x M)$ . Hierbei bezeichnet  $dV_g$  die Riemannsche Volumenform, siehe z.B. [O'N83]. Für  $(0,0)$ -Tensoren  $\omega(x)$  und  $\eta(x)$  gilt die Gleichheit  $g_x(\omega(x), \eta(x)) = \omega(x) \wedge \eta(x) = \omega(x)\eta(x)$ .

**Beweis der Nichtausgeartetheit:** Angenommen für  $0 \neq \omega_x \in \Lambda_p(T_x M)$  gilt  $g_x(\omega_x, \eta_x) = 0 \forall \eta_x \in \Lambda_p(T_x M)$ . Wähle irgendeine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  um  $x$ , dann gilt  $\omega_x = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p}(x) d_x \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d_x \varphi^{i_p}$  und

$$\begin{aligned} 0 &= g_x(\omega_x, d_x \varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d_x \varphi^{j_p}) \\ &= g_x\left(\frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p}(x) d_x \varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d_x \varphi^{i_p}, d_x \varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d_x \varphi^{j_p}\right) \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p}(x) \det \begin{pmatrix} g_x(\#d_x \varphi^{i_1}, \#d_x \varphi^{j_1}) & \dots & g_x(\#d_x \varphi^{i_1}, \#d_x \varphi^{j_p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_x(\#d_x \varphi^{i_p}, \#d_x \varphi^{j_1}) & \dots & g_x(\#d_x \varphi^{i_p}, \#d_x \varphi^{j_p}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_{i_1 \dots i_p}(x) \prod_{k=1}^p g_x(\#d_x \varphi^{i_k}, \#d_x \varphi^{j_k}) \\
 &= \omega_{i_1 \dots i_p}(x) \prod_{k=1}^p g_x(g^{i_k l}(x) \partial_l \Big|_x, g^{j_k n}(x) \partial_n \Big|_x) \\
 &= \omega_{i_1 \dots i_p}(x) \prod_{k=1}^p g^{i_k l}(x) g^{j_k n}(x) g_{ln}(x) \\
 &= \omega_{i_1 \dots i_p}(x) \prod_{k=1}^p g^{i_k j_k}(x) \\
 &= \omega^{j_1 \dots j_p}(x).
 \end{aligned}$$

Diese Gleichheit gilt für alle Wahlen von  $(j_1, \dots, j_p)$  und damit folgt

$$\omega_{i_1 \dots i_p}(x) = \underbrace{\omega^{j_1 \dots j_p}(x)}_{=0} \prod_{k=1}^p g_{j_k i_k}(x) = 0$$

für alle Wahlen von  $(i_1, \dots, i_p)$ . Also ist schon  $\omega_x = 0 \in \Lambda_p(T_x M)$  im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

### B.6.2 Bemerkung

Es ist nicht schwierig den Hodge\*-Operator auf Differentialformen zu erklären. So ist z.B. für  $\overset{s}{\mathbf{a}} \omega^i, \overset{s}{\mathbf{a}} \eta^j \in \Omega_1 M$

$$g(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^s, \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^s) = \det(g(\#\omega^i, \#\eta^j)) \in \mathcal{C}^\infty(M),$$

$*$  :  $\Omega_s M \longrightarrow \Omega_{m-s} M$  definiert durch

$$\omega \wedge * \eta = g(\omega, \eta) dV_g \quad \forall \omega \in \Omega_s M$$

und für Nullformen  $\omega$  und  $\eta$  ist  $g(\omega, \eta) = \omega \wedge \eta = \omega \eta$

### B.6.3 Lemma (Symmetrische Paarung von p-Formen)

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann wird wegen der Eigenschaften des Hodge\*-Operators auf allen Elementen von  $\Omega_p M$ , für welche das folgende Integral auch existiert, eine symmetrische  $\mathbb{R}$ -Bilinearform gegeben durch

$$\langle \omega, \eta \rangle_M := \int_M \omega \wedge * \eta = \int_M g(\omega, \eta) dV_g.$$

Die symmetrische Paarung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_M &: \Omega_{pc}M \times \Omega_{pc}M \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle \omega, \eta \rangle_M &= \int_M \omega \wedge * \eta \end{aligned}$$

ist nicht entartet.

**Beweis:** Angenommen  $0 \neq \omega \in \Omega_{pc}M$  mit  $\langle \omega, \eta \rangle = 0 \quad \forall \eta \in \Omega_{pc}M$ . Es gibt also eine Wahl  $(i_1, \dots, i_p)$  und einen Punkt  $x \in M$ , sodaß  $\omega_{i_1 \dots i_p}(x) \neq 0$ , o.B.d.A.  $\omega_{i_1 \dots i_p}(x) > 0$ , wobei die Komponentenfunktion in irgendeiner Karte  $(U, \varphi)$  mit  $x \in U$  zu verstehen ist. Da  $\omega_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ , gibt es folglich eine Umgebung  $O \subseteq U$  von  $x$  mit  $\omega_{i_1 \dots i_p}|_O > 0$ . Weiter gibt es, da  $M$  lokal kompakt ist, um  $x$  eine offene Umgebung  $W$ , die in einem Kompaktum  $K$  enthalten ist. Definiere die offene Menge  $V := O \cap W$ . Für diese gilt  $V \subset K$  und  $V \subseteq U$ . Da  $U$  homöomorph zu einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^m$  ist, ist  $V$  homöomorph zu einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^m$ . In dieser findet man ein Kompaktum und da durch stetige Abbildungen Kompakta auf Kompakta abgebildet werden, somit eine kompakte Menge  $A \subset V$ . Da  $M$  hausdorffsch ist, ist  $A$  abgeschlossen in  $M$ . Zu dieser abgeschlossenen Menge  $A$  und zur offenen Menge  $V$  sei  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$  die glatte Abschneidefunktion wie in Folgerung A.1.2, also

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi|_A \equiv 1 \quad \text{und} \quad \text{supp}(\chi) \subset V.$$

Da  $\text{supp}(\chi) \subset V \subset K$ , ist  $\chi$  kompakt getragen.  $\eta \in \Omega_{pc}M$  sei nun definiert durch  $\eta := \chi d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_p}$ , dann gilt

$$0 = \langle \omega, \chi d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_p} \rangle = \int_M g(\omega, \chi d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_p}) dV_g = \int_V \chi \omega^{j_1 \dots j_p} dV_g$$

$$\implies \chi \omega^{j_1 \dots j_p} \Big|_V = 0$$

$$\implies \omega^{j_1 \dots j_p} \Big|_A = 0$$

$$\implies \omega_{i_1 \dots i_p} \Big|_A = \left( \omega^{j_1 \dots j_p} \prod_{k=1}^p g_{j_k i_k} \right) \Big|_A = 0,$$

was ein Widerspruch zu  $\omega_{i_1 \dots i_p}|_V > 0$  ist. Also muß für ein  $\omega \in \Omega_{pc}M$  mit  $\langle \omega, \eta \rangle = 0$  für alle  $\eta \in \Omega_{pc}M$  schon  $\omega = 0$  gelten.  $\square$

Es folgt unmittelbar, daß auch die Paarungen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M : \Omega_{pc}M \times \Omega_p M \longrightarrow \mathbb{R}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M : \Omega_p M \times \Omega_p M \longrightarrow \mathbb{R}$  nicht entartet sind.

### B.6.4 Lemma (Lokale Wirkung von $*$ )

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale, orientierte, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt lokal in einer Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  für  $*$  :  $\Omega_p M \rightarrow \Omega_{m-p} M$ ,  $0 \leq p \leq m$ , die Gleichung

$$*(d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}) = \frac{\text{sgn}(\varphi)}{(m-p)!} \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^p g^{j_l i_l} \right) \sqrt{|\varphi g|} d\varphi^{k_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_m}$$

( $\text{sgn}(\varphi)$  ist für eine positiv orientierte Karte  $+1$  und für eine negativ orientierte  $-1$ ). Weiter gilt für  $*^{-1} : \Omega_{m-p} M \rightarrow \Omega_p M$ ,  $0 \leq p \leq m$ , die Gleichung

$$*^{-1} = (-1)^{p(m-p)} (|g| \cdot g^{-1}) *.$$

**Beweis:** Alle lokalen Größen sind in der Karte  $(U, \varphi)$  zu verstehen. Wähle  $\omega \in \Omega_p M$  beliebig, dann gelten lokal  $\omega \Big|_U = \frac{1}{p!} \omega_{n_1 \dots n_p} d\varphi^{n_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{n_p}$  und

$$\begin{aligned} & \omega \Big|_U \wedge \left( \frac{\text{sgn}(\varphi)}{(m-p)!} \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^p g^{j_l i_l} \right) \sqrt{|g|} d\varphi^{k_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_m} \right) \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{n_1 \dots n_p} \frac{\text{sgn}(\varphi)}{(m-p)!} \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^p g^{j_l i_l} \right) \sqrt{|g|} \\ & \quad \cdot d\varphi^{n_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{n_p} \wedge d\varphi^{k_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_m} \\ & \stackrel{B.5.3}{=} \frac{1}{p!} \omega_{n_1 \dots n_p} \frac{1}{(m-p)!} \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^p g^{j_l i_l} \right) \epsilon^{n_1 \dots n_p k_{p+1} \dots k_m} dV_g \\ & \stackrel{B.5.3}{=} \frac{1}{p!} \omega_{n_1 \dots n_p} \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{n_1} & \dots & \delta_{j_p}^{n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{n_p} & \dots & \delta_{j_p}^{n_p} \end{pmatrix} \prod_{l=1}^p g^{j_l i_l} dV_g \\ &= \omega_{j_1 \dots j_p} \prod_{l=1}^p g^{j_l i_l} dV_g \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \dots j_p} \det \begin{pmatrix} g^{j_1 i_1} & \dots & g^{j_1 i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{j_p i_1} & \dots & g^{j_p i_p} \end{pmatrix} dV_g \\ &= \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \dots j_p} \det \begin{pmatrix} g(g^{j_1 \mu} \partial_\mu, g^{i_1 \nu} \partial_\nu) & \dots & g(g^{j_1 \mu} \partial_\mu, g^{i_p \nu} \partial_\nu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(g^{j_p \mu} \partial_\mu, g^{i_1 \nu} \partial_\nu) & \dots & g(g^{j_p \mu} \partial_\mu, g^{i_p \nu} \partial_\nu) \end{pmatrix} dV_g \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \dots j_p} \det \begin{pmatrix} g(\#d\phi^{j_1}, \#d\phi^{i_1}) & \dots & g(\#d\phi^{j_1}, \#d\phi^{i_p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(\#d\phi^{j_p}, \#d\phi^{i_1}) & \dots & g(\#d\phi^{j_p}, \#d\phi^{i_p}) \end{pmatrix} dV_g \\
 &= g(\omega|_U, d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}) dV_g \\
 &= \omega|_U \wedge * (d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}).
 \end{aligned}$$

Für die lokale Darstellung von  $*^{-1}$  berechne  $** : \Omega_{m-p}M \rightarrow \Omega_{m-p}M$  in einer beliebig gewählten Karte  $(U, \varphi)$ .

$$\begin{aligned}
 &* *(d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_{m-p}}) \\
 &= * \left( \frac{\text{sgn}(\varphi)}{p!} \epsilon_{j_1 \dots j_{m-p} k_{m-p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^{m-p} g^{j_l i_l} \right) \sqrt{|g|} d\varphi^{k_{m-p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_m} \right) \\
 &= \frac{\text{sgn}(\varphi)^2}{p!} \epsilon_{j_1 \dots j_{m-p} k_{m-p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^{m-p} g^{j_l i_l} \right) \sqrt{|g|} \frac{1}{(m-p)!} \\
 &\quad \cdot \epsilon_{a_{m-p+1} \dots a_m b_1 \dots b_{m-p}} \left( \prod_{l=m-p+1}^m g^{a_l k_l} \right) \sqrt{|g|} d\varphi^{b_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{b_{m-p}} \\
 &= (-1)^{p(m-p)} \frac{1}{p!(m-p)!} \epsilon_{j_1 \dots j_{m-p} k_{m-p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^{m-p} g^{j_l i_l} \right) |g| \\
 &\quad \cdot \epsilon_{b_1 \dots b_{m-p} a_{m-p+1} \dots a_m} \left( \prod_{l=m-p+1}^m g^{a_l k_l} \right) d\varphi^{b_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{b_{m-p}} \\
 &\stackrel{B.5.3}{=} (-1)^{p(m-p)} \frac{1}{p!(m-p)!} \epsilon^{i_1 \dots i_{m-p} a_{m-p+1} \dots a_m} g^{-1} |g| \\
 &\quad \cdot \epsilon_{b_1 \dots b_{m-p} a_{m-p+1} \dots a_m} d\varphi^{b_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{b_{m-p}} \\
 &\stackrel{B.5.3}{=} (-1)^{p(m-p)} \frac{1}{p!} g^{-1} |g| \begin{pmatrix} \delta_{b_1}^{i_1} & \dots & \delta_{b_{m-p}}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{b_1}^{i_p} & \dots & \delta_{b_{m-p}}^{i_p} \end{pmatrix} d\varphi^{b_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{b_{m-p}} \\
 &= (-1)^{p(m-p)} g^{-1} |g| d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_{m-p}} \\
 &\implies (-1)^{p(m-p)} g^{-1} |g| * * \Big|_U = id_{\Omega_{m-p}} \Big|_U \\
 &\implies (-1)^{p(m-p)} g^{-1} |g| * * = id_{\Omega_{m-p}},
 \end{aligned}$$

da  $(U, \varphi)$  beliebig gewählt war. □

## B.7 Das Kodifferential

Die äußere Ableitung und der Hodge-\*-Operator werden, da sie in einer bestimmten Kombination häufig auftreten, zu einem dritten Operator  $\delta$  zusammengefaßt, welcher aus  $p$ -Formen  $(p-1)$ -Formen macht. Diesen Operator  $\delta$  nennt man das *Kodifferential* oder die *Koableitung*. Um dies mathematisch zu präzisieren sei  $(M, g)$  eine zunächst orientierte,  $m$ -dimensionale, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  die in Unterabschnitt B.6.3 eingeführte, symmetrische Bilinearform. Für alle  $\omega \in \Omega_p M, \eta \in \Omega_{p-1} M$  mit  $\text{supp}(\omega) \cap \text{supp}(\eta) \subset M$  kompakt ist das Kodifferential  $\delta : \Omega_p M \rightarrow \Omega_{p-1} M$  definiert als die eindeutig bestimmte Abbildung für die

$$\langle \delta\omega, \eta \rangle_M = \langle \omega, d\eta \rangle_M$$

gilt. Die Integrale existieren wegen  $\text{supp}(\omega) \cap \text{supp}(\eta) \subset M$  kompakt und in diesem Sinne ist die Koableitung  $\delta$  der zur äußeren Ableitung  $d$  formal adjungierte Operator.

