II. Institut für theoretische Physik - Fachbereich Physik - Universität Hamburg

Allgemein kovariante Quantenfelder höheren Spins

Generally covariant quantum fields of higher spin

Diplomarbeit
vorgelegt von Mathias Makedonski
Hamburg, den 11. Mai 2011
betreut durch Prof. Dr. Klaus Fredenhagen

1. Gutachter: Prof. Dr. Klaus Fredenhagen
2. Gutachter: Prof. Dr. Wilfried Buchmüller

Zusammenfassung

In dieser Arbeit studieren wir Möglichkeiten, die klassischen und quantisierten Theorien höherer fermionischer Felder vom flachen Raum auf global hyperbolische Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern.

Dazu werden zunächst die bekannten Ansätze rekapituliert und deren Probleme untersucht.

Neben weiteren Ansätzen zur Quantisierung eines durch die Buchdahl-Gleichungen beschriebenen Systems, können wir eine Klasse von Modifikationen des Rarita-Schwinger-Operators, deren Elemente in der Supergravitation angewendet werden, als Kandidaten für eine allgemein kovariante Quantenfeldtheorie ausschließen.

Abstract

In the work at hand we investigate possibilities to generalize the classical as well as the quantized theories for fermionic fields of higher spin to globally hyperbolic manifolds.

We revisit the known approaches and inspect their failure.

As a result of our investigation we can exclude further constructions for systems whose dynamics are governed by Buchdahl's equations. In addition we can exclude a class of modified Rarita-Schwinger-operators, whose elements are used in supergravity, as possible candidates for a generally covariant quantum field theory of higher spin.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung / Abstract i

1. Einleitung 1

I. Einführung 7

2. Spin in der Quantentheorie 9
- 2.1. Zur Darstellungstheorie der $\mathcal{P}^c$ . . . 11
  - 2.1.1. Darstellungen der Translationsgruppe . . . 11
  - 2.1.2. Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$ . . . 12

3. Formalismen zur Beschreibung von Systemen mit Spin 15
- 3.1. Der 2-Spinor Formalismus . . . 15
- 3.2. Der Dirac-Spinor Formalismus . . . 17

4. Bewegungsgleichungen für Systeme höheren Spins 19
- 4.1. Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen . . . 19
  - 4.1.1. Äquivalenz der Gleichungen für festes S . . . 19
- 4.2. Rarita-Schwinger-Gleichungen . . . 20
  - 4.2.1. Die Rarita-Schwinger-Gleichungen im 2-Spinor-Formalismus . . . 21

II. Systeme höheren Spins auf gekrümmten Raumzeiten 23

5. Spin auf global hyperbolischen Raumzeiten 25
- 5.1. Zu Spinorfeldern auf gekrümmten Raumzeiten. . . . 27
- 5.2. Inkonsistenz der Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen auf allgemeinen Raumzeiten 28
- 5.3. Buchdahl-Gleichungen . . . 29

6. Ansätze zur Quantisierung 37
- 6.1. Die Quantisierung des Dirac-Feldes . . . 37
- 6.2. Lagrange-Formalismus für die Buchdahl-Gleichungen . . . 40
- 6.3. Konstruktion eines Skalarproduktes . . . 43
- 6.4. Konstruktion eines erhaltenen Rarita-Schwinger-Stromes . . . 47
  - 6.4.1. Motivation . . . 47

6.4.2. Variationen des Rarita-Schwinger-Skalarproduktes 49
6.4.3. deSitter-Variante 51
6.5. Modifizierte Rarita-Schwinger-Operatoren 54

III. Zusammenfassung und Ausblick **63**

A. Mathematische Ergänzungen **67**
A.1. Clifford Algebra 67
A.2. Differentialgeometrie 69
A.3. Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten 73
A.4. Krümmungsspinoren 74

Literaturverzeichnis **77**

1. Einleitung

Higher Spin. *It is tempting to apply here the familiar phrase:"we leave this problem as an exercise to the reader". But let us add a few remarks.*

- Prof. Dr. Rudolf Haag (1996, S. 34)

Auf flachen Raumzeiten lassen sich freie Quantenfeldtheorien beliebigen Spins ohne nennenswerte Komplikationen definieren, sodass sich Autoren zu Aussagen wie der obigen hinreißen lassen. Im gekrümmten Fall hingegen treten Hindernisse auf, die sich nicht ohne weiteres umschiffen lassen.

Trotz der fehlenden experimentellen Bestätigung elementarer Systeme höheren Spins besteht aus physikalischer Sicht ein Interesse an eben solchen, denn es existieren Theorien die deren Existenz postulieren. Dazu zählen supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells, siehe z.B. Martin (2008). Das in einigen Supergravitationstheorien als Spin-$\frac{3}{2}$-Feld auftretende Gravitino – der supersymmetrische Partner des Gravitons, des Quantenfeldes der Quantengravitation – ist, ungeachtet der mit diesen Theorien verbundenen sonstigen Probleme, ein besonders beachtenswertes Beispiel. Das durch gebrochene Supersymmetrie massive Feld ist als leichtestes supersymmetrisches und damit stabiles System ein guter Kandidat für dunkle Materie. Damit besteht auch eine kosmologische Relevanz der hier untersuchten Fragestellungen. Da sich die Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten als in diesem Bereich anwendbar erwiesen hat,vgl. z.B. Hack (2010), sind auch die hier verwendeten Methoden der Interessenlage angepasst und es wird sich zeigen, dass sie sich auf phänomenologisch relevante Beispiele anwenden lassen.

Kommentar zur Notation Aufgrund der mannigfaltigen Indizierungen in dieser Arbeit, soll hier ein kurzer Hinweis zur schnelleren Orientierung gegeben werden. In den entsprechenden Abschnitten werden die verwendeten Konventionen dann detailliert beschrieben.

- Bis auf kleine lateinische Buchstaben sind alle Indizes als abstrakte Indizes zu verstehen, wobei auch für diese die Summenkonvention verwendet wird.
- Lateinische Großbuchstaben werden verwendet, um Spinorkomponenten zu indizieren.
- kleine griechische Indizes indizieren Lorentz-(Ko-)Vektoren.

- Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\underline{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Während die von Dirac (1936) vorgeschlagenen und meist als Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen bezeichneten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{X}}{}^{D} \varphi_{DA_1 \ldots A_n \dot{X}_1 \ldots \dot{X}_k} + \mu \chi_{A_1 \ldots A_n \dot{X} \dot{X}_1 \ldots \dot{X}_n} &= 0, \\ \partial^{\dot{X}}{}_{D} \chi_{A_1 \ldots A_n \dot{X} \dot{X}_1 \ldots \dot{X}_k} - \nu \varphi_{DA_1 \ldots A_n \dot{X}_1 \ldots \dot{X}_k} &= 0, \end{aligned}$$

für Systeme beliebigen Spins auf flachen Raumzeiten vollständig zufriedenstellende Theorien liefern, zeigte sich relativ schnell, dass die Gleichungen auf gekrümmten Raumzeiten Probleme aufwerfen. Nachdem zunächst Fierz (1939) die Äquivalenz der Gleichungen zu einem festen Spin zeigte, untersuchten Fierz und Pauli (1939) die Kopplung der Gleichungen an ein elektromagnetisches Feld. Im Rahmen dieser Untersuchung stellte sich heraus, dass minimale Kopplung für Spins größer 1 zu inkonsistenten Gleichungen führt.

Um den von van der Waerden entwickelten 2-Spinor-Formalismus vgl. Penrose und Rindler (1984a,b) zu umgehen, der für die Behandlung der Gleichungen in der von Dirac beschriebenen Weise notwendig ist, schlugen Rarita und Schwinger (1941) vor, zur Beschreibung fermionischer Felder das Tensorprodukt aus einem Spin-$\frac{1}{2}$-Feld und einer entsprechenden Anzahl von Spin-1-Vektorfeldern zu verwenden. Zusätzlich muss in diesem Fall eine algebraische Bedingung gefordert werden um die Freiheitsgrade derart zu reduzieren, dass die Felder unter einer irreduziblen Darstellungen transformieren und im Sinne Wigners freien elementaren Systemen entsprechen. In der üblichen Notation lauten die Rarita-Schwinger-Gleichungen und die Irreduzibilitätsbedingung

$$\begin{aligned} (-i\partial\!\!\!/ - m)\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} &= 0, \\ \gamma^{\alpha} \varphi_{\alpha \alpha_2 \ldots \alpha_k} &= 0. \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Untersuchungen von Velo und Zwanziger (1969), dass die Gleichungen unter minimaler Kopplung inkonsistent werden beziehungsweise zu akausalem Verhalten der Beschriebenen Systeme führen, ergänzt sich so mit den Resultaten von Fierz und Pauli und wird in der Literatur häufig als Velo-Zwanziger-Phänomen bezeichnet.

Ein analoges Problem der Inkonsistenz der Bewegungsgleichung höherer Spin-Systeme tritt bei der Kopplung an ein Gravitationsfeld auf. Für diese Arbeit, die sich im Rahmen der Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten mit der Konstrukion von Theorien zu höherem Spin beschäftigt, ist dieses von fundamentaler Bedeutung. Die Konsistenzbedingung an Lösungen der Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen auf einer gekrümmten Raumzeit fordern das Verschwinden spezieller Kontraktionen der Felder mit Krümmungsgrößen.

Diese Bedingungen sind nur für einige Spezialfälle (Spin ≤ 1 und Einstein-Mannigfaltigkeiten) zu erfüllen.

Für den allgemeineren Fall ist also eine Modifikation der Bewegungsgleichungen notwendig.