$$\begin{aligned} d\eta \wedge *\omega &= d(\eta \wedge *\omega) + (-1)^p \eta \wedge d*\omega \\ &= d(\eta \wedge *\omega) + (-1)^p \eta \wedge **^{-1} d*\omega \\ &= d(\eta \wedge *\omega) + \eta \wedge *((-1)^p *^{-1} d*\omega) \end{aligned}$$

$$\implies \int_M d\eta \wedge *\omega = \int_M d(\eta \wedge *\omega) + \int_M \eta \wedge *((-1)^p *^{-1} d*\omega).$$

Mit dem Satz von Stokes erhält man weiter

$$\int_M d(\eta \wedge *\omega) = 0.$$

Für das Kodifferential einer  $p$ -Form gilt daher die Formel

$$\delta = (-1)^p *^{-1} d*.$$

Mittels dieser Gleichung läßt sich das Kodifferential für alle  $\omega \in \Omega_p M$  definieren und nicht nur für diejenigen, für welche die Integrale existieren. Aber Vorsicht! Denn nicht für alle Formen  $\omega \in \Omega_p M$  und alle Formen  $\eta \in \Omega_{p-1} M$ , für welche die Integrale existieren gilt  $\langle \delta\omega, \eta \rangle_M = \langle \omega, d\eta \rangle_M$ . Im Allgemeinen treten noch Randterme auf, sodaß  $\langle \delta\omega, \eta \rangle_M = \langle \omega, d\eta \rangle_M + \text{Randterme}$  gilt. Für eine Nullform ist  $\delta = 0$  und weiter gilt auch  $\delta \circ \delta = 0$ . Gilt für eine Differentialform  $\omega \in \Omega_p M$  die Gleichung  $\delta\omega = 0$ , so heißt sie *kogeschlossen*. Sie heißt *koexakt* genau dann, wenn es ein  $\eta \in \Omega_{p+1} M$  mit  $\omega = \delta\eta$  gibt. Es mag bisher so aussehen, als hänge  $\delta$  von der Orientierung der Mannigfaltigkeit ab. Das dem in Wirklichkeit nicht so ist, zeigt das folgende Lemma:

### B.7.1 Lemma (Lokale Wirkung von $\delta$ )

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale, orientierte, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt lokal in irgendeiner Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  für die Koableitung  $\delta : \Omega_p M \rightarrow \Omega_{p-1} M$ ,  $1 \leq p \leq m$ :

$$\delta \omega \Big|_U = -\frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{\sqrt{|\varphi g|}} \partial_{k_p}^\varphi \left( \varphi \omega^{k_p j_1 \dots j_{p-1}} \sqrt{|\varphi g|} \right) \prod_{l=1}^{p-1} \varphi g_{j_l k_l} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}}.$$

**Beweis:** Sei  $(U, \varphi)$  eine beliebige Karte. Kein Kartenwechsel wird durchgeführt und daher sind alle Komponentenfunktionen und Ableitungen in dieser Karte zu verstehen. Sei  $\omega \in \Omega_p M$ , dann gilt  $\omega \Big|_U = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}$  und

$$\begin{aligned} * \omega \Big|_U &\stackrel{B.6.4}{=} \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \frac{\text{sgn}(\varphi)}{(m-p)!} \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^p g^{j_l i_l} \right) \sqrt{|g|} d\varphi^{k_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_m} \\ &= \frac{\text{sgn}(\varphi)}{p!(m-p)!} \omega^{j_1 \dots j_p} \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \sqrt{|g|} d\varphi^{k_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_m} \end{aligned}$$

$\implies$

$$d * \omega \Big|_U = \frac{\text{sgn}(\varphi)}{p!(m-p)!} \partial_{k_p} \left( \omega^{j_1 \dots j_p} \sqrt{|g|} \right) \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} d\varphi^{k_p} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_m}$$

$\implies$

$$\begin{aligned} *^{-1} d * \omega \Big|_U &\stackrel{B.6.4}{=} (-1)^{(m-p+1)(p-1)} |g| g^{-1} * d * \omega \Big|_U \\ &\stackrel{B.6.4}{=} \frac{(-1)^{(m-p+1)(p-1)} |g| g^{-1}}{p!(m-p)!(p-1)!} \partial_{k_p} \left( \omega^{j_1 \dots j_p} \sqrt{|g|} \right) \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \\ &\quad \cdot \epsilon_{a_p \dots a_m b_1 \dots b_{p-1}} \left( \prod_{l=p}^m g^{a_l k_l} \right) \sqrt{|g|} d\varphi^{b_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{b_{p-1}} \\ &= \frac{(-1)^{(m-p+1)(p-1)} |g| g^{-1}}{p!(m-p)!(p-1)!} \partial_{k_p} \left( \omega^{j_1 \dots j_p} \sqrt{|g|} \right) \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \\ &\quad \cdot \epsilon_{a_p \dots a_m b_1 \dots b_{p-1}} \left( \prod_{l=p}^m g^{a_l k_l} \right) \left( \prod_{l=1}^{p-1} g^{b_l m_l} \right) \left( \prod_{l=1}^{p-1} g_{m_l n_l} \right) \sqrt{|g|} d\varphi^{n_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{n_{p-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{B.5.2}{=} \frac{(-1)^{(m-p+1)(p-1)}}{p!(m-p)!(p-1)!} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{k_p} \left( \omega^{j_1 \dots j_p} \sqrt{|g|} \right) \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \\
 &\quad \cdot \epsilon^{k_p \dots k_m m_1 \dots m_{p-1}} \left( \prod_{l=1}^{p-1} g_{m_l n_l} \right) d\varphi^{n_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{n_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{(m-p+1)(p-1)} (-1)^{(m-p)(p-1)}}{p!(m-p)!(p-1)!} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{k_p} \left( \omega^{j_1 \dots j_p} \sqrt{|g|} \right) \\
 &\quad \cdot \epsilon_{j_1 \dots j_p k_{p+1} \dots k_m} \epsilon^{k_p m_1 \dots m_{p-1} k_{p+1} \dots k_m} \left( \prod_{l=1}^{p-1} g_{m_l n_l} \right) d\varphi^{n_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{n_{p-1}} \\
 &\stackrel{B.5.3}{=} \frac{(-1)^{(p-1)}}{p!(p-1)!} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{k_p} \left( \omega^{j_1 \dots j_p} \sqrt{|g|} \right) \\
 &\quad \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{j_1}^{k_p} & \dots & \delta_{j_p}^{k_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{m_{p-1}} & \dots & \delta_{j_p}^{m_{p-1}} \end{pmatrix} \left( \prod_{l=1}^{p-1} g_{m_l n_l} \right) d\varphi^{n_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{n_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{(p-1)}}{(p-1)! \sqrt{|g|}} \partial_{k_p} \left( \omega^{k_p m_1 \dots m_{p-1}} \sqrt{|g|} \right) \left( \prod_{l=1}^{p-1} g_{m_l n_l} \right) d\varphi^{n_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{n_{p-1}}
 \end{aligned}$$

 $\implies$ 

$$\begin{aligned}
 \delta\omega \Big|_U &= (-1)^p *^{-1} d * \omega \Big|_U \\
 &= -\frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{k_p} \left( \omega^{k_p m_1 \dots m_{p-1}} \sqrt{|g|} \right) \left( \prod_{l=1}^{p-1} g_{m_l n_l} \right) d\varphi^{n_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{n_{p-1}}.
 \end{aligned}$$

 $\square$ 

Wegen der zweifachen Anwendung des Hodge-\*-Operators ist  $\delta$  unabhängig von der gewählten Orientierung der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit. D.h.  $\delta$  läßt sich auch für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten wohldefinieren, und zwar für eine  $p$ -Form  $\omega \in \Omega_p M$  ist  $\delta\omega$  diejenige eindeutig bestimmte  $(p-1)$ -Form, die lokal in einer beliebigen Karte  $(U, \varphi)$  gegeben wird durch den obigen lokalen Ausdruck. Daß sich dieser Ausdruck auch gemäß dem Transformationsverhalten von Tensoren transformiert, sieht man ganz deutlich anhand des nächsten Lemmas:

### B.7.2 Lemma (Kodifferential und Levi-Civita)

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und bezeichne  $\nabla$  den linearen Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(\Lambda_p M, M, \pi)$ ,

der vom Levi-Civita Zusammenhang induziert wird. Dann gilt lokal in irgend-einer Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  für  $\delta : \Omega_p M \longrightarrow \Omega_{p-1} M$ ,  $1 \leq p \leq m$ :

$$\begin{aligned} \delta\omega \Big|_U &= -\frac{1}{(p-1)!} \varphi^{\nabla_i \varphi} \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}} \prod_{l=1}^{p-1} \varphi^{g_{j_l k_l}} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\ &= -\frac{1}{(p-1)!} \varphi^{g^{ij}} \varphi^{\nabla_i \varphi} \omega_{j k_1 \dots k_{p-1}} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Wende Lemma B.3.3 auf die lokale Gestalt von  $\delta\omega$  an und benutze Lemma B.3.2(iii).  $\square$

### B.7.3 Lemma (Koexakt und exakt)

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale, orientierte, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $0 < p < m$ . Eine kgeschlossene  $p$ -Form  $\omega \in \Omega_p M$  ist genau dann koexakt, wenn ihr Hodgeduales  $*\omega$  exakt ist.

**Beweis:** „ $\Leftarrow$ “: Sei  $\omega \in \Omega_p M$  mit  $\delta\omega = 0$  und  $\omega = \delta\eta$ ,  $\eta \in \Omega_{p+1} M$ .

$$\begin{aligned} \omega &= \delta\eta = (-1)^{p+1} *^{-1} d * \eta \\ \implies *\omega &= d((-1)^{p+1} * \eta). \end{aligned}$$

„ $\implies$ “: Sei  $\omega \in \Omega_p M$  mit  $\delta\omega = 0$  und  $*\omega = d\theta$ ,  $\theta \in \Omega_{p-1} M$ .

$$\begin{aligned} *\omega &= d\theta = d * *^{-1} \theta = d * \eta \\ \implies \omega &= *^{-1} d * \eta = (-1)^{m-p+1} *^{-1} d * ((-1)^{m-p+1} \eta) = \delta((-1)^{m-p+1} \eta). \end{aligned}$$

$\square$

## B.8 Der Wellenoperator

Das Cauchyproblem der Maxwellgleichungen wird in der Regel nicht direkt gelöst, sondern auf das Cauchyproblem einer inhomogenen Wellengleichung zurückgeführt. Aus diesem Grund lohnt es sich einen Abschnitt dem *Wellenoperator*  $\square := -d\delta - \delta d$  für  $p$ -Formen zu widmen. Wir werden zuerst etwas Allgemeines zu Differentialoperatoren sagen und behandeln diese Aussagen dann an Beispielen, die für die Diskussion des Wellenoperators von Differentialformen relevant sind. In der Darstellung der allgemeinen Aussagen und Beispiele zu Differentialoperatoren folgen wir [BGP07], mit Ausnahme der

Konvention der Metrik. Dies führt aber zu keinerlei Unterschieden, da wir an den erforderlichen Stellen (z.B. in der Definition von normal hyperbolischen Operatoren) ein zusätzliches Minuszeichen einfügen, sodaß die lokalen Ausdrücke exakt mit denen von [BGP07] übereinstimmen.

### B.8.1 Definition (Linearer Differentialoperator)

Seien  $(E, M, \pi_E)$  ein  $e$ -Vektorbündel und  $(F, M, \pi_F)$  ein  $f$ -Vektorbündel über einer  $m$ -dimensionalen, glatten Mannigfaltigkeit  $M$ . Ein linearer Differentialoperator von  $E$  nach  $F$  von maximaler Ordnung  $k$  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$L : \Gamma^\infty(M, E) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, F),$$

sodaß gilt: Für jedes  $p \in M \exists$  Karte  $(U, \varphi)$  um  $p \in M$  und Bündelkarten  $\Phi : \pi_E^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^e$ ,  $\Psi : \pi_F^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^f$ , sodaß lokal

$$pr_{\mathbb{R}^f}^{U \times \mathbb{R}^f} \circ \Psi \circ (Ls|_U) = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \varphi^\alpha} (pr_{\mathbb{R}^e}^{U \times \mathbb{R}^e} \circ \Phi \circ s|_U)$$

gilt, wobei  $A_\alpha : U \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^e, \mathbb{R}^f)$  glatte Abbildungen sind, die durchaus von der gewählten Karte  $(U, \varphi)$  abhängig sein können,  $s \in \Gamma^\infty(M, E)$  ein Schnitt,  $\alpha = \binom{m}{\mathbf{a}} \alpha_i$  ein Multiindex mit  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \varphi^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}}{(\partial \varphi^1)^{\alpha_1} \dots (\partial \varphi^m)^{\alpha_m}}$  und  $|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$  ist. Anders formuliert existiert  $\forall p \in M$  eine Karte  $(U, \varphi)$  um  $p$  und für jeden lokalen Rahmen  $\binom{m}{\mathbf{a}} E_i, \binom{m}{\mathbf{a}} F_j$  von  $E$  und  $F$  ist  $Ls$  von der Gestalt

$$Ls|_U = \sum_{\alpha \leq k} A_{\alpha,i}^j \frac{\partial^{|\alpha|} s^i}{\partial \varphi^\alpha} F_j,$$

wobei  $A_{\alpha,i}^j : U \longrightarrow \mathbb{R}$  glatte Abbildungen sind, die wieder von der gewählten Karte  $(U, \varphi)$  abhängen können.

Ist ein linearer Differentialoperator von maximaler Ordnung  $k$ , aber nicht mehr von maximaler Ordnung  $k - 1$ , so nennt man ihn einem linearen Differentialoperator der Ordnung  $k$ . Für lineare Differentialoperatoren gilt

$$\text{supp}(Ls) \subseteq \text{supp}(s).$$

### B.8.2 Definition (Führendes Symbol)

Sei  $L : \Gamma^\infty(M, E) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, F)$  ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $k$  von dem Vektorbündel  $E$  in das Vektorbündel  $F$ . Das führende Symbol von  $L$  ist die Abbildung

$$\sigma_L : T^*M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F),$$

genauer

$$\sigma_L \Big|_{T_p^*M} : T_p^*M \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_p, F_p),$$

die lokal definiert ist wie folgt: Sei  $(U, \varphi)$  Karte um  $p \in M$  und  $\Phi, \Psi$  Bündelkarten wie in B.8.1. Sei weiter  $\varphi_s^* d\varphi^s = \xi \in T_p^*M$ , dann ist

$$\sigma_L(\xi) := \sum_{|\alpha|=k} (pr_{\mathbb{R}^f}^{\{p\} \times \mathbb{R}^f} \circ \Psi)^{-1} \circ \varphi_s^\alpha A_\alpha(p) \circ (pr_{\mathbb{R}^e}^{\{p\} \times \mathbb{R}^e} \circ \Phi),$$

wobei  $\varphi_s^\alpha = \prod_{s=1}^m (\varphi_s)^\alpha$ . Anders formuliert hat man  $\forall p \in M$  mit Karte  $(U, \varphi)$

um  $p$  und für jeden lokalen Rahmen  $(\mathbf{a}_{i=1}^m E_i), (\mathbf{a}_{j=1}^m F_j)$  von  $E$  und  $F$ , sodaß

$Ls$  von der Gestalt  $Ls \Big|_U = \sum_{\alpha \leq k} A_{\alpha,i}^j \frac{\partial^{|\alpha|} s^i}{\partial \varphi^\alpha} F_j$  für  $s \in \Gamma^\infty(M, E)$  ist, folgende lokale Darstellung des führenden Symbols:

$$\sigma_L(\xi)(u_p) = \sum_{|\alpha|=k} u_p^i \cdot A_{\alpha,i}^j(p) \xi^\alpha F_j(p),$$

wobei  $u_p \in E_p$  ist.