Eine solche liefert für den Spin-$\frac{3}{2}$-Fall die *einfache Supergravitation* (van Nieuwenhuizen, 1981) durch die Einführung einer Selbstwechselwirkung.

Hier stößt man jedoch an anderer Stelle wieder auf die selben Hindernisse, denn der Versuch, eine derartige Theorie auf gekrümmten Raumzeiten – wie den in der Kosmologie verwendeten Friedmann-Robertson-Walker-Raumzeiten – störungstheoretisch zu quantisieren verlangt eine konsistente klassische, sowie quantisierte Theorie des freien Spin-$\frac{3}{2}$-Feldes.

Weitere Bewegungsgleichungen für freie Theorien höherer fermionischer Felder unter Kopplung an einen gravitativen Hintergrund wurden eingehend von Buchdahl (1958, 1962, 1982a,b, 1984) studiert. Die als Buchdahl-Gleichungen bekannte, auf gekrümmten Raumzeiten konsistente Variante einer der Dirac-Fierz-Pauli Gleichungen ist

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\dot{X}A}\psi^{AA_1\dots A_{s-1}} = \mu\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1\dots A_{s-1}},\\
&\nabla^{A\dot{X}}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1\dots A_{s-1}} - \frac{(s-1)(s-2)}{s\mu}\epsilon^{A(A_1|}\Psi^{PQD|A_2|}\varphi_{PQD}{}^{|A_3\dots A_{s-1})} = \nu\psi^{AA_1\dots A_{s-1}}.
\end{aligned}$$

Wünsch (1985) gelang es zu zeigen, dass sich diese Gleichungen eleganter als

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\dot{X}A}\psi^{AA_1\dots A_{s-1}} = \mu\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1\dots A_{s-1}},\\
&\nabla^{(A|\dot{X}}\varphi_{\dot{X}}{}^{|A_1\dots A_{s-1})} = \nu\psi^{AA_1\dots A_{s-1}}
\end{aligned} \tag{W}$$

schreiben lassen. Im Vergleich mit den minimal gekoppelten Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen wird deren Inkonsistenz besonders deutlich. Für sie ist nicht gewährleistet, dass eine Lösung die korrekten Symmetrieeigenschaften besitzt, also unter der entsprechenden irreduziblen Darstellung der Symmetriegruppe transformiert.

Obwohl es Illge (1993) gelang, eine Lagrange-Dichte anzugeben, ist es bisher nicht gelungen auf Grundlage der Buchdahlgleichungen eine Quantenfeldtheorie für höhere Spinorfelder auf gekrümmten Raumzeiten zu definieren.

Die Verallgemeinerung der Quantisierung nach Dimock (1982),der die Observablenalgebra für Spin-$\frac{1}{2}$-Felder aus den klassischen Lösungen den Bewegungsgleichung konstruiert hat, liefert einen möglichen Ansatz. Dieser scheitern jedoch an der Konstruktion eines von der Cauchyfläche unabhängigen Skalarproduktes auf den klassischen Lösungen. Anders ausgedrückt gelingt es nicht, einen kovariant erhaltenen Strom aus diesen zu erzeugen.

Für das von Mühlhoff (2007) gefundene Skalarprodukt ist die Unabhängigkeit von der Cauchyfläche nicht geklärt. Die explizite Form gibt jedoch keinen Anlass, die Unabhängigkeit als plausibel zu erachten.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir, inspiriert durch die klassische Äquivalenz der Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen weitere Kandidaten für erhaltene Ströme für Spin-$\frac{3}{2}$-Felder.

Dabei ist es das Ziel, diese derart zu wählen, dass die Einschränkung auf flache Raumzeiten einen zum Rarita-Schwinger-Fall äquivalenten Strom liefert. Auf topologisch trivialen Raumzeiten ließe sich dann mittels eines Theorems zur Deformation von Fulling et al. (1981) die Positivität auf den Lösungen beweisen.

Es zeigt sich, dass auch die von uns untersuchten Kandidaten derartiger Ströme für Lösungen der Gleichung (W) nicht kovariant erhalten sind.

Auf der Suche nach konsistentem Bewegungsgleichungenfür weitere irreduzible Darstellungen, fand Buchdahl (1982b) für die Rarita-Schwinger-Darstellung zum Spin $\frac{3}{2}$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(-i\nabla\!\!\!/ - m\right)\Psi^\alpha + \left(-2i\nabla^\alpha - i\gamma^\alpha\nabla\!\!\!/ + 6m\gamma^\alpha\right)\frac{\tilde{R}_{\mu\nu}\gamma^\mu\Psi^\nu}{12m^2+R},\\
0 &= \gamma_\alpha\Psi^\alpha.
\end{aligned}
$$

Damit stehen für alle irreduziblen Spin-$\frac{3}{2}$-Darstellungen konsistente Operatoren zur Verfügung.

Zuletzt zeigten Bär und Ginoux (2011), dass das Hauptsymbol formal selbstadjungierter Operatoren von definitem Typ, ein Skalarprodukt auf den klassischen Lösungen der entsprechenden Bewegungsgleichung induziert.

Sie untersuchen weiterhin eine andere Variante des Rarita-Schwinger Operators. Dieser ist durch die Projektion des Tensorproduktes des Dirac-Operators mit dem Einsoperator auf dem entsprechenden Tensorbündel auf den invarianten Unterraum zum höchsten Spin der reduziblen Darstellung gegeben.

Im Rahmen dieses Beispiels führen sie aus, dass formal selbstadjungierte Operatoren, deren charakteristische Mannigfaltigkeit genau den lichtartigen Schnitten im Tangentialbündel der Raumzeit entspricht, ein wohldefiniertes Cauchyproblem und die Lösungen der entsprechenden Bewegungsgleichung somit ein kausales Ausbreitungsverhalten besitzen.

So beweisen sie, dass das Cauchyproblem für den Operator wohldefiniert ist und das er bezüglich der verwendeten Paarung selbstadjungiert ist. Jedoch beweisen sie auch, dass der Operator nicht von definitem Typ ist. Daraus folgt zunächst nicht, dass der aus dem Hauptsymbol konstruierte Strom auf den Lösungen nicht positiv ist, allerdings lässt sich zeigen, dass dieses auf flachen Raumzeiten der Fall ist (Hack, 2011). Somit lässt sich mit diesem Operator schon im flachen Fall keine Quantenfeldtheorie definieren.

Diesen Argumentationen folgend, untersuchen wir den von Buchdahl modifizierten Rarita-Schwinger-Operator und können zeigen, dass dieser, bezüglich der durch die Lorentzmetrik induzierten Paarung des Spinor-Bündels und seines komplex Konjugierten, formal selbstadjungiert ist. Allerdings zeigt sich bei der Untersuchung des Hauptsymbols, dass aus der Forderung an die charakteristische Mannigfaltigkeit nicht im Allgemeinen erfüllbare Bedingungen folgen.

Schließlich betrachten wir eine Menge von Operatoren, welche die im Rahmen der Supergravitation für Spin-$\frac{3}{2}$-Gravitinos von Kallosh et al. (2000) hergeleitete Bewegungsgleichung für den Fall einer konstanten Gravitinomasse enthalten. Dabei betrachten wir zunächst das reduzible Rarita-Schwinger-Bündel und reduzieren die Freiheitsgrade durch eine algebraische Bedingung an die Felder, die die Konsistenz der Gleichungen gewährleistet. Es zeigt sich, dass diese Bedingungen im Falle einer flachen Raumzeit gerade die Irreduzibilitätsbedingung reproduziert und somit den wohlbekannten Rarita-Schwinger-Operator liefert.

Wir können zeigen, dass Bewegungsgleichungen der Gestalt

$$(-i\nabla\!\!\!/ - m)\Psi^\alpha + (ai\nabla^\alpha + bm\gamma^\alpha)\,\Psi\!\!\!/ + ci\gamma^\alpha\nabla_\mu\Psi^\mu = 0$$

mit $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$, deren Konsistenz durch eine algebraische Gleichung gewährleistet wird, kein wohldefiniertes Cauchyproblem besitzen, da die charakteristische Mannigfaltigkeit nicht den lichtartigen Vektoren entspricht.

Kallosh et al. (2000) diskutieren das potentiell akausale Propagationsverhalten der Lösungen und finden, dass unter den Voraussetzungen, dass sowohl die Masse des Gravitinos als auch die Hintergrundmetrik direkt und ausschließlich von einem skalaren, räumlich homogenen, Bestandteil des supersymmetrischen Feldinhalts abhängen, eine akausale Propagation ausgeschlossen werden kann.

Die vorliegende Arbeit besteht aus drei Teilen. Der erste Teil bietet eine Einführung in die Beschreibung von Systemen mit Spin und die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendeten Formalismen. Darauf folgt eine ausführliche Diskussion der Bewegungsgleichungen für höhere Spinorfelder auf dem Minkowskiraum.

Der zweite Teil der Arbeit beginnt mit einer Zusammenfassung der zur Verallgemeinerung von Spinorfeldern auf gekrümmte Raumzeiten notwendigen Konzepte und deren Implikationen. Daran schließt eine Ausführung der angesprochenen Konsistenzprobleme der Bewegungsgleichungen auf gekrümmten Raumzeiten und eine Diskussion der Buchdahlgleichungen. Diese entspricht in weiten Teilen dem Abschnitt in (Mühlhoff, 2007) zu diesem Aspekt.

Es folgt der zentrale Abschnitt, in dem sowohl die bereits umrissenen Ansätze zur Quantisierung und ihre Probleme gezeigt werden, als auch die detailierten Argumentationen zu den schon genannten Ergebniss geliefert werden.