Man kann zeigen, daß das führende Symbol wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von irgendwelchen Wahlen einer Karte oder Bündelkarten. Ist weiter  $L_1 : \Gamma^\infty(M, E) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, F)$  ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $k$  und  $L_2 : \Gamma^\infty(M, G) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, G)$  ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $l$ , so ist  $L_2 \circ L_1$  ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $k+l$  mit führendem Symbol

$$\sigma_{L_2 \circ L_1}(\xi) = \sigma_{L_2}(\xi) \circ \sigma_{L_1}(\xi).$$

### B.8.3 Definition (Normal hyperbolisch)

Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit. Ein linearer Differentialoperator  $P : \Gamma^\infty(M, E) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, E)$  der Ordnung 2 heißt normal hyperbolisch mit führendem Symbol vom metrischen Typ genau dann, wenn

$$\sigma_P(\xi) = g_p(\#\xi, \#\xi) id_{E_p} \quad \forall p \in M, \forall \xi \in T_p^*M.$$

### B.8.4 Beispiele von Differentialoperatoren

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$ ,  $\xi \in T_x^*M$ ,  $\omega \in \Omega_p M$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$  um  $x$ .

- Sei  $L : \Gamma^\infty(M, E) \rightarrow \Gamma^\infty(M, F)$  ein linearer Differentialoperator der Ordnung 0, d.h. insbesondere  $Ls \Big|_U = A_i^j s^i F_j$  mit jedem lokalen Rahmen  $(\underset{i=1}{\overset{m}{\mathbf{a}}} E_i), (\underset{j=1}{\overset{m}{\mathbf{a}}} F_j)$  von  $E$  und  $F$ . Es folgt für das führende Symbol

$$\sigma_L(\xi)(s_x) = A_i^j(x) s_x^i F_j(x) = Ls_x \implies \sigma_L(\xi) = L.$$

Vergleicht man dies mit Satz B.6.1 und insbesondere Lemma B.6.4, so kann man folgern, daß der Hodge-\*-Operator ein linearer Differentialoperator 0.Ordnung ist. Das führende Symbol des Hodge-\*-Operators ist er gerade wieder selber.

- Die äußere Ableitung  $d : \Omega_p M \rightarrow \Omega_{p+1} M$ .

$$\begin{aligned} \omega \Big|_U &= \frac{1}{p!} \varphi \omega_{j_1 \dots j_p} d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_p}, \\ d\omega \Big|_U &= \frac{1}{p!} \partial_i^{\varphi} \varphi \omega_{j_1 \dots j_p} d\varphi^i \wedge d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_p} \end{aligned}$$

$\implies d$  ist ein linearer Differentialoperator 1.Ordnung. Das führende Symbol ergibt sich zu

$$\sigma_d(\xi)(\omega_x) = \frac{1}{p!} \varphi \omega_{j_1 \dots j_p}(x) \varphi \xi_i d_x \varphi^i \wedge d_x \varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d_x \varphi^{j_p} = \xi \wedge \omega_x.$$

- Das Kodifferential  $\delta : \Omega_p M \rightarrow \Omega_{p-1} M$ . Wegen der vorherigen Beispiele ist das Kodifferential ein linearer Differentialoperator der Ordnung 1 mit führendem Symbol

$$\begin{aligned} \sigma_\delta(\xi)(\omega_x) &= (-1)^p \sigma_{*^{-1}d^*}(\xi)(\omega_x) = (-1)^p \sigma_{*^{-1}d}(\xi)(* \omega_x) \\ &= (-1)^p \sigma_{*^{-1}}(\xi)(\xi \wedge * \omega_x) = (-1)^p *^{-1}(\xi \wedge * \omega_x) \\ &\stackrel{B.7.2}{=} -\frac{1}{(p-1)!} \varphi \xi_i \varphi \omega^{i j_1 \dots j_{p-1}}(x) \prod_{l=1}^{p-1} \varphi g_{j_l k_l}(x) d_x \varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d_x \varphi^{k_{p-1}} \\ &= -\omega_x(\# \xi). \end{aligned}$$



- Sei  $\nabla$  ein linearer Zusammenhang auf  $(E, M, \pi)$ . Betrachte  $\nabla$  als Abbildung  $\nabla : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ . Sei  $(\overset{e}{\mathbf{a}} E_i)$  ein lokaler Rahmen und  $(\overset{e}{\mathbf{a}} \mathcal{E}^i)$  der zugehörige duale Rahmen.

$$\begin{aligned} \nabla s \Big|_U &= (\nabla s)_i^j d\varphi^i \otimes E_j, \text{ mit} \\ (\nabla s)_i^j &= \nabla s \Big|_U (\partial_i^\varphi, \mathcal{E}^j) = \nabla_{\partial_i^\varphi} s \Big|_U (\mathcal{E}^j) = ((\partial_i^\varphi s^k) E_k + s^k \nabla_{\partial_i^\varphi} E_k)(\mathcal{E}^j) \\ &= \partial_i^\varphi s^j + s^k \underbrace{(\nabla_{\partial_i^\varphi} E_k)}_{\in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})}(\mathcal{E}^j) \end{aligned}$$

$\implies \nabla$  ist ein linearer Differentialoperator 1.Ordnung. Das führende Symbol errechnet sich zu

$$\sigma_\nabla(\xi)(s_x) = s_x^j \varphi_{\xi_i} d_x \varphi^i \otimes E_j(x) = \xi \otimes s_x.$$

### B.8.5 Satz (Wellenoperator für Differentialformen)

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale, orientierte, Lorentzmannigfaltigkeit und  $0 \leq p \leq m$ . Dann ist der Wellenoperator für die  $p$ -Formen,

$$\square = -(d\delta + \delta d),$$

ein normal hyperbolischer Differentialoperator  $\Omega_p M \rightarrow \Omega_p M$  mit führendem Symbol vom metrischen Typ.

**Beweis:**  $\square$  ist ein linearer Differentialoperator 2.Ordnung nach Definition und Unterabschnitt B.8.4. Sei  $\omega \in \Omega_p M$  und  $(U, \varphi)$  eine Karte. Alle folgenden Ableitungen und Komponentenfunktionen sind in dieser Karte zu verstehen, da kein Kartenwechsel durchgeführt wird. Bezeichne weiter  $\nabla$  den vom Levi-Civita Zusammenhang auf  $(\Lambda_p M, M, \pi)$  induzierten, linearen Zusammenhang, dann gilt lokal

$$\begin{aligned} \square \omega \Big|_U &\stackrel{\text{B.3.4}}{\stackrel{\text{B.7.2}}{=}} \left( -\frac{1}{(p-1)!} \nabla_{k_1} (\delta \omega)_{k_2 \dots k_p} + \frac{1}{p!} g^{ik_0} \nabla_i (d\omega)_{k_0 k_1 \dots k_p} \right) d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p} \\ &\stackrel{\text{A.5.7}}{\stackrel{\text{B.7.2}}{=}} \left( \frac{1}{(p-1)!} \nabla_{k_1} (g^{ij} \nabla_i \omega_{j k_2 \dots k_p}) + \frac{1}{p!} g^{ik_0} \nabla_i \left( \sum_{l=0}^p (-1)^l \nabla_{k_l} \omega_{k_0 \dots k_{l-1} k_{l+1} \dots k_p} \right) \right) \\ &\quad \cdot d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p} \\ &= \frac{1}{p!} g^{ik_0} \nabla_i \nabla_{k_0} \omega_{k_1 \dots k_p} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{(p-1)!} g^{ij} \nabla_{k_1} \nabla_i \omega_{j k_2 \dots k_p} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p} \\
 & + \frac{1}{p!} g^{ik_0} \nabla_i \sum_{l=1}^p (-1)^l \nabla_{k_l} \omega_{k_0 \dots k_{l-1} k_{l+1} \dots k_p} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p} \\
 = & \frac{1}{p!} g^{ik_0} \nabla_i \nabla_{k_0} \omega_{k_1 \dots k_p} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p} \\
 & + \frac{1}{(p-1)!} g^{ij} \nabla_{k_1} \nabla_i \omega_{j k_2 \dots k_p} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p} \\
 & - \frac{1}{(p-1)!} g^{ik_0} \nabla_i \nabla_{k_1} \omega_{k_0 k_2 \dots k_p} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p} \\
 = & \left( \frac{1}{p!} g^{ij} \nabla_i \nabla_j \omega_{k_1 \dots k_p} - \frac{1}{(p-1)!} g^{ij} [\nabla_i, \nabla_{k_1}] \omega_{j k_2 \dots k_p} \right) d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p}.
 \end{aligned}$$

□

Um die Summe auszurechnen, wurde in jedem Summanden  $k_1$  in  $k_l$  und  $k_l$  in  $k_1$  umbenannt und dann die Antisymmetrie von  $d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_p}$  ausgenutzt. An dem so erhaltenen lokalen Ausdruck sieht man, daß □ ein normal hyperbolischer Differentialoperator ist.

### B.8.6 Definition (d'Alembert Operator)

Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit und  $\nabla^E$  ein linearer Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(E, M, \pi)$ .  $\nabla^E$  und der vom Levi-Civita Zusammenhang auf  $T^*M$  induzierte, lineare Zusammenhang  $\nabla^{LC}$  induzieren einen linearen Zusammenhang  $\nabla^{LC \otimes E} : \Gamma^\infty(T^*M \otimes E) \longrightarrow \Gamma^\infty(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$  auf dem Vektorbündel  $T^*M \otimes E$ . Der d'Alembert Operator des Zusammenhangs ist definiert als

$$\begin{aligned}
 \square^{\nabla^E} & : \Gamma^\infty(M, E) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, E), \\
 \square^{\nabla^E} & = (\text{Spur} \otimes id_E) \circ \nabla^{LC \otimes E} \circ \nabla^E,
 \end{aligned}$$

wobei  $\text{Spur} : T^*M \otimes T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$  die metrische Spur sein soll, also  $\text{Spur}(\alpha \otimes \beta) = g(\#\alpha, \#\beta)$ .

### B.8.7 Satz (Weitzenböckformel)

Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit und  $P : \Gamma^\infty(M, E) \longrightarrow \Gamma^\infty(M, E)$  ein normal hyperbolischer Operator. Dann existiert ein eindeutig bestimmter,

linearer Zusammenhang  $\nabla$  auf dem Vektorbündel  $(E, M, \pi_E)$  und ein eindeutig bestimmtes  $B \in \Gamma^\infty(M, \text{End}_{\mathbb{R}} E = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E))$ , mit  $B_p \in \text{End}_{\mathbb{R}}(E_p)$ , sodaß

$$P = \square^\nabla + B.$$

**Beweis:** Siehe [BGP07, Lem.1.5.5]. □

Der so eindeutig bestimmte, lineare Zusammenhang heißt der *P-kompatible Zusammenhang*.

### B.8.8 Satz (Der $\square$ -kompatible Zusammenhang)

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale, orientierte, Lorentzmannigfaltigkeit und  $0 \leq p \leq m$ . Dann ist der  $\square$ -kompatible Zusammenhang auf dem Vektorbündel der alternierenden  $(0, p)$ -Tensoren der vom Levi-Civita Zusammenhang  $\nabla^{LC}$  induzierte, lineare Zusammenhang  $\nabla_p^0$ .

**Beweis:** Wähle eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$ , eine  $p$ -Form  $\omega \in \Omega_p M$  und berechne lokal

$$\begin{aligned} \square_p^0 \omega \Big|_U &= (\text{Spur} \otimes id) \circ \nabla^{LC \otimes_p^0} \circ \nabla_p^0 \omega \Big|_U \\ &\stackrel{B.2.6}{=} (\text{Spur} \otimes id) \circ \nabla^{LC \otimes_p^0} \left( \frac{1}{p!} \nabla_{p, i_0}^0 \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_0} \otimes d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p} \right) \\ &\stackrel{B.2.6}{=} (\text{Spur} \otimes id) \left( \frac{1}{p!} \nabla_{i_1}^{LC \otimes_p^0} \nabla_{p, i_0}^0 \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_1} \otimes d\varphi^{i_0} \otimes d\varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p} \right) \\ &= g^{i_1 i_0} \frac{1}{p!} \nabla_{i_1}^{LC \otimes_p^0} \nabla_{p, i_0}^0 \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}, \end{aligned}$$

oder, um die Notation einfacher und verständlicher zu halten,

$$\square_p^0 \omega \Big|_U = g^{i_1 i_0} \frac{1}{p!} \nabla_{i_1} \nabla_{i_0} \omega_{i_1 \dots i_p} d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}.$$

$\square_p^0$  unterscheidet sich also von  $\square$  nur in einem Feld von Endomorphismen, genauer nur durch einen Term in Krümmungsgrößen, und nach der Weitzenböckformel folgt die Aussage dieses Satzes. □

### B.8.9 Lemma (Vertauschbarkeit von $d$ und $\delta$ mit $\square$ )

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale, orientierte, Lorentzmannigfaltigkeit und  $0 \leq p \leq m$ . Dann vertauscht der Wellenoperator  $\square$  von  $p$ -Formen mit der äußeren Ableitung  $d$  und der Koableitung  $\delta$ . In Formeln gelten also:

$$\begin{aligned} d\square &= \square d, \\ \delta\square &= \square\delta. \end{aligned}$$

Man beachte, daß in beiden Gleichungen auf der linken Seite ein anderer Wellenoperator gemeint ist, als auf der rechten Seite. Auf der linken Seite ist in beiden Fällen der Wellenoperator für  $p$ -Formen gemeint, auf der rechten einmal der Wellenoperator für  $(p+1)$ -Formen (Vertauschen mit  $d$ ) und einmal derjenige für  $(p-1)$ -Formen (Vertauschen mit  $\delta$ ).

**Beweis:** Sei  $\omega \in \Omega_p M$  eine  $p$ -Form.

$$\begin{aligned} \square d\omega &= -(d\delta + \delta d)d\omega = -\delta d d\omega, \\ d\square\omega &= -d(d\delta + \delta d)\omega = -\delta d d\omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square\delta\omega &= -(d\delta + \delta d)\delta\omega = -\delta d\delta\omega, \\ \delta\square\omega &= -\delta(d\delta + \delta d)\omega = -\delta d\delta\omega. \end{aligned}$$

□

## B.9 Komplexwertige Differentialformen

In Hinblick auf eine Quantentheorie wollen wir nicht nur reellwertige Differentialformen, sondern auch komplexwertige Differentialformen betrachten. Durch die Vorarbeit, die in den bisherigen Kapiteln des Anhangs geleistet wurde, ist es nun nicht mehr schwer, anzugeben, wie man mit komplexwertigen Differentialformen umzugehen hat.