Die eigentliche Arbeit schließt mit dem dritten und letzten Teil, der noch einmal die Ergebnisse zusammenfasst und einen Ausblick auf weitere Möglichkeiten gibt, Systeme höheren Spins auf auf gekrümmten Raumzeiten zu untersuchen.

Einige unter Umständen nicht geläufige Definitionen sind im Anhang zusammengestellt.

Teil I.

Einführung

2. Spin in der Quantentheorie[1]

Der Spin ist eine quantenmechanische Eigenschaft physikalischer Systeme, deren Beschreibung sich auf natürliche Weise ergibt, sobald man den Versuch unternimmt, die Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie,

- die Propagationsgeschwindigkeit von Informationen ist beschränkt durch eine Konstante c,[2]
- physikalische Systeme, die sich nur durch eine gleichförmige Relativbewegung unterscheiden, haben identische Eigenschaften,

in die Quantenmechanik zu integrieren.

Das erste Prinzip ist bestimmend für die kausale Struktur der Raumzeit. Betrachtet man einen Punkt $x = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ der Raumzeit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, so zerfällt diese in einen Bereich, der kausal mit dem Punkt verbunden ist und sein Komplement. Den kausal mit dem Punkt verbundenen Bereich bezeichnet man als seinen Lichtkegel $J(x) = J_-(x) \cup J_+(x)$. Der Vorwärts-/Rückwärtslichtkegel $J_\pm(x)$ ist der Teil von $J(x)$, der in der Zukunft bzw. der Vergangenheit von x liegt.

Diese Struktur lässt sich durch die Einführung einer indefiniten Bilinearform η beschreiben.

Definition I - 1 (Minkowskiraum)**.** Das Paar $(\mathbb{R}^4, \eta)$, mit $(\eta_{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$ heißt *Minkowskiraum* $\mathbb{M}$ und η nennt man *Minkowskimetrik*.

Die Bereiche des Lichtkegels lassen sich dann folgendermaßen charakterisieren:

$$J_\pm(x) = \left\{ y \in \mathbb{M} \mid \eta(x-y, x-y) > 0, \left(x^0 - y^0\right) \gtrless 0 \right\}.$$

Den Rand des Kegels

$$\partial J(x) = \left\{ y \in \mathbb{M} \mid \eta(x-y, x-y) > 0, \left(x^0 - y^0\right) = 0 \right\}$$

bilden die Punkte, die mit x durch lichtartige Vektoren verbunden sind.

Das zweite Prinzip ist in obiger Beschreibung bereits enthalten, da die Symmetriegruppe $\mathcal{P}$ der Minkowskimetrik Transformationen zwischen gleichförmig bewegten Koordinatensystemen beinhaltet.

[1] Die Beschreibung in diesem Abschnitt entspricht ein weiten Teilen Kapitel II in Fredenhagen (2009)

[2] Wie in der Beschreibung relativistischer Theorien üblich, werden von diesem Punkt an Einheiten verwendet, in denen $c = 1$ gilt.

Die Elemente der so genannten Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$, welche den Ursprung invariant lasse bilden eine als Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$ bezeichnete Untergruppe. Mann kann zeigen, dass sich jedes Element von $\mathcal{P}$ als Produkt einer Lorentztransformation und einer Translation darstellen lässt.

Die Untergruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ der physikalisch realisierbaren Lorentztransformationen bilden jene Elemente Λ von $\mathcal{L}$, für die $\det \Lambda = 1$ und ${\Lambda^0}_0 \geq 0$ gelten – Sie erhalten also sowohl die Zeit- als auch die Raumorientierung und werden daher als eigentlich orthochrone Lorentztransformationen bezeichnet. Die Kombination von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ und der Translationsgruppe bilden die relativistische Invarianzgruppe $\mathcal{P}_+^\uparrow$. Die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe $\mathcal{P}^c$ bildet die inhomogene $SL(2, \mathbb{C})$.

Im Folgenden soll die relativistische Symmetriegruppe in die Beschreibung quantenmechanischer Systeme integriert werden. Die Zustände eines quantenmechanischen Systems werden durch die Strahlen, also die projektiven Unterräume, eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ beschrieben.

Physikalische Messgrößen sind die Eigenwerte selbstadjungierter Operatoren - der Observablen. Der in einem Zustand $\hat{\Phi}$ des Systems erwartete Messwert einer Observablen O ist gegeben durch das Strahlprodukt von $\hat{\Phi}$ und $\widehat{O\Phi}$. Die Forderung, dass ein quantenmechanisches System invariant unter einer Transformation ist, besagt anders ausgedrückt, dass alle Messgrössen unter dieser unverändert bleiben. Insbesondere das Produkt zweier Strahlen, dessen Betragsquadrat die Übergangswahrscheinlichkeit zweier Zustände beschreibt, sollte demnach unverändert bleiben. Für derartige Abbildungen gilt das folgende Theorem.

Theorem I - 2 (Wigner[3])**.**
Sei $\hat{S}$ eine invertierbare, das Strahlprodukt erhaltene Abbildung des Projektiven Raumes eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ in sich. Dann existiert eine invertierbare, $\mathbb{R}$-lineare Isometrie $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, so dass gilt:

$$\widehat{S\Phi} = \hat{S}\hat{\Phi}$$

S ist bis auf einen Phasenfaktor eindeutig und entweder unitär oder antiunitär.

Es zeigt sich, dass für alle Elemente $L \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ der Operator T_L unitär ist. Bei der Anwendung der Transformationen soll die multiplikative Struktur der Symmetriegruppe erhalten bleiben, d.h. die Anwendung eines Produktes von zwei Elementen der Symmetriegruppe soll der Hintereinanderausführung der beiden einzelnen Transformationen entsprechen. Da es sich bei den zu transformierenden Objekten um Äquivalenzklassen handelt, betrachtet man projektive Darstellungen oder auch Strahldarstellungen.

Im vorliegenden Fall der projektiven Darstellungen der $\mathcal{P}_+^\uparrow$ lassen sich diese durch die Darstellungen der einfach zusammenhängenden Überlagerungsgruppe charakterisieren, denn es gilt das folgende Theorem.

Theorem I - 3 (Bargmann und Wigner)**.**
Zu jeder stetigen projektiven Darstellung $L \mapsto \hat{T}_L$ der eigentlich orthochronene Poincaré-

Gruppe $\mathcal{P}_+^\uparrow$ *gibt es eine stark stetige unitäre Darstellung* U *der zweifachen Überlagerungsgruppe* $\mathcal{P}^C$*, so dass gilt*

$$\widehat{U(a,S)}\Phi = \hat{T}_{a,\Lambda(S)}\hat{\Phi}.$$

Dabei ist $\Lambda : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ *der zweifache Überlagerungshomomorphismus.*

Die Charakterisierung relativistischer Quantensysteme entspricht also der Analyse der Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$. Ein elementares Physikalisches System lässt sich in diesem Sinne als irreduzible Darstellung der $\mathcal{P}^c$ auffassen, da eine solche nicht in irreduzible Unterdarstellungen zu zerlegen ist.

2.1. Zur Darstellungstheorie der $\mathcal{P}^c$

Aus den bisherigen Überlegungen wurde ersichtlich, dass die Beschreibung relativistischer Quantensysteme maßgeblich mit der (projektiven) Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe zusammenhängt. Daher werden im Folgenden einige zentrale Ergebnisse eben dieser zusammengefasst. Aus der Zusammenfassung wird schließlich auch die Definition des Spins eines elementaren relativistischen Quantensystems hervorgehen.

2.1.1. Darstellungen der Translationsgruppe

Zunächst sollen die Darstellungen der Translationsgruppe als Untergruppe der $\mathcal{P}^c$ untersucht werden. Dazu betrachtet man eine unitäre, stark stetige irreduzible Darstellung U der $\mathcal{P}^c$ und schränkt diese ein auf die Translationsgruppe. Die Translationsgruppe ist eine vierdimensionale kommutative Gruppe. Also liefert die obige Darstellung vier kommutierende unitäre stark stetige 1-Parameter-Gruppen. Mit dem Stone-von-Neumann Theorem lässt sich die Darstellung der Translationsgruppe demnach durch vier kommutierende selbstadjungierte Operatoren $P_\mu,\ \mu \in \{0,1,2,3\}$ auf dem Darstellungsraum beschreiben.

$$U(a) = e^{iPa}, \qquad a \in \mathbb{R}^4$$

Die disjunkte Vereinigung der Spektren dieser vier Operatoren bildet eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^4$.

$$\mathrm{Sp}(P) = \{(p_0,p_1,p_2,p_3) \in \mathbb{R}^4 |\ p_\mu \in \mathrm{Sp}(P_\mu)\}$$

Aus der Gruppenmultiplikation $(a_1,\Lambda_1)(a_2,\Lambda_2) = (a_1{+}\Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2)$ für $(a_i,\Lambda_i) \in \mathcal{P},\ i \in \underline{2}$ folgt die Invarianz von $\mathrm{Sp}(P)$ unter Lorentz-Transformationen und aus der angenommenen Stetigkeit der Darstellung, folgt $p = 0$ als einziges Element des Punktspektrums. Die einfachste Klasse irreduzibler Darstellungen der $\mathcal{P}^c$ ist also gegeben durch ein Produkt der trivialen Darstellung der Translationen mit einer irreduziblen Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$. Diese Klasse ist jedoch bis auf die triviale Darstellung der $\mathcal{P}^c$, die das Transformationsverhalten des Vakuums charakterisiert, nicht physikalisch relevant, da Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig von Translationen wären.