### B.9.1 Definition

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit, dann ist ein alternierender *komplexwertiger*  $(0, p)$ -Tensor eine alternierende  $\mathbb{R}$ -multilineare Abbildung

$$\omega_x : \underbrace{T_x M \times \cdots \times T_x M}_{x\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \in M.$$

Die alternierenden komplexwertigen  $(0, p)$ -Tensoren bilden einen Vektorraum über  $\mathbb{C}$  und damit auch über  $\mathbb{R}$ , der mit  $\Lambda_p(T_x M, \mathbb{C})$  bezeichnet wird. Als Konvention wird  $\Lambda_0(T_x M) = \mathbb{C}$  vereinbart. Jedes Element in  $\Lambda_p(T_x M, \mathbb{C})$  ist eindeutig in einen Real- und Imaginärteil zerlegbar, die für sich selbst genommen, alternierende, reellwertige  $(0, p)$ -Tensoren aus  $\Lambda_p(T_x M)$  sind. Deswegen und nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gilt

$$\Lambda_p(T_x M, \mathbb{C}) \cong \Lambda_p(T_x M) \oplus \Lambda_p(T_x M) \cong \Lambda_p(T_x M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Das Tensorbündel  $\Lambda_p(M, \mathbb{C}) := \bigcup_{x \in M} \Lambda_p(T_x M, \mathbb{C})$  der komplexwertigen  $(0, p)$ -

Tensoren ist aus diesem Grund eine  $(m + 2 \binom{m}{p})$ -dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit und  $(\Lambda_p(M, \mathbb{C}), M, \pi)$  ist ein  $2 \binom{m}{p}$ -dimensionales, glattes  $\mathbb{R}$ -Vektorraumbündel über  $M$ .

Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der komplexwertigen  $p$ -Formen ist nun definiert als die Komplexifizierung des  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes der reellwertigen  $p$ -Formen

$$\Omega_p(M, \mathbb{C}) := \Omega_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \Omega_p M \oplus \Omega_p M.$$

Wegen dieser Definition besitzen die Elemente aus  $\Omega_p(M, \mathbb{C})$  eine eindeutige Zerlegung in einen Real- und Imaginärteil, die wieder für sich genommen reellwertige Differentialformen (glatte Schnitte in  $(\Lambda_p M, M, \pi)$ ) sind:

$$\omega = \omega_{\Re} + i \omega_{\Im} = \begin{pmatrix} \omega_{\Re} \\ \omega_{\Im} \end{pmatrix}, \quad \omega_{\Re}, \omega_{\Im} \in \Omega_p M.$$

Somit sind die Elemente aus  $\Omega_p(M, \mathbb{C})$  die glatten Schnitte im Vektorbündel  $(\Lambda_p(M, \mathbb{C}), M, \pi)$  nach der Komponentenregel. In einer Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  gilt für ein  $\omega \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$

$$\omega \Big|_U = \frac{1}{p!} \varphi_{\omega_{i_1 \dots i_p}} d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p},$$

wobei

$$\varphi_{\omega_{i_1 \dots i_p}} \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}).$$

$\varphi_{\omega_{i_1 \dots i_p}} \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$  ist nun wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit äquivalent dazu, daß

$$\begin{aligned} \Re(\varphi_{\omega_{i_1 \dots i_p}}) &= \varphi_{\Re \omega_{i_1 \dots i_p}} \in \mathcal{C}^\infty(U), \\ \Im(\varphi_{\omega_{i_1 \dots i_p}}) &= \varphi_{\Im \omega_{i_1 \dots i_p}} \in \mathcal{C}^\infty(U) \end{aligned}$$

gelten.

## B.9.2 Operatoren

Wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit eines  $\omega \in \Omega_s(M, \mathbb{C})$  in Real- und Imaginärteil werden die für reellwertige p-Formen bekannten Operationen auf komplexwertige p-Formen durch komponentenweise Anwendung fortgesetzt. Dies garantiert insbesondere die  $\mathbb{C}$ -Linearität dieser Operationen. So werden z.B. die äußere Ableitung, der Hodge-\*-Operator und die Koableitung definiert durch

$$\begin{aligned} d : \Omega_p(M, \mathbb{C}) &\longrightarrow \Omega_{(p+1)}(M, \mathbb{C}) \\ \omega &\longmapsto d\omega := d\omega_{\Re} + i d\omega_{\Im}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * : \Omega_p(M, \mathbb{C}) &\longrightarrow \Omega_{(m-p)}(M, \mathbb{C}) \\ \omega &\longmapsto *\omega := *\omega_{\Re} + i *\omega_{\Im}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta : \Omega_p(M, \mathbb{C}) &\longrightarrow \Omega_{(p-1)}(M, \mathbb{C}) \\ \omega &\longmapsto \delta\omega := \delta\omega_{\Re} + i \delta\omega_{\Im}. \end{aligned}$$

Genauso werden das Integral, das Zurückholen und Verschieben komplexwertiger Differentialformen und der von dem Levi-Civita-Zusammenhang auf  $(\Lambda_p(M, \mathbb{C}), M, \pi)$  induzierte Zusammenhang definiert durch

$$\begin{aligned} \int : \Omega_p(M, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto \int \omega := \int \omega_{\Re} + i \int \omega_{\Im}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F : N &\longrightarrow M, \\ F^{pb} : \Omega_p(M, \mathbb{C}) &\longrightarrow \Omega_p(N, \mathbb{C}) \\ \omega &\longmapsto F^{pb}\omega := F^{pb}\omega_{\Re} + i F^{pb}\omega_{\Im}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{pf} : \Omega_p(N, \mathbb{C}) &\longrightarrow \Omega_p(M, \mathbb{C}) \\ \omega &\longmapsto F_{pf}\omega := F_{pf}\omega_{\Re} + i F_{pf}\omega_{\Im}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma^\infty(TM) \times \Omega_p(M, \mathbb{C}) &\longrightarrow \Omega_p(M, \mathbb{C}) \\ (X, \omega) &\longmapsto \nabla_X\omega := \nabla_X\omega_{\Re} + i \nabla_X\omega_{\Im}, \end{aligned}$$

wobei anzumerken ist, daß der so definierte lineare Zusammenhang auf dem Vektorbündel  $(\Lambda_p(M, \mathbb{C}), M, \pi)$  genau derjenige ist, den man durch Lemma

B.2.4 auf  $\Lambda_p M \oplus \Lambda_p M$  erhält. Durch die komponentenweise Anwendung auf Real- und Imaginärteil vertauschen die Operatoren  $d, *, \delta, \int, \nabla$ , das Zurückholen und das Drücken mit der komplexen Konjugation. Globale Aussagen, wie z.B. der Stokessche Integalsatz, gelten mit diesen Definitionen für komplexwertige Formen genauso wie für reellwertige Formen. Ebenso stimmen alle lokalen Ausdrücke von und mit komplexwertigen Differentialformen mit den entsprechenden lokalen Ausdrücken reellwertiger Differentialformen, wie sie in den bisherigen Kapiteln des Anhangs bereits angegeben wurden, vollständig überein. Man muß sich nur immer ins Gedächtnis rufen, daß die Komponentenfunktion nun komplexwertige, glatte Funktionen sind. Aus diesem Grund folgt auch, daß der Wellenoperator  $\square = -\delta d - d\delta$  für komplexwertige Formen normal hyperbolisch mit führendem Symbol vom metrischen Typ ist. Der  $\square$ -kompatible, lineare Zusammenhang ist dann der zuvor definierte Zusammenhang  $\nabla$ , der vom Levi-Civita-Zusammenhang induziert wird.

### B.9.3 Symmetrische Paarung

Eine wichtige Sache, die noch neu geklärt werden muß, ist die symmetrische Paarung von komplexwertigen Formen. Für reellwertige Formen wurde diese in Unterabschnitt B.6.3 angegeben. Für komplexwertige, kompakt getragene  $p$ -Formen wird die symmetrische Paarung genauso durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: \Omega_{pc}(M, \mathbb{C}) \times \Omega_{pc}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle \omega, \eta \rangle &:= \int_M \omega \wedge * \eta, \end{aligned}$$

definiert. Wegen den Eigenschaften der symmetrischen Paarung reellwertiger Differentialformen ist die so definierte Paarung für komplexwertige Differentialformen symmetrisch und nicht ausgeartet, da

$$\int_M \omega \wedge * \eta = \int_M \omega_{\Re} \wedge * \eta_{\Re} - \omega_{\Im} \wedge * \eta_{\Im} + i \int_M \omega_{\Re} \wedge * \eta_{\Im} + \omega_{\Im} \wedge * \eta_{\Re}.$$

Hiermit folgert man dann, daß auch  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M : \Omega_{pc}(M, \mathbb{C}) \times \Omega_p(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M : \Omega_p(M, \mathbb{C}) \times \Omega_p(M, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$  nicht entartet sind. Bezüglich dieser Paarung sind die äußere Ableitung und die Koableitung für komplexwertige Formen zueinander formal adjungierte Operatoren.

# Anhang C

## Lorentzgeometrie

### C.1 Erste Definitionen

#### C.1.1 Definition (Lorentzmannigfaltigkeit)

Eine Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Signatur  $(+, -, -, -)$ .

#### C.1.2 Definition (Licht-, raum- und zeitartig)

Sei  $(M, g)$  ein Lorentzmannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Dann heißt ein Vektor  $v_p \in T_p M \setminus \{0\}$

- lichtartig :  $\iff g_p(v_p, v_p) = 0$ .
- raumartig :  $\iff g(v_p, v_p) < 0$ .
- zeitartig :  $\iff g(v_p, v_p) > 0$ .
- kausal :  $\iff g(v_p, v_p) \geq 0$ .

Man beachte, daß ein lichtartiger oder ein kausaler Vektor per definitionem niemals der Nullvektor ist! Eine glatte Kurve  $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  heißt *licht-, raum-, zeitartig* oder *kausal* genau dann, wenn für alle  $t \in I$  der Tangentialvektor  $\dot{c}(t)$  licht-, raum-, zeitartig oder kausal ist. Eine glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit  $N$  von  $M$  heißt *licht-, raum- oder zeitartig* genau dann, wenn  $T_p N$  licht-, raum- oder zeitartig für alle  $p \in N$  bzgl. des von der Lorentzmetrik induzierten  $(0, 2)$ -Tensorfeldes ist, d.h.  $v_p$  ist licht-, raum- oder zeitartig für alle  $v_p \in T_p N \setminus \{0\}$ , für alle  $p \in N$ .



### C.1.3 Satz (Zusammenhangskomponenten)

Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit und bezeichne  $\mathfrak{T}_p = \{v_p \in T_p M \mid g_p(v_p, v_p) > 0\}$  die Menge der zeitartigen Vektoren. Definiere  $\forall v_p \in \mathfrak{T}_p$  die Mengen

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_+(v_p) &:= \{u_p \in \mathfrak{T}_p \mid g(v_p, u_p) > 0\}, \\ \mathfrak{C}_-(v_p) &:= \{u_p \in \mathfrak{T}_p \mid g(v_p, u_p) < 0\},\end{aligned}$$

welche Zeitkegel genannt werden. Es gelten:

- (a)  $\mathfrak{C}_+(v_p)$  und  $\mathfrak{C}_-(v_p)$  sind offen, disjunkt und konvex.
- (b)  $\mathfrak{C}_+(v_p) \cup \mathfrak{C}_-(v_p) = \mathfrak{T}_p$ .
- (c)  $u_p \in \mathfrak{C}_+(v_p) \iff v_p \in \mathfrak{C}_+(u_p) \iff \mathfrak{C}_+(v_p) = \mathfrak{C}_+(u_p)$ .

**Beweis:** Siehe [O’N83, Lem.5.29] und die darauffolgenden Aussagen.  $\square$

Es ist nicht möglich die beiden Zusammenhangskomponenten von  $\mathfrak{T}_p$  intrinsisch zu unterscheiden, da es keinen zwingenden Grund dafür gibt, einen zeitartigen Vektor einem anderem zeitartigen Vektor vorzuziehen. Z.B. ist  $v_p \in \mathfrak{C}_+(v_p)$  aber auch  $v_p \in \mathfrak{C}_-(u_p)$  für  $g_p(v_p, u_p) < 0 \implies \mathfrak{C}_+(v_p) = \mathfrak{C}_-(u_p)$ . Die Unterscheidung der Zusammenhangskomponenten muß also per Hand durch eine willkürlich Auszeichnung vorgenommen werden.

### C.1.4 Definition (Zukunfts-/vergangenheitsgerichtet)

Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit, dann heißt sich eine Zusammenhangskomponente von  $\mathfrak{T}_p$  auszusuchen,  $T_p M$  zeitzuorientieren.

- Ein zeitartiger Vektor aus der ausgewählten Zusammenhangskomponente heißt zukunftsgerichtet.
- Ein zeitartiger Vektor aus der anderen Zusammenhangskomponente heißt vergangenheitsgerichtet.
- Ein kausaler Vektor heißt zukunfts-/vergangenheitsgerichtet, wenn er im Abschluß der Menge der zukunfts-/vergangenheitsgerichteten Vektoren liegt.

### C.1.5 Definition (Zeitorientierung)

Eine Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt genau dann zeitorientierbar, wenn es ein zeitartiges Vektorfeld  $X \in \Gamma^\infty(TM)$  gibt, d.h.  $X|_p$  ist zeitartig  $\forall p \in M$ . Die Auswahl eines solchen zeitartigen Vektorfeldes heißt dann Zeitorientierung von  $(M, g)$ .

Es wird nach Wahl eines solchen  $X$  dann üblicherweise auf  $T_pM$  diejenige Zusammenhangskomponente ausgezeichnet, in welcher  $X|_p$  liegt, also  $\mathfrak{C}_+(X|_p)$ .

### C.1.6 Definition (Raumzeit)

Eine zeitorientierte, zusammenhängende Lorentzmannigfaltigkeit mit Dimension  $\geq 2$  nennt man eine Raumzeit.

### C.1.7 Definition (Zukunfts-/vergangenheitsgerichtete Kurve)

Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit, dann heißt eine glatte Kurve  $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  zukunfts-/vergangenheitsgerichtet genau dann, wenn  $\dot{c}(t)$  kausal ist und zukunfts-/vergangenheitsgerichtet  $\forall t \in I$ .

In einer Raumzeit ist eine zeit-, licht- oder kausale glatte Kurve entweder immer zukunfts- oder immer vergangenheitsgerichtet, aber nicht beides! Siehe hierzu [BEE96].

## C.2 Kausale Strukturen

### C.2.1 Definition (Kausalitätsrelationen)

Sei  $(M, g)$  eine zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit und  $p, q \in M$  zwei Punkte.

- $p \ll q : \iff \exists \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  zeitartige, zukunftsgerichtete, glatte Kurve von  $p$  nach  $q$ .
- $p < q : \iff \exists \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  kausale, zukunftsgerichtete, glatte Kurve von  $p$  nach  $q$ .
- $p \leq q : \iff p = q$  oder  $p < q$ .

$\ll$  heißt „sehr viel früher als“ und  $<$  heißt „früher als“. Die Kausalitätsrelationen sind transitiv, ein Beweis ist in [Pen72, Def.2.1, Prop.2.23] zu finden.

### C.2.2 Definition (Zukunft und Vergangenheit)

Sei  $(M, g)$  eine zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit und  $p \in M$  ein Punkt. Es werden folgende Teilmengen von  $M$  definiert:

- Chronologische Zukunft von  $p$ :  $I_+^M(p) := \{q \in M \mid p \ll q\}$ .
- Chronologische Vergangenheit von  $p$ :  $I_-^M(p) := \{q \in M \mid q \ll p\}$ .
- Kausale Zukunft von  $p$ :  $J_+^M(p) := \{q \in M \mid p \leq q\}$ .
- Kausale Vergangenheit von  $p$ :  $J_-^M(p) := \{q \in M \mid q \leq p\}$ .

Für eine Teilmenge  $A \subseteq M$  definiert man ebenso:

- Chronologische Zukunft von  $A$ :  $I_+^M(A) := \bigcup_{p \in A} I_+^M(p)$ .
- Chronologische Vergangenheit von  $A$ :  $I_-^M(A) := \bigcup_{p \in A} I_-^M(p)$ .
- Kausale Zukunft von  $A$ :  $J_+^M(A) := \bigcup_{p \in A} J_+^M(p)$ .
- Kausale Vergangenheit von  $A$ :  $J_-^M(A) := \bigcup_{p \in A} J_-^M(p)$ .

Die chronologische Zukunft/Vergangenheit ist immer eine offene Menge, die kausale Zukunft/Vergangenheit ist i.A. weder abgeschlossen noch offen. Als weitere Abkürzung wird für eine Menge  $A \subseteq M$  die Mengen  $J^M(A) := J_+^M(A) \cup J_-^M(A)$  und  $I^M(A) := I_+^M(A) \cup I_-^M(A)$  definiert. Man sagt, daß zwei Mengen  $A$  und  $B$  *raumartig getrennt* sind, wenn  $A \cap J^M(B) = \emptyset$  ( $\iff B \cap J^M(A) = \emptyset$ ). Eine Menge  $A$  heißt *zukunfts-/vergangenheitskompakt* genau dann, wenn  $A \cap J_+^M(p)$  bzw.  $A \cap J_-^M(p)$  kompakt  $\forall p \in M$  ist.

### C.2.3 Definition (Achronal und akausal)

Eine Teilmenge  $A \subset M$  in einer Raumzeit  $(M, g)$  heißt genau dann

- achronal, falls  $p \ll q$  niemals richtig ist für  $p, q \in A$ .  
Das ist genau dann der Fall, wenn keine zeitartige, glatte Kurve  $A$  mehr als einmal schneidet.
- akausal, falls  $p < q$  niemals richtig ist für  $p, q \in A$ .  
Das ist genau dann der Fall, wenn keine kausale, glatte Kurve  $A$  mehr als einmal schneidet.

Jede akausale Teilmenge ist auch achronal, die Umkehrung ist i.A. falsch. Nach [O’N83, Lem.14.42] folgt aber, daß jede achronale raumartige Hyperfläche auch akausal ist.

### C.2.4 Definition (Endpunkte einer Kurve)

Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit und  $c : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Ist  $c$  zukunfts-/vergangenheitsgerichtet und kausal oder zeitartig, so heißt  $p \in M$

- In der Zukunft/Vergangenheit liegender Endpunkt von  $\gamma : \iff \forall$  Umgebungen  $U$  von  $p \exists t_U = t(U) \in I$  mit  $\gamma(t) \in U \forall t > t_U$ .
- In der Vergangenheit/Zukunft liegender Endpunkt von  $\gamma : \iff \forall$  Umgebungen  $U$  von  $p \exists t_U = t(U) \in I$  mit  $\gamma(t) \in U \forall t < t_U$ .

### C.2.5 Definition (Nicht erweiterbare Kurve)

Eine kausale oder zeitartige, glatte Kurve  $c : I \rightarrow M$  in eine Raumzeit  $(M, g)$  heißt

- Zukunftsmaximal oder zukunftsunerweiterbar :  $\iff c$  hat keinen in der Zukunft liegenden Endpunkt.
- Vergangenheitsmaximal oder vergangenheitsunerweiterbar :  $\iff c$  hat keinen in der Vergangenheit liegenden Endpunkt.
- Nicht erweiterbar :  $\iff c$  zukunfts- und vergangenheitsmaximal.

### C.2.6 Definition (Cauchyentwicklung)

Sei  $A \subset M$  eine Teilmenge einer Raumzeit  $(M, g)$ .

- $D_+^M(A) := \left\{ p \in M \mid \text{Jede vergangenheitsmaximale, kausale, glatte Kurve durch } p \text{ schneidet } A \right\}$   
heißt die Zukunftscauchyentwicklung oder der Zukunftsabhängigkeitsbereich von  $A$ .
- $D_-^M(A) := \left\{ p \in M \mid \text{Jede zukunftsmaximale, kausale, glatte Kurve durch } p \text{ schneidet } A \right\}$   
heißt die Vergangenheitscauchyentwicklung oder der Vergangenheitsabhängigkeitsbereich von  $A$ .

- $D^M(A) := D_+^M(A) \cup D_-^M(A)$  heißt die Cauchyentwicklung oder der Abhängigkeitsbereich von  $A$ .

Ist  $p \in D_+^M(A)$ , dann bedeutet dies, daß alle Signale, die  $p$  theoretisch beeinflussen können auf  $A$  registriert werden. Die physikalische Situation, die in  $D_+^M(A)$  vorliegt, ist also vollständig durch die Informationen auf  $A$  festgelegt. Genauso ist  $D_-^M(A)$  die Menge aller Ereignisse, die  $A$  theoretisch beeinflussen können.

### C.2.7 Definition (Cauchyhyperfläche)

Eine Teilmenge  $\Sigma \subset M$  einer Raumzeit  $(M, g)$  heißt genau dann Cauchyhyperfläche, wenn jede nicht erweiterbare, zeitartige, glatte Kurve  $\Sigma$  genau einmal schneidet.

Eine Cauchyhyperfläche ist immer eine abgeschlossene, achronale, topologische Hyperfläche und wird von jeder nicht erweiterbaren, kausalen, glatten Kurve geschnitten, [O’N83, Lem.14.29]. Cauchyhyperflächen sind also immer als eingebettete Untermannigfaltigkeiten zu verstehen.

### C.2.8 Lemma (Cauchyhyperfläche und -entwicklung)

Eine achronale Menge  $A \subset M$  in einer Raumzeit  $(M, g)$  ist eine Cauchyhyperfläche genau dann, wenn  $D^M(A) = M$ .

## C.3 Global hyperbolische Raumzeiten

### C.3.1 Definition (Kausalitätsbedingung)

Eine Raumzeit heißt genau dann kausal, wenn sie keine geschlossene kausale Kurve enthält.

Physikalisch relevante Raumzeiten sollten immer die Kausalitätsbedingung erfüllen, wodurch man Paradoxen ausschließt, die bei Reisen in die Vergangenheit erzeugt werden. Insbesondere werden somit kompakte Mannigfaltigkeiten als physikalisch sinnvolle Raumzeiten aussortiert, siehe [BF09].

### C.3.2 Definition (Global hyperbolisch)

Eine Raumzeit  $(M, g)$  heißt genau dann global hyperbolisch, wenn sie die Kausalitätsbedingung erfüllt und für alle  $p, q \in M$  der Schnitt  $J^M(p, q) := J_+^M(p) \cap J_-^M(q)$  kompakt ist.

Global hyperbolische Raumzeiten besitzen viele schöne Eigenschaften, die man sich von einer physikalisch realistischen Mannigfaltigkeit wünscht, siehe [GH79]. Wie sich gezeigt hat und später mathematisch präziser formuliert wird, zeichnen sich global hyperbolische Mannigfaltigkeiten auch ganz besonders dadurch als exzellente, physikalische Raumzeiten aus, daß auf ihnen Cauchyprobleme, grob gesprochen Differentialgleichungen mit Vorgabe von Anfangswerten, wohlgestellt sind. Beispiele für global hyperbolische Raumzeiten sind der altbekannte Minkowskiraum, die Robertson-Walker Raumzeit und die Schwarzschild-Kruskal Raumzeit. Die Anti-deSitter Raumzeit ist ein Beispiel für eine nicht global hyperbolische Raumzeit.

### C.3.3 Bemerkung

In früheren Arbeiten wie z.B. in [BGP07] wird starke Kausalität statt Kausalität gefordert. Es ist aber erst kürzlich bemerkt worden, daß diese beiden Begriffe auf einer Raumzeit  $(M, g)$  äquivalent sind, wenn

$$J^M(p, q) := J_+^M(p) \cap J_-^M(q) \text{ kompakt } \forall p, q \in M$$

erfüllt ist. Siehe hierzu [BS07].

### C.3.4 Satz (R. Geroch 1970)

Eine Raumzeit  $(M, g)$  ist genau dann global hyperbolisch, wenn sie eine Cauchyhyperfläche besitzt.

Dieses Resultat ist rein topologisch, d.h. ist  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit, so gibt es eine topologische Cauchyhyperfläche  $\Sigma$  und  $M$  ist homöomorph zur Produktmannigfaltigkeit  $\mathbb{R} \times \Sigma$ . Dieser Satz läßt sich noch wesentlich verschärfen, wie von A.N. Bernal und M. Sanchez in den letzten Jahren bewiesen wurde.

### C.3.5 Satz (A.N. Bernal und M. Sanchez 2003)

Jede global hyperbolische Raumzeit besitzt eine glatte, raumartige Cauchyhyperfläche  $\Sigma$  und ist so diffeomorph zur glatten Produktmannigfaltigkeit  $\mathbb{R} \times \Sigma$ .

### C.3.6 Definition (Zeitfunktionen)

Sei  $(M, g)$  eine Raumzeit. Eine stetige Funktion  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

- Zeitfunktion : $\iff t$  längs jeder zukunftsgerichteten, kausalen, glatten Kurve streng monoton wachsend ist.
- Temporalfunktion : $\iff t$  ist glatt und  $\text{grad}(t)$  ist zukunftsgerichtet und zeitartig.
- Cauchyzeitfunktion : $\iff t$  ist eine Zeitfunktion und alle Niveauflächen von  $t$  sind Cauchyhyperflächen.
- Cauchytemporalfunktion : $\iff t$  ist eine Temporalfunktion und alle Niveauflächen von  $t$  sind Cauchyhyperflächen.

### C.3.7 Satz (A.N. Bernal und M. Sanchez)

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit und  $\Sigma \subset M$  eine glatte, raumartige Cauchyhyperfläche.

Dann existiert eine Cauchytemporalfunktion  $T$ , so daß gelten:

- (a)  $\Sigma = T^{-1}(0)$ .
- (b)  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist  $T^{-1}(t)$  eine glatte, raumartige Cauchyhyperfläche in  $M$ . Man erhält also eine Aufblätterung von  $M$  in glatte, raumartige Cauchyhyperflächen.
- (c)  $(M, g)$  ist isometrisch diffeomorph zur glatten Produktmannigfaltigkeit

$$\mathbb{R} \times \Sigma \text{ mit der Metrik } \beta dt \otimes dt - h,$$

wobei  $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma, \mathbb{R}^+)$ ,  $t$  ist die Projektion von  $\mathbb{R} \times \Sigma$  auf  $\mathbb{R}$ , jede Niveaufläche  $\{t\} \times \Sigma$  ist eine glatte, raumartige Cauchyhyperfläche in  $\mathbb{R} \times \Sigma$  und  $h$  ist Riemannsche Metrik auf  $\Sigma$ , die glatt von  $t$  abhängt.

**Beweis:** Siehe [BS05] und [BS06]. □

Die Cauchytemporalfunktion ist nicht eindeutig bestimmt. Die in (c) besagte Isometrie, wir nennen sie  $\text{Is}_m$ , wird mit der Cauchytemporalfunktion  $T$  konstruiert, wofür wir nochmals auf [BS05, Proposition 2.4] verweisen. Insbesondere geht daraus hervor, daß  $T = t \circ \text{Is}_m$  ist, weswegen  $\{0\} \times \Sigma$  mit  $\Sigma$  und allgemeiner  $\{t\} \times \Sigma$  mit  $T^{-1}(t)$  zu identifizieren ist.

## C.4 Angepaßte Koordinatensysteme

Wegen der bisher gemachten Aussagen gibt es im Fall einer global hyperbolischen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  mit glatter, raumartiger Cauchyhyperfläche  $\Sigma$  besondere Schnittkarten, die sogenannten angepaßten Koordinatensysteme. Sie sind für lokale Rechnungen besonders gut geeignet und wir verwenden sie auch immer für solche. Wie man angepaßte Koordinatensysteme konstruiert und welche Eigenschaften sie besitzen, soll nun geklärt werden.

### C.4.1 Konstruktion

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit und  $\Sigma$  eine raumartige, glatte Cauchyhyperfläche. Satz C.3.7 erlaubt es aus Karten  $(U, \varphi)$  von  $\Sigma$  Karten von  $M$  zu konstruieren, so daß die Metrik aufspaltet. Sei nämlich  $\text{Ism}$  eine Isometrie  $M \rightarrow \mathbb{R} \times \Sigma$  mit Cauchytemporalfunktion  $T = t \circ \text{Ism}$ , dann ist  $(\mathbb{R} \cong I \times U, id \times \varphi)$  eine Produktkarte von  $(\mathbb{R} \times \Sigma, \beta dt^2 - h)$  und damit  $(V, \phi) := (\text{Ism}^{-1}(I \times U), (id \times \varphi) \circ \text{Ism})$  eine Karte von  $(M, g)$ . Sei  $V \cap \Sigma \neq \emptyset$ , dann ist  $\phi(V \cap \Sigma) = \phi(V) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^3$ , da  $\phi^0 = T$  also konstant 0 auf  $\Sigma$  ist.  $(V, \phi)$  ist demnach eine Schnittkarte von  $M$  für  $\Sigma$  und wird *angepaßtes Koordinatensystem* genannt.