Um die übrigen Darstellungen der Translationen zu klassifizieren, betrachtet man zu einem punkt $p \in \mathbb{R}^4$ seinen Orbit O_p unter Lorentz-Transformationen. Man erhält mit $m, k \in \mathbb{R}$ die folgende Klassifikation der Orbits[4]:

$$\begin{aligned}
H_+^m &= \{p \in \mathbb{R}^4 |\ p^2 = m^2,\ p_0 > 0\} \\
H_-^m &= \{p \in \mathbb{R}^4 |\ p^2 = m^2,\ p_0 < 0\} \\
\partial J_+ &= \{p \in \mathbb{R}^4 |\ p^2 = 0,\ p_0 > 0\} \\
\partial J_- &= \{p \in \mathbb{R}^4 |\ p^2 = 0,\ p_0 < 0\} \\
H_{im}^+ &= \{p \in \mathbb{R}^4 |\ p^2 = -k^2\} \\
& \quad \{0\}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet man H_+^m als Masseschale und $\partial V_\pm$ sind, wie zuvor, die Ränder des Lichtkegels.

Man fasst nun die Operatoren $P_\mu,\ \mu \in \underline{3}$ als Impulsoperatoren, und P_0 als den Hamiltonoperator auf. Diese Interpretation ist gerechtfertigt, da sich aus den Darstellungsräumen entsprechende Hilberträume konstruieren lassen. Siehe Fredenhagen (2009, Kapitel II.) oder Haag (1996) für eine ausführliche Diskussion. Damit lassen sich nur die Orbits für die $p_0 > 0$ gilt, als mögliche Spektren physikalischer Systeme auffassen. In diesem Fall entspricht der Parameter m der Ruhemasse des beschriebenen Systems. Für ein System der Masse m lassen sich die Darstellungen der $\mathcal{P}^c$ nun mit einer unitären irreduziblen Darstellung $\tilde{U}$ der $SL(2,\mathbb{C})$ als

$$U(a, A)\Phi = e^{ia^\mu p_\mu} \tilde{U}(A)\Phi$$

schreiben.

Es verbleit die Klassifizierung der irreduziblen Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$.

2.1.2. Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$

Die irreduziblen Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ lassen sich mit der Methoden der komplexen Algebra durch die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$ bestimmen. Details dazu finden sich in Mühlhoff (2007). In diesem Abschnitt werden nur die zentralen Theoreme zur Klassifizierung der $SL(2,\mathbb{C})$-Darstellungen zitiert.

Theorem I - 4 (Irreduzible Darstellungen der $SU(2)$)**.**
Die Äquivalenzklassen der irreduziblen komplexen Hilbertraumdarstellungen $[D^{(j)}]$ *der* $SU(2)$ *lassen sich durch Zahlen* $j \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\right\}$ *charakterisieren, so dass*

$$Dim(D^{(j)}) = 2j + 1$$

Hier ist $D^{(j)}$ *ein Repräsentant der entsprechenden Äquivalenzklasse.* j *bezeichnet man als den* Spin.

[4] Der Ausdruck p^2 ist als $\eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ zu verstehen.

Definition I - 5 $((D^{(j)}, \Delta_j))$**.**

- Im Folgenden werden die Äquivalenzklasse der Darstellungen mit $j = \frac{1}{2}$ durch den Repräsentanten $(D^{(\frac{1}{2})}, \Delta_{\frac{1}{2}})$ dargestellt. Für $S \in SU(2)$ und $x \in \Delta_{\frac{1}{2}} := \mathbb{C}^2$ sei

$$D^{(\frac{1}{2})}(S)(x) := Sx$$

- Für $j \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\right\}$ stellt man die entsprechenden Äquivalenzklassen durch die Repräsentanten

$$D^{(j)} := \underbrace{(D^{(\frac{1}{2})})^{\otimes 2j}}_{symm.}$$

auf dem Raum $\Delta_j := \underbrace{(\Delta_{\frac{1}{2}})^{\otimes 2j}}_{symm.}$ dar.

Theorem I - 6 (irreduzible komplexe Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$)**.**
Die Äquivalenzklassen endlichdimensionaler komplexer Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ lassen sich eindeutig durch die Repräsentanten

$$D^{(j,j')} := D_C^{(j)} \otimes \overline{D}_C^{(j')} \qquad \textit{auf } \Delta_j \otimes \overline{\Delta}_{j'} \ \textit{mit } j, j' \in \left\{0, \tfrac{1}{2}, 1, \dots\right\}$$

charakterisieren. Der Spin *dieser Darstellungen ist $S = j + j'$. Dementsprechend sind die Äquivalenzklassen der endlich dimensionalen irreduziblen komplexen Darstellungen der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ gegeben durch*

$$\hat{D}^{(j,j')} = \mathrm{d}D^{(j,j')}.$$

Die vorangegangenen Theoreme zeigen, dass sich die irreduziblen Darstellungen der $\mathcal{P}^c$ bis auf Äquivalenz eindeutig durch die Parameter m, j und j' charakterisiert wird. Im Abschnitt 4, wird gezeigt, dass das physikalische System für festes $S = \frac{1}{2}(j+j')$ in gewisser Weise äquivalent sind. Damit lässt sich eine elementares relativistisches Quantensystem eindeutig durch die beiden Parameter m und S beschreiben. Die Masse und der Spin als fundamentale Parameter eines solchen Systems lassen sich also aus den Grundlegenden Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik ableiten.

3. Formalismen zur Beschreibung von Systemen mit Spin

Im anschließenden Kapitel werden die zwei Formalismen eingeführt, die im weiteren Verlauf der Arbeit zur Beschreibung von Systemen mit Spin verwendet werden.

3.1. Der 2-Spinor Formalismus

Definition I - 7 ($SL(2,\mathbb{C})$-Spinoren, Terminologie)**.**

- Sei (D,Δ) eine Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$, dann bezeichnet man die Elemente des Darstellungsraumes Δ als $SL(2,\mathbb{C})$-*Spinoren* vom Typ D.
  Die Elemente des Darstellungsraumes Δ^* der dualen Darstellung (D^*,Δ^*) nennt man $SL(2,\mathbb{C})$-*Kospinoren* vom Typ D

- (Ko-) Spinoren vom Typ $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$ nennt man *positive Weyl-(Ko-)Spinoren.* (Ko-) Spinoren vom Typ $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$ dem entsprechend *negative Weyl-(Ko-)Spinoren.*

- (Ko-)Spinoren vom Typ $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \oplus D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$ bezeichnet man als *Dirac-Spinoren*

- Elemente von Tensorprodukträumen der Form $(\Delta_{\frac{1}{2},0})^{\otimes k} \otimes (\Delta_{0,\frac{1}{2}})^{\otimes l}$ nennen wir *2-Spinoren vom Typ* (k,l) (bzw. kurz (k,l)-Spinoren).

- Dementsprechend bezeichnen Tensorprodukträumen der Form $(\Delta^*_{\frac{1}{2},0})^{\otimes k} \otimes (\Delta^*_{0,\frac{1}{2}})^{\otimes l}$ als *2-Kospinoren vom Typ* (k,l) (bzw. kurz (k,l)-Kospinoren).

Notation I - 8 (2-Spinor Notation)**:**

1. Positive und negative Weyl-Spinoren werden in folgender Weise mit abstrakten Indizes beschrieben:
   - Ein positiver Weyl-Spinor wird durch einen hochgestellen Großbuchstaben indiziert.
     $\varphi = \varphi^A \in \Delta_{\frac{1}{2},0}$
   - Ein negativer Weyl-Spinor wird durch einen hochgestellten punktierten Großbuchstaben indiziert.
     $\overline{\chi} = \overline{\chi}^{\dot{A}} \in \Delta_{0,\frac{1}{2}}$

- Die entsprechenden Kospinoren, also die Elemente der Dualräume $\Delta^*_{\frac{1}{2},0}$ (bzw. $\Delta^*_{0,\frac{1}{2}}$) werden durch tiefgestellte (punktierte) Großbuchstaben indiziert.
- Elemente von beliebigen Tensorprodukten der Räume $\Delta_{\frac{1}{2},0}, \Delta_{0,\frac{1}{2}}, \Delta^*_{0,\frac{1}{2}}$ und $\Delta^*_{\frac{1}{2},0}$ werden jeweils durch einen Index pro Tensorfaktor nach den obigen Regeln indiziert.
- Kontraktionen werden durch ein Paar aus einem oberen und einem unteren Index beschrieben, für die der selbe Buchstabe verwendet wird.

Definition I - 9 (ϵ^{AB})**.** Wir definieren ϵ^{AB} als den total antisymmetrischen $(2,0)$-Spinor mit den Komponenten

$$\left(\epsilon^{AB}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei ϵ_{AB} der inverse Spinor, so dass

$$\epsilon^{AB}\epsilon_{CB} = \mathrm{Id}^A_C,$$

wobei $\mathrm{Id}^A_C : \Delta_{\frac{1}{2},0} \longrightarrow \Delta_{\frac{1}{2},0}$ die Tensor-Darstellung der identischen Abbildung auf $\Delta_{\frac{1}{2},0}$ ist. ϵ^{AB} und ϵ_{AB} sowie die Entsprechungen $\epsilon^{\dot{X}\dot{Y}}$ und $\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}}$ auf den komplex Konjugierten Räumen werden verkürzend als ϵ-Spinoren bezeichnet.

Die ϵ-Spinoren haben eine fundamentale Bedeutung im zuvor definierten Formalismus. Als Intertwiner zwischen den Darstellungen $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$ und $D^{\left(\frac{1}{2},0\right)*}$ bzw. $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$ und $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)*}$ induzieren sie kanonische Isomorphismen zwischen den Spinorräumen und den Dualräumen zu diesen (Penrose und Rindler, 1984a). Spinor-Indizes werden also mit den ϵ-Spinoren gehoben und gesenkt. Die $SL(2,\mathbb{C})$-invariante duale Paarung von Weyl-Spinoren φ und ψ ist damit gegeben durch

$$\psi_A\varphi^A = \epsilon_{BA}\psi^B\varphi^A = \epsilon^{AB}\psi_A\varphi_B = -\psi^A\varphi_A.$$

Man beachte die hier verwendete Konvention der Reihenfolge der Indizes des ϵ-Spinors beim Heben und Senken der Indizes. Sie entspricht den Konventionen in Penrose und Rindler (1984a). Eine Spinorbasis sind Spinoren $\{E_1, E_2\} \subset \Delta_{\frac{1}{2},0}$ die der Bedingung

$$(E_i)_A(E_j)^A = (1 - \delta_{ij})$$

genügen. Auch der in Kapitel 2 angesprochene zweifache Überlagerungshomomorphismus lässt sich im 2-Spinor-Formalismus beschreiben.

Definition I - 10 (σ-Spinor)**.** Die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma :& \mathbb{M} \longrightarrow \Delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ & x^\alpha \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=0}^{3} x^k \sigma_k\right)^{ij} (E_j)^A \otimes (\overline{E}_i)^{\dot{X}} \end{aligned}$$

wobei $\sigma_k,\ k \in \underline{3}$ die Pauli-Matrizen und σ_0 die 2×2-Einheitsmatrix sind, nennen wir *σ-Spinor*. In der Literatur existieren auch die Bezeichnungen Tensor-Spinor und Infeld-van-der-Waerden-Symbol.

Die Abbildung als Element von $\mathbb{M}^* \otimes \Delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ transformiert sich unter der Darstellung $\Lambda^* \otimes D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ und es lässt sich zeigen, dass das nachfolgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M} \arrow[r, "\Lambda(S)"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{M} \arrow[d, "\sigma"] \\
\Delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \arrow[r, "D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}"'] & \Delta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}
\end{tikzcd}$$

Der σ-Spinor ist der Intertwiner zwischen der Vektordarstellung der Lorentzgruppe und der $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ und ist daher auch eine explizite Form die Korrespondenz zwischen Lorentz-Vektoren und den $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$-Spinoren auszudrücken.

3.2. Der Dirac-Spinor Formalismus

Definition I - 11 (Dirac-Spinor Darstellung)**.** Man nennt D^D aus (D) die *Dirac-oder Bi-Spinor Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$.* Δ_D wird als Raum der Dirac- oder Bi-Spinoren bezeichnet. Man setzt

$$\left.\begin{aligned} \Delta_D^+ &:= \Delta_{\frac{1}{2},0} \\ \Delta_D^- &:= \Delta^*_{0,\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \Delta_D = \Delta_D^+ \oplus \Delta_D^-$$

und bezeichnet $\Delta_D^\pm$ als den positiven/negativen chiralen Teil von Δ_D.

Notation I - 12 (Dirac-Spinor Notation)**:**

1. Elemente von Δ_D werden Dirac-Spinoren genannt und durch abstrakte Indizes gekennzeichnet.
   - Ein Dirac-Spinor wird durch einen Großbuchstaben mit Tilde indiziert.
   - Ein Element des Dualraums $\Delta{*}_D = \Delta^*_{\frac{1}{2},0} \oplus \Delta_{0,\frac{1}{2}}$ wird durch einen tiefgestellten Großbuchstaben mit Tilde indiziert

2. Beliebige Tensorprodukte von Dirac-(Ko-)Spinoren werden analog zum 2-Spinor-Formalismmus indiziert. Ebenso werden Kontraktionen durch ein Paar gleicher Indizes (ein hoch- und ein tiefgestellter Index) symbolisiert.

3. Es gibt einen natürlichen anti-linearen Isomorphismus

$$\begin{aligned} {}^\dagger : \Delta_D &\longrightarrow \Delta_D^* \\ \psi^{\tilde{A}} &\longmapsto \psi^\dagger_{\tilde{A}} \end{aligned}$$

Dieser ist definiert durch die komplexe Konjugation auf $\Delta_{\frac{1}{2},0}$ und $\Delta^*_{0,\frac{1}{2}}$.

$$\left(\Psi^{\tilde{A}}\right)^\dagger = \begin{pmatrix} \psi^A \\ \varphi_{\dot{X}} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_A \\ \bar{\psi}^{\dot{X}} \end{pmatrix}$$

Für $\Psi^{\tilde{A}}$ nennen wir $\Psi^\dagger_{\tilde{A}}$ den dirac-adjungierten Spinor. Die Umkehrabbildung bezeichnet man in selber Weise.

Eine wichtige Struktur bilden die Dirac- oder γ-Matrizen.

Definition I - 13 (γ-Matrizen)**.** Sei $\{e_i\}_{i\in\{0,1,2,3\}}$ eine Basis von $\mathbb{M}$. Eine Menge von Matrizen $\{\gamma_i\}_{i\in\{0,1,2,3\}} \subset GL_4(\mathbb{C})$ nennen wir *Dirac-Matrizen* (auch γ-Matrizen), wenn sie die Gleichung

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} \equiv \gamma_i\gamma_j + \gamma_j, \gamma_i = 2(\eta)_{ij}\mathbb{1} \qquad \text{für alle} i, j \in \{0,1,2,3\}$$

lösen.

Es lässt sich zeigen, dass ein Satz von Dirac-Matrizen mit einer Spinor-Darstellung der Clifford-Algebra korrespondiert. Diese Tatsache führt zu einem Zusammenhang zwischen der Dirac-Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ und der Vektor-Darstellung der Lorentz-Gruppe, welcher mit dem analogen Zusammenhang der Darstellungen für die σ-Spinoren eng verwand ist. Unter geeigneter Wahl der Basen lassen sich die Zusammenhänge zwischen Lorentz-Vektoren, Dirac- und 2-Spinoren durch die Gleichung

$$x^\alpha \gamma_\alpha{}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} \Psi^{\tilde{B}} = \sqrt{2} x^\alpha \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\alpha{}^{A\dot{Y}} \\ \sigma_{a\dot{X}B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^B \\ \chi_{\dot{Y}} \end{pmatrix} = \sqrt{2} x^\alpha \begin{pmatrix} \sigma_\alpha{}^{A\dot{Y}} \chi_{\dot{Y}} \\ \sigma_{a\dot{X}B} \varphi^B \end{pmatrix}$$

zusammenfassen. Für weiter gehende Ausführung sei auf Mühlhoff (2007) und Lehrbücher, wie (Lawson und Michelsohn, 1989) und (Carmeli und Malin, 2000) verwiesen.

4. Bewegungsgleichungen für Systeme höheren Spins

Im folgenden Abschnitt werden einige Resultate zu Bewegungsleichungen für Spinorfelder[1] zusammengefasst und in den 2-Spinor-Formalismus übertragen.

4.1. Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen

Die häufig auch als Fierz-Pauli-Gleichungen bezeichneten Bewegungsgleichugen sind ein ursprünglich von Dirac (1936) vorgeschlagenes System von Differentialgleichungen, mit welchem sich auf dem Minkowskiraum die Dynamik von Feldern mit beliebigem Spin beschreiben lässt. In 2-Spinornotation lautet das System für ein Kospinor-Feld $\Phi = (\varphi, \chi)^{\mathrm{tr}}$ mit beliebigem Spin $S = \frac{1}{2}(n + k + 1)$

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{X}}{}^{D} \varphi_{DA_1 \dots A_n \dot{X}_1 \dots \dot{X}_k} + \mu \chi_{A_1 \dots A_n \dot{X} \dot{X}_1 \dots \dot{X}_n} &= 0, \\ \partial^{\dot{X}}{}_{D} \chi_{A_1 \dots A_n \dot{X} \dot{X}_1 \dots \dot{X}_k} - \nu \varphi_{DA_1 \dots A_n \dot{X}_1 \dots \dot{X}_k} &= 0, \end{aligned} \tag{FP}$$

wobei die Felder φ und χ gemäß der Darstellungen $D^{((n+1)/2, k/2)}$ bzw. $D^{(n/2, (k+1)/1)}$ transformieren, also insbesondere symmetrisch in den positiven und negativen Spinor-Indizes[2] sind. Aus (FP) folgt, dass das φ eine Lösung der Wellengleichung

$$(\Box - 2\mu\nu)\Phi = 0 \tag{I.1}$$

ist.

4.1.1. Äquivalenz der Gleichungen für festes S

Um die Äquivalenz der Gleichungen im massiven Fall für einen festen Spin - der Argumentation von Fierz (1939) folgend - zu zeigen, beginnt man mit dem Kospinorfeld $\Phi^{(0)} = \left(\varphi^{(0)}, \chi^{(0)}\right)^{\mathrm{tr}}$, welches unter der Darstellung mit $n = 0$ und $k = 2S - 1 \equiv s - 1$ transformiert. Die Komponenten dieses Feldes erfüllen dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{X}}{}^{D} \varphi^{(0)}{}_{D \dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s-1}} + \mu \chi^{(0)}{}_{\dot{X} \dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s-1}} &= 0, \\ \partial^{\dot{X}}{}_{D} \chi^{(0)}{}_{\dot{X} \dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s-1}} - \nu \varphi^{(0)}{}_{D \dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s-1}} &= 0. \end{aligned} \tag{I.2}$$

[1] Hier werden als Spinorfelder glatte Funktionen vom Minkowskiraum in den entsprechenden Darstellungsraum bezeichnet. Eine allgemeinere Definition folgt im zweiten Teil der Arbeit.