### C.4.2 Aufspaltung der Metrik

Sei  $(V, \phi)$  ein angepaßtes Koordinatensystem mit zugehöriger Karte  $(U, \varphi)$  von  $\Sigma$ . Für  $g|_V$  folgt in einer solchen Schnittkarte

$$\begin{aligned} g|_V &= \text{Ism}^{pb} (\beta dt \otimes dt - h_{ij} d(id \times \varphi)^i \otimes d(id \times \varphi)^j) \\ &= \beta \circ \text{Ism} d(t \circ \text{Ism}) \otimes d(t \circ \text{Ism}) - h_{ij} \circ \text{Ism} d(id \times \varphi)^i \otimes d(id \times \varphi)^j \\ &= \beta \circ \text{Ism} dT \otimes dT - h_{ij} \circ \text{Ism} d\phi^i \otimes d\phi^j. \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Metrik in „zeitliche“ und „räumliche“ Komponenten aufgespalten.  $h \circ \text{Ism}$  ist hierbei die von  $g$  auf der entsprechenden Cauchyhyperfläche induzierte Riemannsche Metrik, also  $h \circ \text{Ism}|_{T^{-1}(t)} = -\iota_t^{pb} g$ . In Zukunft werden  $h \circ \text{Ism}$  und  $\beta \circ \text{Ism}$  auch schlicht als  $h$  und  $\beta$  bezeichnet, was aber zu keinen Verwirrungen führen sollte. Es gelten

$$\begin{aligned} \varphi h_{ij} &= -\phi g_{ij}, \\ \sqrt{|\phi g|} &= \sqrt{\beta} \sqrt{\varphi h}. \end{aligned}$$



Die Aufspaltung der Metrik hat eine wichtige Implikation für den Wechsel von einem angepaßten Koordinatensystem in ein weiteres angepaßtes Koordinatensystem. Seien  $(V, \phi)$  und  $(W, \theta)$  zwei angepaßte Koordinatensysteme. Da  $g$  ein Tensor ist, erfüllt er das Transformationsverhalten für Tensoren und damit ist

$${}^\theta g_{\mu\nu} = T^\alpha_\mu T^\beta_\nu \phi g_{\alpha\beta}.$$

Insbesondere ist aber, da die Metrik aufspaltet

$$0 = {}^\theta g_{0j} = T^\alpha_0 T^\beta_j \phi g_{\alpha\beta} \stackrel{A.2.1}{=} T^\alpha_0 T^\beta_j \phi g_{\alpha\beta} = T^\alpha_0 T^\beta_j \phi g_{\alpha\beta} = T^\alpha_0 T^\beta_j \phi g_{\alpha\beta}$$

Multipliziert man beide Seiten mit  $T^{\phi\rightarrow\theta}{}_i^j$  und summiert über  $j$ , so erhält man

$$T^{\phi\rightarrow\theta}{}_0^a \phi g_{ai} = 0$$

Auf dieses Ergebnis greifen wir in Unterabschnitt 3.3.2 zurück.

### C.4.3 Normalenvektorfeld $\mathbf{n}$

In einem angepaßten Koordinatensystem  $(V, \phi)$  mit zugehöriger Karte  $(U, \varphi)$  von  $\Sigma$  hat das eindeutig bestimmte, zeitartige und zukunftsgerichtete Normalenvektorfeld  $\mathbf{n}$  längs  $\Sigma$  eine ganz einfache Form, nämlich wegen

$$g(\partial_0^\phi, \partial_i^\phi) = g(\partial_T, \partial_i^\phi) = \phi g_{0i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

folgt

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{g(\partial_T, \partial_T)}} \partial_T = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \partial_T.$$

Die „räumlichen“ Komponenten  $\phi n^i$  von  $\mathbf{n}$  sind also in angepaßten Koordinatensystemen Null. Wegen  $\sqrt{|\phi g|} = \sqrt{\beta} \sqrt{\varphi h}$  folgt weiter

$$\phi n^0 = \frac{\sqrt{\varphi h}}{\sqrt{|\phi g|}}.$$

Für das zu  $\mathbf{n}$  zugehörige Kovektorfeld  $\mathbf{b}(\mathbf{n})$  gilt

$$\mathbf{b}(\mathbf{n}) \Big|_U = \phi g_{\mu\nu} \phi n^\mu d\phi^\nu = \phi g_{00} \phi n^0 d\phi^0 = \sqrt{\beta} dT = \frac{\sqrt{|\phi g|}}{\sqrt{\varphi h}} dT,$$

daher  $\phi n_i = 0, i = 1, 2, 3$ .

### C.4.4 Lemma (Hodge-\*-Operator und $\mathfrak{n}$ )

Sei  $(M, g)$  eine  $m$ -dimensionale, orientierte, global hyperbolische Raumzeit und  $\Sigma$  eine raumartige, glatte Cauchyhyperfläche mit Einbettung  $\iota : \Sigma \rightarrow M$ . Bezeichne  $h = -\iota^{pb}g$  die von  $g$  auf  $\Sigma$  induzierte Riemannsche Metrik,  $*_M, *_\Sigma$  die Hodge-\*-Operatoren auf  $M$  bzw.  $\Sigma$  und  $\mathfrak{n}$  das zeitartige und zukunftsgerichtete Normalenvektorfeld längs  $\Sigma$ . Sei weiter  $\Sigma$  mit der von  $\mathfrak{n}$  induzierten Orientierung versehen. Es gilt dann für eine  $p$ -Form  $\omega \in \Omega_p M$ ,  $1 \leq p \leq m$

$$(-1)^{(p+1)(p-1)}(p-1)! *_\Sigma \iota^{pb}(*_M \omega) = \iota^{pb}(\text{ein}_{\mathfrak{n}} \omega).$$

**Beweis:** Sei  $(V, \phi)$  ein angepaßtes Koordinatensystem von  $M$  für  $\Sigma$  und  $(U, \varphi)$  die zugehörige Karte von  $\Sigma$ . Alle Komponentenfunktionen und Ableitungen sind in dieser Wahl zu verstehen. Es gilt

$$\begin{aligned} & *_\Sigma \iota^{pb}(*_M \omega) \Big|_U = *_\Sigma \iota^{pb}(*_M \omega \Big|_U) \\ & = *_\Sigma \iota^{pb}(*_M \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} d\phi^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{\mu_p}) \\ \stackrel{B.6.4}{=} & *_\Sigma \iota^{pb} \left( \frac{\text{sgn}(\phi)}{p!(m-p)!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \nu_{p+1} \dots \nu_m} \left( \prod_{l=1}^p g^{\nu_l \mu_l} \right) \sqrt{|g|} d\phi^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\phi^{\nu_m} \right) \\ & = *_\Sigma \left( \frac{\text{sgn}(\phi)}{p!(m-p)!} \omega^{\nu_1 \dots \nu_p} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p i_{p+1} \dots i_m} \sqrt{|g|} d\varphi^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_m} \right) \\ & = *_\Sigma \left( \frac{\text{sgn}(\phi)}{p!(m-p)!} \sum_{l=1}^p \omega^{n_1 \dots n_{l-1} 0 \dots n_p} \epsilon_{n_1 \dots n_{l-1} 0 \dots n_p i_{p+1} \dots i_m} \sqrt{|g|} d\varphi^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_m} \right) \\ & = *_\Sigma \left( \frac{\text{sgn}(\phi)}{p!(m-p)!} \sum_{l=1}^p \omega^{0 n_1 \dots n_{l-1} n_l+1 \dots n_p} \epsilon_{0 n_1 \dots n_{l-1} n_l+1 \dots n_p i_{p+1} \dots i_m} \sqrt{|g|} d\varphi^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_m} \right) \\ & = *_\Sigma \left( \frac{\text{sgn}(\phi)}{(p-1)!(m-p)!} \omega^{0 i_1 \dots i_{p-1}} \epsilon_{0 i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_m} \sqrt{|g|} d\varphi^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_m} \right) \\ & = *_\Sigma \left( \frac{\text{sgn}(\phi)}{(p-1)!(m-p)!} \omega^{0 i_1 \dots i_{p-1}} \epsilon_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_m} \sqrt{|g|} d\varphi^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_m} \right) \\ \stackrel{B.6.4}{=} & \frac{\sqrt{|g|} \sqrt{h}}{(p-1)!^2 (m-p)!} \omega^{0 i_1 \dots i_{p-1}} \epsilon_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_m} \epsilon_{j_{p+1} \dots j_m j_1 \dots j_{p-1}} \prod_{l=p+1}^m h^{j_l i_l} d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_{p-1}} \\ & = \frac{(-1)^{p(p-1)} \sqrt{|g|} \sqrt{h}}{(p-1)!^2 (m-p)!} \omega^{0 i_1 \dots i_{p-1}} \epsilon_{i_1 \dots i_{p-1} i_{p+1} \dots i_m} \epsilon_{j_1 \dots j_{p-1} j_{p+1} \dots j_m} \prod_{l=p+1}^m h^{j_l i_l} d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_{p-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{|g|}\sqrt{h}}{(p-1)!^2(m-p)!} \omega^{0i_1\dots i_{p-1}} \epsilon_{i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}\dots i_m} \epsilon_{j_1\dots j_{p-1}j_{p+1}\dots j_m} \\
 &\quad \cdot \prod_{l=p+1}^m h^{ji_l} \prod_{l=1}^{p-1} h^{jn_l} \prod_{l=1}^{p-1} h_{n_l k_l} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 \stackrel{B.5.2}{=} &\frac{(-1)^{p(p-1)}\sqrt{|g|}}{(p-1)!^2(m-p)!} \omega^{0i_1\dots i_{p-1}} \epsilon_{i_1\dots i_{p-1}i_{p+1}\dots i_m} \frac{1}{\sqrt{h}} \epsilon^{n_1\dots n_{p-1}i_{p+1}\dots i_m} \prod_{l=1}^{p-1} h_{n_l k_l} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 \stackrel{B.5.3}{=} &\frac{(-1)^{p(p-1)}\sqrt{\beta}}{(p-1)!^2} \omega^{0i_1\dots i_{p-1}} \prod_{l=1}^{p-1} h_{n_l k_l} \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1}^{n_1} & \dots & \delta_{i_{p-1}}^{n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_1}^{n_{p-1}} & \dots & \delta_{i_{p-1}}^{n_{p-1}} \end{pmatrix} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{p(p-1)}}{(p-1)!} \sqrt{\beta} \omega^{0n_1\dots n_{p-1}} \prod_{l=1}^{p-1} h_{n_l k_l} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{(p+1)(p-1)}}{(p-1)!} \sqrt{\beta} \omega^{0n_1\dots n_{p-1}} \prod_{l=1}^{p-1} g_{n_l k_l} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{(p+1)(p-1)}}{(p-1)!} \sqrt{\beta} \omega^{0\nu_1\dots \nu_{p-1}} \prod_{l=1}^{p-1} g_{\nu_l k_l} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{(p+1)(p-1)}}{(p-1)!} \sqrt{\beta} \omega_{\mu k_1\dots k_{p-1}} g^{\mu 0} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{(p+1)(p-1)}}{(p-1)!} n_0 \omega_{\mu k_1\dots k_{p-1}} g^{\mu 0} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{(p+1)(p-1)}}{(p-1)!} n^0 \omega_{0 k_1\dots k_{p-1}} d\varphi^{k_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{k_{p-1}} \\
 &= \frac{(-1)^{(p+1)(p-1)}}{(p-1)!} \iota^{pb}(\text{ein}_n \omega) \Big|_U.
 \end{aligned}$$

Da das angepaßte Koordinatensystem beliebig gewählt war und sich ganz  $\Sigma$  durch solche überdecken läßt, folgt die Behauptung.  $\square$

Der Beweis dieses Lemmas läßt sich auch allgemeiner mit beliebigen Schnittkarten führen, die Existenz angepaßter Koordinatensysteme ist also nicht essentiell für den Beweis. Weiter gilt wegen der komponentenweisen Anwendung von  $*$  diese Aussage genauso für  $\omega \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$ .

## C.5 Normal hyperbolische Differentialgleichungen

An dieser Stelle zitieren wir die wichtigsten Sätze aus [BGP07] zur Lösungstheorie von normal hyperbolischen Differentialgleichungen auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten.

### C.5.1 Satz (Eindeutigkeit)

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit,  $\Sigma \subset M$  eine glatte, raumartige Cauchyhyperfläche,  $\mathbf{n} \in \Gamma^\infty(\Sigma, TM)$  das zeitartige und zukunftsgerichtete Normalenvektorfeld längs  $\Sigma$ ,  $(E, M, \pi)$  ein Vektorbündel,  $P$  ein normal hyperbolischer Operator, der auf den Schnitten von  $E$  operiert und  $\nabla$  der  $P$ -kompatible Zusammenhang auf  $E$ . Löst  $u \in \Gamma^\infty(M, E)$

$$\begin{aligned} Pu &= 0, \\ u \Big|_{\Sigma} &= 0, \\ \nabla_{\mathbf{n}} u \Big|_{\Sigma} &= 0, \end{aligned}$$

dann ist  $u=0$  auf  $M$ .

### C.5.2 Satz (Cauchyproblem)

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit,  $\Sigma \subset M$  eine raumartige, glatte Cauchyhyperfläche,  $\mathbf{n} \in \Gamma^\infty(\Sigma, TM)$  das zeitartige und zukunftsgerichtete Normalenvektorfeld längs  $\Sigma$ ,  $(E, M, \pi)$  ein Vektorbündel,  $P$  ein normal hyperbolischer Operator, der auf den Schnitten von  $E$  operiert und  $\nabla$  der  $P$ -kompatible Zusammenhang auf  $E$ . Für jedes Tripel  $u_o, u_1 \in \Gamma_c^\infty(\Sigma, E)$  und  $f \in \Gamma_c^\infty(M, E)$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $u \in \Gamma^\infty(M, E)$ , das

$$\begin{aligned} Pu &= f, \\ u \Big|_{\Sigma} &= u_o, \\ \nabla_{\mathbf{n}} u \Big|_{\Sigma} &= u_1 \end{aligned}$$

erfüllt. Darüber hinaus gilt  $\text{supp}(u) \subset J^M(K)$ , wobei  $K$  gegeben wird durch  $K = \text{supp}(u_o) \cup \text{supp}(u_1) \cup \text{supp}(f)$ .

### C.5.3 Satz (Abhängigkeit von den Anfangsdaten)

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit,  $\Sigma \subset M$  eine raumartige, glatte Cauchyhyperfläche,  $\mathbf{n} \in \Gamma^\infty(\Sigma, TM)$  das zeitartige und zukunftsgerichtete

Normalenvektorfeld längs  $\Sigma$ ,  $(E, M, \pi)$  ein Vektorbündel,  $P$  ein normal hyperbolischer Operator, der auf den Schnitten von  $E$  operiert und  $\nabla$  der  $P$ -kompatible Zusammenhang auf  $E$ . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma_c^\infty(M, E) \oplus \Gamma_c^\infty(\Sigma, E) \oplus \Gamma_c^\infty(\Sigma, E) &\longrightarrow \Gamma^\infty(M, E) \\ (f, u_0, u_1) &\longmapsto u \end{aligned}$$

auf die eindeutige Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} Pu &= f, \\ u|_\Sigma &= u_0, \\ \nabla_{\mathbf{n}} u|_\Sigma &= u_1 \end{aligned}$$

linear und stetig.

#### C.5.4 Satz (Trägereigenschaft der Lösung)

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit,  $\Sigma \subset M$  eine raumartige, glatte Cauchyhyperfläche,  $\mathbf{n} \in \Gamma^\infty(\Sigma, TM)$  das zeitartige und zukunftsgerichtete Normalenvektorfeld längs  $\Sigma$ ,  $(E, M, \pi)$  ein Vektorbündel,  $P$  ein normal hyperbolischer Operator, der auf den Schnitten von  $E$  operiert und  $\nabla$  der  $P$ -kompatible Zusammenhang auf  $E$ . Ist  $u \in \Gamma^\infty(M, E)$  Lösung zu den Cauchydaten  $u_0, u_1 \in \Gamma_c^\infty(\Sigma, E)$  und  $f \in \Gamma_c^\infty(M, E)$  von

$$\begin{aligned} Pu &= f, \\ u|_\Sigma &= u_0, \\ \nabla_{\mathbf{n}} u|_\Sigma &= u_1, \end{aligned}$$

dann hat  $u$  auf jeder weiteren Cauchyhyperfläche kompakten Träger.

**Beweis:**  $\text{supp}(u) \subset J^M(K) = J_+^M(K) \cup J_-^M(K)$  mit  $K = \text{supp}(u_0) \cup \text{supp}(u_1) \cup \text{supp}(f)$ . Da endliche Vereinigungen kompakter Mengen kompakt sind, ist  $K$  kompakt. Sei  $\Sigma'$  eine weitere Cauchyhyperfläche, dann ist  $J_\pm^M(K) \cap \Sigma'$  kompakt nach [BGP07, Cor.A.5.4]. Somit ist  $(J_+^M(K) \cap \Sigma') \cup (J_-^M(K) \cap \Sigma')$  als endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt.  $\text{supp}(u) \cap \Sigma'$  ist abgeschlossen, da  $\text{supp}(u)$  und  $\Sigma'$  abgeschlossen sind. Deswegen ist  $\text{supp}(u) \cap \Sigma'$  eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $J^M(K) \cap \Sigma'$  und daher selbst kompakt.  $\square$

### C.5.5 Satz (Greensche Operatoren)

Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Raumzeit und  $P$  ein normal hyperbolischer Operator, der auf den Schnitten eines Vektorbündels  $(E, M, \pi)$  operiert. Dann existiert für  $P$  genau ein eindeutig bestimmter avancierter Greenscher Operator  $G_+ : \Gamma_c^\infty(M, E) \rightarrow \Gamma_{sc}^\infty(M, E)$  und genau ein eindeutig bestimmter retardierter Greenscher Operator  $G_- : \Gamma_c^\infty(M, E) \rightarrow \Gamma_{sc}^\infty(M, E)$ , d.h.

$$(GO1) \quad P \circ G_\pm = id_{\Gamma_c^\infty(M, E)}.$$

$$(GO2) \quad G_\pm \circ P \Big|_{\Gamma_c^\infty(M, E)} = id_{\Gamma_c^\infty(M, E)}.$$

$$(GO3) \quad \text{supp}(G_\pm \varphi) \subset J_\pm^M(\text{supp}(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \Gamma_c^\infty(M, E).$$

$G_+$  und  $G_-$  lassen sich erweitern und zwar  $G_+$  auf Schnitte  $s$  mit vergangenheitskompakten Träger und auf solche Schnitte  $s'$ , sodaß  $f = G_+ s'$  die eindeutige Lösung von  $\square f = s'$  mit  $\text{supp}(f)$  vergangenheitskompakt ist.  $G_-$  läßt sich auf Schnitte  $s$  mit zukunfts-kompakten Träger und auf solche Schnitte  $s'$  erweitern, sodaß  $f = G_- s'$  die eindeutige Lösung von  $\square f = s'$  mit  $\text{supp}(f)$  zukunfts-kompakt ist. Man bildet auch den Operator  $G := G_+ - G_- : \Gamma_c^\infty(M, E) \rightarrow \Gamma_{sc}^\infty(M, E)$ , der die Eigenschaften

- $P \circ G = G \circ P \Big|_{\Gamma_c^\infty(M, E)} = 0$
- $\text{supp}(Gf) \subset J_+^M(\text{supp}(f)) \cup J_-^M(\text{supp}(f))$

hat. Dieser Operator, welchen man auch den Propagator nennt, bildet Schnitte aus  $\Gamma_c^\infty(M, E)$  auf Lösungen der homogenen Differentialgleichung  $Pu = 0$  ab. Der Index „sc“ soll „spacelike compact“ bedeuten, zu Deutsch „räumlich kompakt“, und andeuten, daß  $G_\pm s \Big|_\Sigma$  und  $Gs \Big|_\Sigma$  kompakten Träger auf jeder raumartigen, glatten Cauchyhyperfläche  $\Sigma$  für  $s \in \Gamma_c^\infty(E)$  haben. Siehe auch [BGP07, Not.3.4.5].

### C.5.6 Bemerkung

In [BGP07] wird eine andere Konvention der Metrik als hier verwendet, nämlich  $(-, +, +, +)$ . Aus diesem Grund kann man auf den Gedanken kommen, daß diese Aussagen auf unsere Konvention hin,  $(+, -, -, -)$ , modifiziert werden müssen. Wir wollen betonen, daß dies nicht der Fall ist, wie bereits im Abschnitt über den Wellenoperator angesprochen. An den entscheidenden Stellen, wo es zu einem Unterschied kommen könnte, z.B. in der Definition

normal hyperbolischer Operatoren, wurde bereits ein Minuszeichen hinzugefügt. Berechnet man also für einen nach [BGP07] normal hyperbolischen Operator die lokale Darstellung, so stimmt diese exakt mit derjenigen lokalen Darstellung überein, die man mit unserer Definition von normal hyperbolischen Operatoren und in unserer Konvention für die Metrik erhält. Mit einem global hyperbolischen Operator  $P$  meinen wir also genau dasselbe, was auch [BGP07] unter einem normal hyperbolischen Operator verstehen und deswegen können wir alle Sätze aus [BGP07] zu diesem Thema ohne Modifikationen verwenden!

## C.6 Wellengleichung von Differentialformen

An dieser Stelle folgen ein paar elementare Aussagen zur Lösungstheorie der Wellengleichung für Differentialformen. Zur Abkürzung definiert man:

$$\begin{aligned}\rho_0 &:= \iota^{pb} \ , \\ \rho_d &:= *^{-1} \iota^{pb} * d, \\ \rho_\delta &:= \iota^{pb} \delta, \\ \rho_n &:= *^{-1} \iota^{pb} * .\end{aligned}$$

Die Operatoren  $\rho_0, \rho_d, \rho_\delta, \rho_n$  sind linear und stetig und haben daher stetig formal Adjungierte  $\rho'_0, \rho'_d, \rho'_\delta, \rho'_n$ . Weiter sei  $\Sigma_\pm := J_\pm^M(\Sigma) \setminus \Sigma$ . Für die Gültigkeit der Aussagen aus diesem Abschnitt müssen wir keine Einschränkung an die Topologie von  $M$  vornehmen. Insbesondere können und dürfen die 1-te und die 2-te de Rham Kohomologiegruppe von  $M$ ,  $H_{dR}^1 M$  und  $H_{dR}^2 M$ , beliebig sein. Im Folgenden geben wir die Aussagen aus [Pfe09, Prop.II.1], [Pfe09, Prop.II.2], [Pfe09, Prop.II.4] und [Pfe09, Prop.II.5] wieder:

### C.6.1 Satz

Sei  $\omega \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$ , dann gelten

- (a)  $dG_\pm \omega = G_\pm d\omega$ .
- (b)  $\delta G_\pm \omega = G_\pm \delta\omega$ .
- (c)  $dG\omega = Gd\omega$  und  $\delta G\omega = G\delta\omega$ .

### C.6.2 Satz

Sei  $\omega \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$  Lösung von  $\square\omega = j$ ,  $j \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$  mit den Cauchydaten

$$\begin{aligned}\omega_0 &:= \rho_0\omega \in \Omega_p(\Sigma, \mathbb{C}), \\ \omega_d &:= \rho_d\omega \in \Omega_p(\Sigma, \mathbb{C}), \\ \omega_\delta &:= \rho_\delta\omega \in \Omega_{p-1}(\Sigma, \mathbb{C}), \\ \omega_n &:= \rho_n\omega \in \Omega_{p-1}(\Sigma, \mathbb{C}).\end{aligned}$$

Dann gilt für jedes  $\eta \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\int_M \omega \wedge *\eta &= \langle j, G_-\eta \rangle_{\Sigma_+} + \langle j, G_+\eta \rangle_{\Sigma_-} + \langle \omega_0, \rho_d G\eta \rangle_\Sigma + \langle \omega_\delta, \rho_n G\eta \rangle_\Sigma \\ &\quad - \langle \omega_d, \rho_0 G\eta \rangle_\Sigma - \langle \omega_n, \rho_\delta G\eta \rangle_\Sigma.\end{aligned}$$

### C.6.3 Satz (Existenz und Eindeutigkeit)

Seien  $(\omega_0, \omega_d, \omega_n, \omega_\delta) \in \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{(p-1)c}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{(p-1)c}(\Sigma, \mathbb{C})$  Cauchydaten, dann ist

$$\square\omega' = 0$$

mit diesen Cauchydaten eindeutig lösbar. Genauer ist

$$\omega' = -G\rho'_d\omega_0 - G\rho'_n\omega_\delta + G\rho'_\delta\omega_n + G\rho'_0\omega_d \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$$

die eindeutig bestimmte, glatte Lösung von  $\square\omega' = 0$  mit diesen Cauchydaten. Darüber hinaus hängt  $\omega'$  linear und stetig von den Cauchydaten ab.

Auf den ersten Blick sieht das so formulierte Cauchyproblem anders aus, als das in Satz C.5.2 formulierte. Dem ist aber nicht so, wie man lokal in einem beliebig gewählten, angepaßten Koordinatensystem (siehe Abschnitt C.4) nachrechnen kann. Bei einer solchen Rechnung stellt sich heraus, daß die Kenntnis von  $\omega_0, \omega_d, \omega_n, \omega_\delta$  völlig äquivalent zur Kenntnis von  $\omega|_\Sigma, \nabla_n\omega|_\Sigma$  ist. Da für das Cauchyproblem des Vektorpotentials als auch für das Cauchyproblem des Feldstärketensors nur zwei der vier angegebenen Cauchydaten  $\omega_0, \omega_d, \omega_n, \omega_\delta$  von Bedeutung sind, werden im Elektromagnetismus die Cauchydaten üblicherweise in dieser Form angegeben und nicht in der Form  $\omega|_\Sigma, \nabla_n\omega|_\Sigma$ .



### C.6.4 Folgerung (1:1 Korrespondenz)

Die Lösungen der Wellengleichung mit kompakten Anfangsdaten auf  $\Sigma$  sind in 1:1 Korrespondenz zur Menge der kompakt getragenen  $p$ -Formen bzgl. der Äquivalenzrelation

$$\omega \sim \omega' : \iff \exists \eta \in \ker(G) \text{ mit } \omega' = \omega + \eta.$$

**Beweis:** Ist  $\omega \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$ , so ist  $G\omega$  eine Lösung der Wellengleichung mit kompakten Cauchydaten auf  $\Sigma$ .

Injektivität: Seien  $\omega, \omega' \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$  mit  $G\omega - G\omega' = 0$ . Es folgt  $G(\omega - \omega') = 0$ , also  $\omega - \omega' \in \ker(G)$ .

Surjektivität: Sei  $\tilde{\omega} \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$  Lösung von  $\square\tilde{\omega} = 0$  zu den Cauchydaten  $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_d, \tilde{\omega}_n, \tilde{\omega}_\delta)$ . Nach Satz C.6.3 ist mit  $\omega := -\rho'_d\tilde{\omega}_0 - \rho'_n\tilde{\omega}_\delta + \rho'_\delta\tilde{\omega}_n + \rho'_0\tilde{\omega} \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$  eine kompakt getragene  $p$ -Form gefunden, so daß  $\tilde{\omega} = G\omega$  gilt.  $\square$

### C.6.5 Lemma (Kern des Propagators)

Die Elemente aus dem Kern von  $G$  sind genau von der Gestalt  $\square\omega$  für  $\omega \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$ , also

$$\ker(G) = \square\Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$$

**Beweis:** Sei  $\omega' \in \ker(G)$  eine kompakt getragene  $p$ -Form, dann gilt  $G_+\omega' = G_-\omega'$ . Definiere  $\omega := G_+\omega' = G_-\omega'$ , dann ist  $\omega \in \Omega_{pc}(M, \mathbb{C})$ , da nach Definition  $\text{supp}(\omega) \subset J_\pm^M(\text{supp}(\omega'))$  und damit  $\text{supp}(\omega) \subset J_+^M(\text{supp}(\omega')) \cap J_-^M(\text{supp}(\omega'))$  ist. Nach Satz C.5.5 gilt weiter  $\square\omega = \omega'$ .  $\square$

### C.6.6 Lemma (Geschlossene Lösungen)

Sei  $\omega \in \Omega_p(M, \mathbb{C})$  Lösung von  $\square\omega = 0$  mit Cauchydaten  $(\omega_0, \omega_d, \omega_\delta, \omega_n) \in \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{pc}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{(p-1)c}(\Sigma, \mathbb{C}) \times \Omega_{(p-1)c}(\Sigma, \mathbb{C})$ .

$$d\omega = 0 \iff d\omega_0 = 0, \omega_d = 0 \text{ und } d\omega_\delta = 0.$$

**Beweis:** „ $\implies$ “: Gelte  $d\omega = 0$ , dann folgt direkt  $\omega_d = 0$  und  $d\omega_0 = 0$ . Für die andere Gleichheit rechne nach

$$d\omega_\delta = d\iota^{pb}\delta\omega = \iota^{pb}d\delta\omega = -\iota^{pb}(\square + \delta d)\omega = 0.$$

„ $\Leftarrow$ “: Gelten  $d\omega_0 = 0$ ,  $\omega_d = 0$  und  $d\omega_\delta = 0$ . Nach Satz C.6.2 gilt für alle  $\eta \in \Omega_{(p+1)c}(M, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \int_M d\omega \wedge *\eta &= \langle \rho_0 d\omega, \rho_d G\eta \rangle_\Sigma + \langle \rho_\delta d\omega, \rho_n G\eta \rangle_\Sigma - \langle \rho_n d\omega, \rho_\delta G\eta \rangle_\Sigma \\ &= \langle d\rho_0 \omega, \rho_d G\eta \rangle_\Sigma - \langle d\rho_\delta \omega, \rho_n G\eta \rangle_\Sigma - \langle \rho_d \omega, \rho_\delta G\eta \rangle_\Sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt also  $d\omega \equiv 0$ . □

### C.6.7 Bemerkung

Alle bisher gemachten Aussagen gelten in derselben Weise auch für reellwertige Differentialformen. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Wellengleichung zu vorgegebenen Anfangsdaten auf  $\Sigma$  liefern reellwertige Cauchydaten auch reellwertige Lösungen und eine Lösung ist reellwertig genau dann, wenn die Cauchydaten schon reellwertig waren. Da sich jede komplexwertige Differentialform eindeutig in einen Real- und Imaginärteil zerlegen läßt, gilt zwischen dem Propagator  $G_{\mathbb{C}}$  der Wellengleichung für komplexwertige Formen und dem Propagator  $G_{\mathbb{R}}$  der Wellengleichung für reellwertige Formen die Relation

$$G_{\mathbb{C}}\omega = G_{\mathbb{R}}\omega_{\Re} + iG_{\mathbb{R}}\omega_{\Im}.$$

Außer in dieser Bemerkung werden wir aber nicht  $G_{\mathbb{C}}$  und  $G_{\mathbb{R}}$  durch eine strenge Notation voneinander unterscheiden und beide einfach mit  $G$  bezeichnen. Es ist dann aus dem Kontext zu schließen, welcher Propagator gemeint ist.