[2] Ein positiver Spinorindex meint in diesem Fall die Zugehörigkeit der entsprechenden Tensorkomponente zum Darstellungsraum der positiven Weyl-Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$

Man konstruiert nun die Kospinorfelder

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)}{}_{DA_1\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-2}} &\equiv (\mu\nu)^{-\frac{1}{2}}\partial^{\dot{X}_{s-1}}{}_{A_1}\varphi^{(0)}{}_{D\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-1}},\\
\varphi^{(2)}{}_{DA_1A_2\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-3}} &\equiv (\mu\nu)^{-\frac{1}{2}}\partial^{\dot{X}_{s-2}}{}_{A_2}\varphi^{(1)}{}_{DA_1\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-2}},\\
&\vdots\\
\varphi^{(s-1)}{}_{DA_1\ldots A_{s-1}} &\equiv (\mu\nu)^{-\frac{1}{2}}\partial^{\dot{X}_1}{}_{A_{s-1}}\varphi^{(1)}{}_{DA_1\ldots A_{s-2}\dot{X}_1}.
\end{aligned}$$

Weiterhin erzeugt man mit dem selben Bildungsgesetz die Felder $\chi^{(1)},\ldots,\chi^{(s-1)}$. Aus (I.2) folgt unmittelbar, dass die Felder $(\varphi^{(i)},\chi^{(i)})^{\mathrm{tr}}$, $i\in\underline{s-1}$ jeweils Bewegungsgleichungen (FP) mit $n=i$ und $k=s-(i+1)$ genügen.

In analoger Weise lassen sich durch Ableitungen und Multiplikation mit der inversen Masse $(\mu\nu)^{-\frac{1}{2}}$ aus dem Feld $(\varphi^{(s-1)},\chi^{(s-1)})^{\mathrm{tr}}$ die Felder bis $(\varphi^{(0)},\chi^{(0)})^{\mathrm{tr}}$ zurückgewinnen. Dieses ist direkt ersichtlich, da die Felder die Wellengleichungen (I.1) lösen.

Es zeigt sich also, dass sich aus einer Lösung einer der Bewegungsgleichungen, Lösungen zu allen übrigen Bewegungsgleichungen zum selben Spin erzeugen lassen. In diesem Sinne sind alle Bewegungsgleichungen zu einem festen Spin auf dem Minkowskiraum äquivalent.

4.2. Rarita-Schwinger-Gleichungen

Eine in der Beschreibung von fermionischen Spinorfeldern mit $S=2k+\frac{1}{2}$ weit verbreitete Variante der Bewegungsgleichungen (FP), sind die von Rarita und Schwinger (1941) vorgeschlagenen Gleichungen[3]

$$(\partial^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}}+\mu\,\mathrm{Id}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}})\varphi^{\tilde{B}}{}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}=0, \tag{RS1}$$

$$\gamma^{\alpha\tilde{A}}{}_{\tilde{B}}\varphi^{\tilde{B}}{}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_k}=0. \tag{RS2}$$

Das Feld φ ist dabei symmetrisch in allen Lorentz-Vektor-Komponenten. In dieser Form ist die zugehörige Darstellung D^k_{RS} der $SL(2,\mathbb{C})$ gegeben durch

$$D^k_{RS}=\left(D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}\oplus D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)*}\right)\otimes D^{(k,k)},$$

wobei (RS2) als zusätzliche Bedingung verstanden werden kann, um die Einschränkung auf die irreduzible Unterdarstellung zum entsprechenden Spin zu gewährleisten.

Eine aus darstellungstheoretischer Sicht ausführliche Beschreibung der Konstruktion von Bewegungsgleichungen aus $SL(2,\mathbb{C})$-Darstellungen findet man im Buch von Barut und Raczka (1986, Kapitel 21).

Aus der Lagrange-Dichte erhält man mittels des Noethertheorems den erhaltenen Strom j^μ, welcher durch eine Lösung φ der Rarita-Schwinger-Gleichungen gegeben ist als

$$j^\mu=\varphi^{+}{}_{\tilde{A}\alpha_1\ldots\alpha_k}\gamma^{\mu\tilde{A}}{}_{\tilde{B}}\varphi^{\tilde{B}\alpha_1\ldots\alpha_k}$$

[3] Auf diese Gleichungen wird im Folgenden als Rarita-Schwinger-Gleichungen bzw. Rarita-Schwinger-Gleichung Bezug genommen.

4.2.1. Die Rarita-Schwinger-Gleichungen im 2-Spinor-Formalismus

Es ist zweckmäßig für den weiteren Verlauf dieser Arbeit, die Rarita-Schwinger-Gleichungen im 2-Spinor Formalismus zu betrachten.

Für ein Spin-s-Spinorfeld $\Phi = (\varphi, \chi)^{\mathrm{tr}}$ lautet die Gleichung (RS1)

$$\begin{aligned}
&\partial^{\dot{X}}{}_{A}\varphi^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} + \mu\chi_{\dot{X}}{}^{\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} = 0,\\
&\partial^{\dot{X}A}\chi_{\dot{X}}{}^{\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} + \nu\varphi^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} = 0.
\end{aligned}$$

Aus der Irreduzibilitätsbedingung folgen für die Felder

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma_{\alpha\dot{X}A}\sigma^{\alpha}{}_{\dot{X}_1A_1}\varphi^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} = \epsilon_{\dot{X}\dot{X}_1}\epsilon_{AA_1}\varphi^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k}\\
&= \epsilon_{\dot{X}\dot{X}_1}\varphi_{A}{}^{\dot{X}_1\dots\dot{X}_kAA_2\dots A_k}\\
&\qquad\qquad\qquad\Longrightarrow \varphi^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} = \varphi^{(A|\dot{X}_1\dots\dot{X}_k|A_1\dots A_k)},
\end{aligned}$$

sowie

$$\chi^{\dot{X}\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} = \chi^{(\dot{X}\dot{X}_1\dots\dot{X}_k)A_1\dots A_k}.$$

Die Rarita-Schwinger-Gleichungen entsprechen demnach den Fierz-Pauli- Gleichungen für $n = k$. Der Strom j^μ beschrieben durch Dirac- und 2-Spinoren ist von der Gestalt

$$\begin{aligned}
j^\mu &= \Phi^{+}{}_{\tilde{A}A_1\dots A_k\dot{X}_1\dots\dot{X}_k}\gamma^{\mu\tilde{A}}{}_{\tilde{B}}\Phi^{\tilde{B}\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k}\\
&= \sigma^{\mu}{}_{\dot{X}A}\overline{\chi}^{A}{}_{A_1\dots A_k\dot{X}_1\dots\dot{X}_k}\chi^{\dot{X}\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} + \sigma^{\mu}{}_{A\dot{X}}\overline{\varphi}^{\dot{X}A_1\dots A_k\dot{X}_1\dots\dot{X}_k}\varphi^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k}
\end{aligned}$$

Dieser Strom induziert in offentsichtlicher Weise eine Sesquilinearform auf dem Lösungsraum der Rarita-Schwinger-Gleichungen. Sie ist gegeben durch die Integration von

$$j^\mu(\Phi, \Psi) := \Phi^{+}{}_{\tilde{A}A_1\dots A_k\dot{X}_1\dots\dot{X}_k}\gamma^{\mu\tilde{A}}{}_{\tilde{B}}\Psi^{\tilde{B}\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k} \tag{I.3}$$

über eine Cauchyfläche[4].

$$j_\Sigma(\Phi, \Psi) := \int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\, \mathfrak{n}_\mu j^\mu(\Psi, \Phi) \tag{I.4}$$

Weit weniger naheliegend ist die Tatsache, dass es sich bei der soeben definierten Form um ein Skalarprodukt, also eine positiv definite Sesquilinearform handelt. Um die Positivität einzusehen, wechselt man zunächst zu einer äquivalenten Beschreibung. Nach dem in Abschnitt 4.1.1 beschriebenen Verfahren sei

$$\tilde{\chi}^{\dot{X}A_1\dots A_{2k}} := (\mu\nu)^{-\frac{k}{2}}\partial_{\dot{X}_1}{}^{A_{k+1}}\dots\partial_{\dot{X}_k}{}^{A_{2k}}\chi^{\dot{X}\dot{X}_1\dots\dot{X}_kA_1\dots A_k},$$

[4] Hier sollte eine Cauchyfläche als der $\mathbb{R}^3$ aufgefasst werden, den man erhält, wenn man den Minkowskiraum $\mathbb{M}$ mit festgehaltener Zeit betrachtet. Die formale Definition einer Cauchyfläche für global hyperbolische Lorentzmannigfaltigkeiten (zu denen auch der Minkowskiraum gehört) folgt in Definition II-4

dann gilt mit

$$\tilde{\varphi}^{AA_1\dots A_{2k}} := (\mu\nu)^{-\frac{k}{2}} \partial_{\dot{X}_1}{}^{A_{k+1}} \dots \partial_{\dot{X}_k}{}^{A_{2k}} \varphi^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_k A_1\dots A_k}$$

die Bewegungsgleichung

$$\partial_{\dot{X}}{}^{A} \tilde{\chi}^{\dot{X}A_1\dots A_{2k}} = -\nu\tilde{\varphi}^{AA_1\dots A_{2k}}.$$

Definiert man analog $\tilde{\vartheta}$ und $\tilde{\xi}$ für die Komponenten von $\Psi = (\vartheta, \xi)^{\mathrm{tr}}$, hat der Rarita-Schwinger-Strom j ausgedrückt durch die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} j^\mu(\Phi,\Psi) =& (\mu\nu)^{-k} \sigma^\mu{}_{\dot{X}A} \partial^{\dot{X}_1 A_1} \dots \partial_{\dot{X}_k A_k} \overline{\tilde{\varphi}}^{\dot{X}\dot{X}_1\dots\dot{X}_{2k}} \partial_{\dot{X}_{k+1}A_{k+1}} \dots \partial_{\dot{X}_{2k}A_{2k}} \tilde{\vartheta}^{AA_1\dots A_{2k}} \\ &+ (\mu\nu)^{-k} \sigma^\mu_{A\dot{X}} \partial^{\dot{X}_1 A_1} \dots \partial_{\dot{X}_k A_k} \overline{\tilde{\xi}}^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_{2k}} \partial_{\dot{X}_{k+1}A_{k+1}} \dots \partial_{\dot{X}_{2k}A_{2k}} \tilde{\xi}^{\dot{X}A_1\dots A_{2k}} \end{aligned}$$

Das Integral des Stromes ist dann nach partieller Integration

$$\begin{aligned} (\mu\nu)^{-k} \int_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\, \mathfrak{n}_\mu \Big[& \sigma^\mu{}_{\dot{X}A} \overline{\tilde{\varphi}}^{\dot{X}\dot{X}_1\dots\dot{X}_{2k}} \partial_{\dot{X}_1 A_1} \dots \partial_{\dot{X}_{2k}A_{2k}} \tilde{\vartheta}^{AA_1\dots A_{2k}} \\ &+ \sigma^\mu_{A\dot{X}} \overline{\tilde{\xi}}^{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_{2k}} \partial_{\dot{X}_1 A_1} \dots \partial_{\dot{X}_{2k}A_{2k}} \tilde{\xi}^{\dot{X}A_1\dots A_{2k}} \Big] \\ &= \langle \Phi, \Psi \rangle. \end{aligned}$$

Durch Fouriertransformation der Felder lässt sich zeigen, dass diese Sesquilinearform mit $\mu = \nu = \frac{im}{\sqrt{2}}$ positiv ist. Vergleiche dazu (Wald, 1984, S. 358) .

Die vorangegangene Konstruktion zeigt, dass sich für Lösungen der Dirac-Pauli-Fierz-Gleichungen Skalarprodukte konstruieren lassen, die in obigem Sinne äquivalent zu dem aus dem durch den Rarita-Schwinger-Strom induzierten Skalarprodukt sind. Auf dem Minkowskiraum sind demnach alle möglichen Theorien für elementare Systeme höheren Spins kanonisch quantisierbar. Die Gleichung kann (RS2) als zusätzliche Bedingung verstanden werden, um die Einschränkung auf die irreduzible Unterdarstellung zum entsprechenden Spin zu gewährleisten.

Eine aus Darstellungstheoretischer Sicht ausführliche Beschreibung der Konstruktion von Bewegungsgleichungen aus $SL(2,\mathbb{C})$-Darstellungen findet man im Buch von Barut und Raczka (1986, Kapitel 21).

Teil II.

Systeme höheren Spins auf gekrümmten Raumzeiten

5. Spin auf global hyperbolischen Raumzeiten

Wie der erste Teil dieser Arbeit zeigt, kann man die Existenz des Spins in der Form eines charakteristischen Parameters eines elementaren Systems als eine Konsequenz der Poincaré-Symmetrie der Raumzeit auffassen.

Auf einer allgemeinen gekrümmten Raumzeit existiert keine natürliche Wirkung der Poincaré-Gruppe. Daher lässt sich die Formulierung von Spinorfeldern auf dem Minkowski-Raum nicht direkt verallgemeinern.

Um nun Spinorfelder auf einer allgemeinen Raumzeit derart zu definieren, dass selbige Beschreibung auf dem Minkowskiraum mit der im ersten Teil beschriebenen übereinstimmt, betrachtet man zunächst die Beschreibung eines Beobachters auf der Raumzeit (M, g).

Einen Beobachter $\mathcal{B}$ am Punkt $m \in M$ beschreibt man durch ein orthonormales Vierbein am Punkt m. Zwei Beobachter $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ am selben Punkt der Raumzeit sind also durch zwei orthonormale Vierbeine, also zwei Orthonormalbasen des Tangentialraumes $T_m M$ beschrieben. Diese lassen sich durch eine Transformation $\Lambda(S)$ [1] der speziellen orthogonalen Gruppe bezüglich der Metrik g ineinander überführen. In dieser Arbeit sind alle betrachteten Raumzeiten Lorentz-Mannigfaltigkeiten, die Transformationen zwischen Vierbeinen sind also $SO(1,3)$-Transformationen.

Die Forderung der Poincaré-Invarianz von Meßergebnissen verallgemeinert man auf die Forderung, dass die Messung eines Spinorfeldes Ψ durch $\mathcal{B}$ die selben Ergebnisse liefert, wie die Messung des Transformierten Feldes $S\Psi$ durch den Beobachter $\mathcal{B}'$

Der mathematische Rahmen zur Beschreibung der oben beschriebenen Strukturen sind Faserbündel über der Mannigfaltigkeit M. Die grundlegenden Definitionen sind im Appendix A.2 zu finden. Ein zentrales Element bei der Definition von Spinorfeldern ist die Spin-Struktur.

Definition II - 1 (Spin-Struktur)**.** Sei (M, g) eine zusammenhängende pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit der Signatur (p, q) mit zusammenhängendem orthonormalem Rahmenbündel $O_c(M)$ [2] mit der Strukturgruppe G. Weiterhin sei

$$\lambda : \mathrm{Pin}_{p,q} \longrightarrow O(p, q)$$

[1] Mit S bezeichnen wir hier die zur Transformation Λ gehörige Spinortransformation

[2] Dabei ist das zusammenhängende orthonormale Rahmenbündel $O_c(M)$ das Teilbündel von $O(M)$ mit der maximalen einfach zusammenhängenden Untergruppe der Stukturgruppe von $O(M)$.

die 2-fache Überlagerungsabbildung und $\tilde{G} := \lambda^{-1}(G)$ das λ-Urbild von G. Ein glattes $\tilde{G}$-Hauptfaserbündel $S(M)$ über M mit einer Bündel-Abbildung

$$\Lambda : S(M) \longrightarrow O_c(M)$$

heißt eine *Spin-Struktur auf* M, wenn $(S(M), \Lambda)$ eine λ-Reduktion von $O_c(M)$ ist.

Mit Hilfe der Spinstruktur definieren wir ein Spinorbündel als assoziiertes Bündel

$$DM := S(M) \times_D \Delta$$

und nennen DM das Spinorbündel vom Typ D. Dabei ist D eine Darstellung von $\tilde{G}$ mit Darstellungsraum Δ.

Definition II - 2 (Spinor-Feld)**.** Sei (M, g) eine Mannigfaltigkeit, wie zuvor mit Spin-Struktur $S(M)$ und dem D-Spinorbündel DM. Dann bezeichnen wir als *D-Spinor-Feld* einen Schnitt in DM.

Zur Frage der Existenz von Spin-Struktur und damit verbunden der Existenz von Spinor-Bündeln gibt es sehr allgemeine Resultate - Siehe dazu (Lawson und Michelsohn, 1989). Das im hier vorliegenden Fall wesentliche Resultat von Geroch (1970) besagt, dass global hyperbolische Raumzeiten eine Spin-Struktur besitzen.

Definition II - 3 (global hyperbolische Mannigfaltigkeit)**.** Eine zusammenhängende zeit-orientierbare Lorentz-Mannigfaltigkeit M heißt *global hyperbolisch*, wenn für alle $m, n \in M$ gilt

$$J_+(m) \cap J_-(n) \text{ ist kompakt}$$

und M die starke Kausalitätsbedingung erfüllt. Diese besagt, dass die Mannigfaltigkeit keine geschlossenen kausalen Kurven - solche, deren Tangentialvektoren in jedem Punkt in dessen abgeschlossenem Vorwärtslichtkegel liegen - enthält.

Die Einschränkung auf global hyperbolische Raumzeiten lässt sich neben mathematisch guten Eigenschaften auch physikalisch rechtfertigen. Die Bedingung der Nichtexistezn geschlossener kausaler Kurven zusammen mit der Orientierbarkeit erlaubt eine eindeutige Definition einer kausalen Vergangenheit sowie Zukunft eines Ereignisses. Die Forderung der Kompaktheit der Schnitte der Vorwärts- beziehungsweise Rückwärtslichtkegel von m und n ermöglicht es, mit endlich vielen lokalen Messungen den vollständigen physikalischen Zusammenhang zweier Ereignisse zu bestimmen. Die Einschränkung auf global hyperbolische Raumzeiten entspricht also der Forderung nach Kausalität und nach einer sinnvollen Interpretation lokaler Messungen. Weiterhin liegen Beispielsweise die in der Physik verwendeten Friedmann-Robertson-Walker-, deSitter- sowie die innere und äußere Region der Schwarzschild-Raumzeit in den global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten (Bär et al., 2007, S. 23, Examples 1.3.11).

Man definiert im Hinblick auf Randwertprobleme bei der Lösung von Bewegungsgleichungen eine spezielle Klasse von Teilmengen der global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten.

Definition II - 4 (Cauchy-Fläche)**.** Eine Teilmenge Σ einer global hyperbolischen Mannigfaltigkeitn (M, g) heißt eine *Cauchyfläche*, wenn jede Kurve $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ mit den Eigenschaften

1. die Tangentialvektoren $\dot{\gamma}(t)$ sind zeitartig für alle $t \in I$ und

2. es existiert keine Kurve $\tilde{\gamma}$ mit $\mathrm{Bild}(\gamma) \subset \mathrm{Bild}(\tilde{\gamma})$, die 1. erfüllt

die Menge Σ genau in einem Punkt schneidet.

Es gilt das für praktische Rechnungen hilfreiche nachfolgende Theorem.