# Verwendete Literatur

- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Phys. Rev.*, 115(3):485–491, 1959.
- [AB61] Y. Aharonov and D. Bohm. Further Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Phys. Rev.*, 123(4):1511–1524, 1961.
- [AS80] A. Ashtekar and A. Sen. On the role of space-time topology in quantum phenomena: Superselection of charge and emergence of nontrivial vacua. *J. Math. Phys.*, 21(3):526–533, 1980.
- [Ban] V. Bangert. Differentialgeometrie I&II. Handschriftliche Vorlesungsskripte aus dem WS 08/09 und SS 09.
- [BEE96] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, and K.L. Easley. *Global Lorentzian Geometry*. Marcel Dekker, Inc., second edition, 1996.
- [BF06] R. Brunetti and K. Fredenhagen. *Towards a Background Independent Formulation of Perturbative Quantum Gravity*. arXiv:gr-qc/0603079v3, 2006.
- [BF09] C. Bär and K. Fredenhagen, editors. *Quantum Field Theory on Curved Spacetimes*. Springer Berlin, 2009.
- [BFV03] R. Brunetti, K. Fredenhagen, and R. Verch. The Generally Covariant Locality Principle - A New Paradigm for Local Quantum Field Theory. *Comm. Math. Phys.*, 237:31–68, 2003.
- [BGP07] C. Bär, N. Ginoux, and F. Pfäffle. *Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*. European Mathematical Society, 2007.
- [BHR04] E. Binz, R. Honegger, and A. Rieckers. Construction and uniqueness of the  $C^*$ -Weyl algebra over a general pre-symplectic space. *J. Math. Phys.*, 45(7):2885–2907, 2004.

- [BLT75] N.N. Bogolubov, A.A. Logunov, and I.T. Todorov. *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*. W.A.Benjamin, Inc., 1975.
- [Bon77] P.J.M. Bongaarts. Maxwell's equations in axiomatic quantum field theory. I.Field tensor and potentials. *J. Math. Phys.*, 18(7):1510–1516, 1977.
- [Bon82] P.J.M. Bongaarts. Maxwell's equations in axiomatic quantum field theory. I.Covariant and noncovariant gauges. *J. Math. Phys.*, 23(10):1881–1898, 1982.
- [BR02] O. Bratteli and D.W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, second edition, 2002. Frei erhältlich unter <http://folk.uio.no/bratteli/>.
- [BR05] R. Brunetti and G. Ruzzi. *Superselection Sectors and General Covariance. I*. arXiv:gr-qc/0511118v2, 2005.
- [BR08] R. Brunetti and G. Ruzzi. *Quantum charges and spacetime topology: The emergence of new superselection sectors*. arXiv:0801.3365v2 [math-ph], 2008.
- [BS59] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*. Interscience Publishers Ltd., London, 1959.
- [BS03] A.N. Bernal and M. Sanchez. On Smooth Cauchy Hypersurfaces and Geroch's Splitting Theorem. *Comm. Math. Phys.*, 243:461–470, 2003.
- [BS05] A.N. Bernal and M. Sanchez. Smoothness of Time Functions and the Metric Splitting of Globally Hyperbolic Spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 257:43–50, 2005.
- [BS06] A.N. Bernal and M. Sanchez. Further Results on the Smoothability of Cauchy Hypersurfaces and Cauchy Time Functions. *Lett. Math. Phys.*, 77:183–197, 2006.
- [BS07] A.N. Bernal and M. Sanchez. Globally hyperbolic spacetimes can be defined as 'causal' instead of 'strongly causal'. *Class. Quantum Grav.*, 24:745–749, 2007.
- [BT95] R. Bott and L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag New York Inc., 1995.

- [CF08] B. Chilian and K. Fredenhagen. *The time slice axiom in perturbative quantum field theory on globally hyperbolic spacetimes*. arXiv:0802.1642v3 [math-ph], 2008.
- [CGH77] A.L. Carey, J.M. Gaffney, and C.A. Hurst. A  $C^*$ -algebra formulation of the quantization of the electromagnetic field. *J. Math. Phys.*, 18(4):629–640, 1977.
- [Chi08] B. Chilian. *Das Zeitschichtaxiom in wechselwirkenden Quantenfeldtheorien auf global hyperbolischen Raumzeiten*. Diplomarbeit an der Universität Hamburg, 2008.
- [Cor98] A. Corichi. *Introduction to the Fock Quantization of the Maxwell Field*. arXiv:physics/9804018v1 [physics.ed-ph], 1998.
- [Dap] C. Dappiaggi. Tools of quantum field theory over curved backgrounds. Lecture notes, frei erhältlich unter [http://www.physik.uni-leipzig.de/~marecki/Combo2010/Lecture\\_notes\\_CD.pdf](http://www.physik.uni-leipzig.de/~marecki/Combo2010/Lecture_notes_CD.pdf).
- [DeW62] B. S. DeWitt. Quantum Theory without Electromagnetic Potentials. *Phys. Rev.*, 125(6):2189–2191, 1962.
- [Dim80] J. Dimock. Algebras of Local Observables on a Manifold. *Comm. Math. Phys.*, 77:219–228, 1980.
- [Dim92] J. Dimock. Quantized Electromagnetic Field on a Manifold. *Rev. Math. Phys.*, 4(2):223–233, 1992.
- [ES49] W. Ehrenberg and R.E. Siday. The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics. *Proc. Phys. Soc. B*, 62:8–21, 1949.
- [Fey06] Feynman, Leighton and Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, volume I-III. Pearson Addison Wesley, the definitive edition, 2006.
- [FP03] C.J. Fewster and M.J. Pfenning. A quantum weak energy inequality for spin-one fields in curved space-time. *J. Math. Phys.*, 44(10):4480–4512, 2003.
- [Fra01] T. Frankel. *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, 2001.

- [Fre] K. Fredenhagen. Superselection sectors. Skript zur gleichnamigen Vorlesung im WS 94/95, frei erhältlich unter [www.desy.de/uni-th/lqp/psfiles/superselect.ps.gz](http://www.desy.de/uni-th/lqp/psfiles/superselect.ps.gz).
- [Fre89] K. Fredenhagen. Generalizations of the theory of superselection sectors. In D. Kastler, editor, *The Algebraic Theory of Superselection Sectors. Introduction and Recent Results*, pages 379–387. Konf. Palermo, 1989.
- [Fur95] E.P. Furlani. Quantization of the electromagnetic field on static space-times. *J. Math. Phys.*, 36(3):1063–1079, 1995.
- [Fur99] E.P. Furlani. Quantization of massive vector fields in curved space-time. *J. Math. Phys.*, 40(6):2611–2626, 1999.
- [Ger70] R. Geroch. Domain of Dependence. *J. Math. Phys.*, 11(2):437–449, 1970.
- [GH79] R. Geroch and G.T. Horowitz. Global structure of spacetimes. In S.W. Hawking and W. Israel, editors, *General Relativity. An Einstein centenary survey*, pages 212–293. Cambridge University Press, reprinted version, 1979.
- [GH85] H.B.G.S. Grundling and C.A. Hurst. Algebraic Quantization of Systems with a Gauge Degeneracy. *Comm. Math. Phys.*, 98:369–390, 1985.
- [Haa96] R. Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, second revised and enlarged edition, 1996.
- [Hac10] T.-P. Hack. *On the Backreaction of Scalar and Spinor Quantum Fields in Curved Spacetimes - From the Basic Foundations to Cosmological Applications*. arXiv:1008.1776v1 [gr-qc], 2010.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. Frei erhältlich unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>.
- [HK64] R. Haag and D. Kastler. An Algebraic Approach to Quantum Field Theory. *J. Math. Phys.*, 5(7):848–861, 1964.
- [Hol08] S. Hollands. *Renormalized Quantum Yang-Mills Fields in Curved Spacetime*. arXiv:0705.3340v3 [gr-qc], 2008.

- [HS62] R. Haag and B. Schroer. Postulates of Quantum Field Theory. *J. Math. Phys.*, 3(2):248–256, 1962.
- [JL] W. Junker and F. Lledó. *The quantum electromagnetic field on curved spacetimes: Construction of gauge-invariant Hadamard states*. Leider nie veröffentlicht.
- [Kö1] M. Küskü. *The Free Maxwell Field in Curved Spacetime*. Diplomarbeit an der Universität Hamburg, 2001.
- [Lee03] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [Lic61] A. Lichnerowicz. Propagateurs et commutateurs en relativite generale. *Publications IHES*, (10), 1961.
- [LL] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band I-IV*. Verlag Harri Deutsch.
- [LW90] J. Lee and R.M. Wald. Local symmetries and constraints. *J. Math. Phys.*, 31(3):725–743, 1990.
- [MSTV73] J. Manuceau, M. Sirugue, D. Testard, and A. Verbeure. The Smallest  $C^*$ -Algebra for Canonical Commutations Realtions. *Comm. Math. Phys.*, 32:231–243, 1973.
- [MW57] C.W. Misner and J.A. Wheeler. Classical Physics as Geometry. *Ann. Phys.*, 2:525–603, 1957.
- [Nab97] G.L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations*. Springer-Verlag New York, Inc, 1997.
- [O’N83] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry: with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [Pen72] R. Penrose. *Techniques of Differential Topology in Relativity*. Number 7 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1972.
- [Pfe09] M. J. Pfenning. *Quantization of the Maxwell field in curved spacetimes of arbitrary dimension*. arXiv:0902.4887v2 [math-ph], 2009.

- [RF93] H. Römer and M. Forger. *Elementare Feldtheorie*. Digitale Reproduktion der Ausgabe Weinheim [u.a.] : VCH, 1993. Frei erhältlich unter <http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/405/>.
- [Soea] W. Soergel. Analysis. Algebra. Skripte, frei erhältlich unter <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/>.
- [Soeb] W. Soergel. Topologie. Skript, frei erhältlich unter <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/>.
- [Sor77] R. Sorkin. On the relation between charge and topology. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 10(5):717–725, 1977.
- [Sor79] R. Sorkin. The quantum electromagnetic field in multiply connected space. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 12(3):403–421, 1979.
- [Sta09] J. Stanja. *Lokal Thermales Gleichgewicht des freien quantisierten elektromagnetischen Feldes auf gekrümmten Raumzeiten*. Diplomarbeit an der Universität Leipzig, 2009.
- [SW74] F. Strocchi and A.S. Wightman. Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory. *J. Math. Phys.*, 15(12):2198–2224, 1974.
- [SZ94] R. Stöcker and H. Zieschang. *Algebraische Topologie*. B.G. Teubner Stuttgart, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage, 1994.
- [Wal] S. Waldmann. Geometric wave equations. Lecture Notes, Version vom 4. Februar 2010, frei erhältlich unter <http://omnibus.uni-freiburg.de/~sw12/Lectures/Wellen0809/main.pdf>.
- [Wal94] R. M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. The University of Chicago Press, 1994.
- [Wal06] R. M. Wald. *The History and Present Status of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. arXiv:gr-qc/0608018v1, 2006.
- [Wal09] R. M. Wald. *The Formulation of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. arXiv:0907.0416v1 [gr-qc], 2009.
- [War83] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer-Verlag, 1983.



# Danksagung

(Bis auf Permutation der Reihenfolge)

Herzlichst möchte ich mich bei Herrn Prof. K. Fredenhagen bedanken, nicht nur für die herausfordernde Aufgabenstellung meiner Diplomarbeit und für seine Betreuung, sondern auch (und gerade dafür) mir die Gelegenheit gegeben zu haben, die wundervolle Theorie der AQFT kennenzulernen und mit dieser Arbeit einen Teil beizutragen.

Unendlicher Dank gilt meinen Eltern, Mama und Papa, die mir dies alles durch ihre Unterstützung und ihr Vertrauen erst möglich gemacht haben. Weiter möchte ich meiner ganzen Familie für ihre Unterstützung danken, meiner Schwester Laura, meinen Großeltern Oma Viktoria, Oma Ilse, Opa Heinz und Opa Hans, meiner Patentante Gerlinde, meinen Onkeln Klaus und Wolfgang und meinen Cousins Anika, Katrin und Simone. Auch danke ich Pension Tiffy & Sunny, meinem Bruder Sebastian und seiner Freundin Nadine für die freundliche Aufnahme in ihrem Heim in der Zeit vor Hamburg und am Ende, und für die Gastfreundschaft, die ich dort erfahren habe. Nicht vergessen möchte ich auch unseren Hund Finn, der mich und meinen Bruder so vortrefflich ersetzt und nie meine Unterlagen gefressen hat.

Ein großer Teil meines Dankes gebührt meiner AQFT Familie Claudio Dappiaggi, Jan Schlemmer, Thomas Hack, Kai Keller, Falk Lindner, Andreas Degner, Katarzyna Rejzner, Jan Weise, Mathias Makedonski, Sebastian Schubert und Daniel Siemssen. Die Zeit in Hamburg war einfach toll, ich danke euch allen. Besonderer Dank gilt vor allem Claudio Dappiaggi und Jan Schlemmer für ihre engagierte Hilfe und die unzähligen lehrreichen Diskussionen. Ohne euch hätte ich diese Arbeit niemals auf die Beine stellen können und würde immer noch über das Cauchyproblem rätseln! Besonders danken möchte ich auch Falk Lindner und Andreas Degner für die vielen lustigen Abende mit Speis und Trank. Bedanken will ich mich bei den Kollegen meines Büros, Jan Weise, Andrey Saveliev und Yasar Goedecke, für die tolle Büroatmosphäre und die Videoabende am DESY. Besonders möchte ich Andrey Saveliev für die Erstellung der Bilder in dieser Arbeit danken

Meinen Freunden Wadim Streich und Raphael Franken danke ich für das gemeinsame Aufwachsen, die gemeinsame Schulzeit und dafür, daß alles beim Alten ist, wenn wir uns sehen. Meinem Physiklehrer Herrn Danne danke ich für seinen hervorragenden Unterricht, der erst mein Interesse an Physik geweckt hat. Meiner Freundin Nicola Heidrich danke ich für ihre Unterstützung in allen Lebenslagen, nicht zuletzt bei meiner Entscheidung nach Hamburg zu gehen. Meinen Freiburger Freunden René Salhab, Per Liebermann, Max Hanusch und Anton Prokhorov danke ich für die tolle Studienzeit, die wir zusammen verbracht habe.

Herrn Jürgen Reuter danke ich sehr, daß er sich ohne zu zaudern dazu bereit erklärte, mein Freiburger Betreuer zu sein, Herrn Prof. van der Bij danke ich, diese Aufgabe übernommen zu haben. Zum Schluß möchte ich auch gerne Herrn Prof. W. Soergel danken, der immer ein offenes Ohr für meine Fragen hatte und mir sehr bei der Einarbeitung in die singuläre Homologie half.

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Aussagen und Resultate, die aus anderen Arbeiten und Veröffentlichungen stammen, sind als solche kenntlich gemacht. Des Weiteren bin ich damit einverstanden, diese Arbeit zu veröffentlichen.

Hamburg, den

---

Benjamin Lang