Theorem II - 5.
Sei M eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:

1. *M ist global hyperbolisch.*

2. *Es existiert eine Cauchyfläche in M.*

3. *M ist isometrisch zu $\mathbb{R} \times \Sigma$ mit der Metrik $\beta\, \mathrm{d}t^2 + g_t$, wobei β eine glatte positive Funkion und g_t eine glatt von $t \in \mathbb{R}$ abhängende riemannsche Metrik auf Σ sind. Weiterhin ist $\{t\} \times \Sigma$ für alle t eine glatte raumartige Cauchyfläche in M.*

Einen Beweis des Theorems liefern Bär et al. (2007, Theorem 1.3.10, S.23).

5.1. Zu Spinorfeldern auf gekrümmten Raumzeiten.

An dieser Stelle sollen einige Fakten zur Struktur der Spinorfelder auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten erwähnt werden.

- Auf den Spinorbündeln existieren durch den Levi-Civita-Zusammenhang induzierte kovariante Ableitungen.

- Die in Kapitel 3 eingeführten Spinoren ϵ, σ und γ^μ lassen sich als Schitte der entsprechenden Bündel verallgemeinern, so dass die für Spinoren geltenden Identitäten faserweise ihre Gültigkeit behalten. Weiterhin sind diese Spinoren kovariant erhalten.

Zum Heben und Senken von Ko-/Spinor-Indizes verwendet man das total antisymmetrische $(2,0)$- bzw. $(0,2)$-Spinorfeld ϵ. Dabei wählen wir die folgende Konvention hinsichtlich der Reihenfolge der Indizes:

Seien ρ und η $(1,0)$-Spinorfelder, dann ist

$$\epsilon_{AB}\rho^A = -\epsilon_{BA}\rho^A = \rho_B$$

das entsprechende $(1,0)$-Kospinorfeld. Damit gelten

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{AB}\epsilon_{AB} = -\epsilon^{AB}\epsilon_{BA} = 2\\
&\epsilon_A{}^B = -\epsilon^B{}_A = \delta_A{}^B\\
&\rho_{[A|}\eta_{|B]} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\,\rho_C\eta^C
\end{aligned} \tag{II.1}$$

Eine ausführlichere Diskussion zu obigen Identitäten ist in Penrose und Rindler (1984a, Abschnitt 2.5), sowie in (Wald, 1984) zu finden. Die Eigenschaften der Spinorfelder werden in (Mühlhoff, 2007) eingehend diskutiert.

5.2. Inkonsistenz der Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen auf allgemeinen Raumzeiten

In diesem Abschnitt wird das Problem aufgezeigt, welches bei der Verallgemeinerung der Dirac-Pauli-Fierz-Gleichungen auf gekrümmte Raumzeiten auftritt und auf das in der Literatur als Inkonsistenz Bezug genommen wird. Die Darstellung hier entspricht Abschnitt 4 in Illge und Schimming (1999).

Um die Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen für Spinorfelder auf gekrümmten Raumzeiten zu verallgemeinern, ersetzt man die partiellen Ableitungen in (FP) durch die kovarianten Ableitungen auf dem entsprechenden Spinorbündel. Damit lauten die Gleichungen für die chiralen Spinorfelder

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\dot X}{}^D\varphi_{DA_1\ldots A_n\dot X_1\ldots\dot X_k} + \mu\chi_{A_1\ldots A_n\dot X\dot X_1\ldots\dot X_n} = 0,\\
&\nabla^{\dot X}{}_D\chi_{A_1\ldots A_n\dot X\dot X_1\ldots\dot X_k} - \nu\varphi_{DA_1\ldots A_n\dot X_1\ldots\dot X_k} = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man die beiden Gleichungen nun ineinander ein, ergeben sich

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\dot Y}{}^D\nabla^{\dot X}{}_D\chi_{A_1\ldots A_n\dot X\dot X_1\ldots\dot X_k} = -\mu\nu\chi_{A_1\ldots A_n\dot Y\dot X_1\ldots\dot X_n},\\
&\nabla^{\dot X}{}_E\nabla_{\dot X}{}^D\varphi_{DA_1\ldots A_n\dot X_1\ldots\dot X_k} = -\mu\nu\varphi_{EA_1\ldots A_n\dot X_1\ldots\dot X_k}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichungen ist total symmetrisch in den positiven, sowie in den negativen Spinor-Indizes. Die linke Seite hingegen besitzt a priori keine derartige Symmetrie.

Aus dimensionalen Überlegungen folgt, dass ein in mehr als zwei Indizes antisymmetrischer Spinor verschwindet. Aufgrund der Symmetrie der Spinorfelder sind die einzigen nichtverschwindenden Möglichkeiten der Antisymmetrisierung jene, die den freien Index des Ableitungsoperators mit einem der freien Indizes des Spinorfeldes im Sinne von (II.1) kontrahieren. Teilt man nun den gesammten Spinor in eine Summe derart antisymmetrisierter Terme und der in den selben Komponenten symmetrisierten Spinoren auf, erhält man für den vollständig symmetrischen Teil eine Klein-Gordon-Gleichung[3]

$$\nabla_{\dot{X}D}\nabla^{\dot{X}D}\chi_{A_1\ldots A_n\dot{Y}\dot{X}_1\ldots\dot{X}_k} + m^2\chi_{A_1\ldots A_n\dot{Y}\dot{X}_1\ldots\dot{X}_n} = 0,$$
$$\nabla_{\dot{X}D}\nabla^{\dot{X}D}\varphi_{EA_1\ldots A_n\dot{X}_1\ldots\dot{X}_k} + m^2\varphi_{EA_1\ldots A_n\dot{X}_1\ldots\dot{X}_k} = 0.$$

Die antisymmetrischen Anteile der Gleichungen lassen sich als Kommutatoren der zwei Ableitungsoperatoren schreiben, so dass man mit den Identitäten und Bezeichungen für die Krümmungsspinoren aus Appendix A.4 die beiden Bedingungen

$$(k-1)\overline{\Psi}^{\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}}{}_{(\dot{X}_2|}\chi_{A_1\ldots A_n\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}|\dot{X}_3\ldots\dot{X}_k)} + n\Phi^{\dot{Y}\dot{Z}D}{}_{(A_1|}\chi_{|A_2\ldots A_n)D\dot{Y}\dot{Y}\dot{X}_2\ldots\dot{X}_k} = 0 \quad (k\geq 1),$$
$$(n-1)\Psi^{DEF}{}_{(A_2|}\varphi_{DEF|A_3\ldots A_n)\dot{X}_1\ldots\dot{X}_k} + k\Phi^{\dot{Y}}{}_{(\dot{X}_1|}{}^{DE}\varphi_{DEA_2\ldots A_k|\dot{X}_2\ldots\dot{X}_n} = 0 \qquad (n\geq 1).$$

Diese sind bis auf die Spezialfälle $s = 1$ (Dirac-Gleichung), $s = 2$ (Proca-Gleichung) und Raumzeiten mit $\Phi = \Psi = 0$ nicht erfüllbar. Daher werden diese Bedingungen als Inkonsistenzen der Dirac-Fierz-Pauli-Gleichungen auf gekrümmten Raumzeiten bezeichnet.

5.3. Buchdahl-Gleichungen

Die Buchdahlgleichungen nach Buchdahl (1958, 1962, 1982a) bilden die bisher am intensivsten untersuchte Variante konsistenter Bewegungsgleichungen für höhere Spinorfelder auf gekrümmten Raumzeiten. Die Präsentation der Buchdahlgleichungen im anschließenden Abschnitt entspricht weitestgehend dem entsprechenden Teil von (Mühlhoff, 2007).

Um die Buchdahl-Gleichungen zu definieren und sie als Bewegungsgleichung physikalischer Felder auffasssen zu können, werden zunächst einige Grundlegende Strukturen vorausgesetzt.

- (M, g) sei im Folgenden eine raum- und zeitorientierte global hyperbolische 4-dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit der Signatur $(+---)$, d.h.
  - (M, g) ist zusammenhängend,
  - (M, g) erfüllt die starke Kausalitätsbedingung,
  - (M, g) besitzt eine Spin-Struktur.
- Sei $\mathcal{F}_c M$ das zusammenhängende Rahmenbündel über (M, g), dann ist $\mathcal{F}_c M = SO^+(M)$, die Strukturgruppe ist demnach $SO^+(1, 3) = \mathcal{L}_+^\uparrow$.
- $\Lambda : \mathcal{S}(M) \longrightarrow \mathcal{F}_c M$ sein eine Spin-Struktur über (M, g), dann ist $\mathcal{S}(M)$ ein $SL(2, \mathbb{C})$-Hauptfaserbündel.

Diese Voraussetzungen werden für den Rest dieser Arbeit als erfüllt vorausgesetzt. Für die Buchdahlgleichungen sind die im Anschluss definierten Darstellungen und Spinorbündel notwendig.

[3]Hier ist, wie schon in Abschnitt 4, $\mu\nu = -m^2$.

Definition II - 6 (Buchdahl-Spinoren)**.**

1. Sei $s \in \mathbb{N}$, dann definiere die $SL(2,\mathbb{C})$-Darstellungen

$$\begin{aligned} D^{+,s} &:= D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \otimes D^{\left(\frac{s-1}{2},0\right)} && \text{auf} && \Delta_{+,s} := \Delta_{\left(\frac{1}{2},0\right)} \oplus \Delta_{\left(\frac{s-1}{2},0\right)} \\ D^{s} &:= D^{\left(\frac{s}{2},0\right)} && \text{auf} && \Delta_{s} := \Delta_{\left(\frac{s}{2},0\right)} \\ D^{-,s} &:= D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)*} \otimes D^{\left(\frac{s-1}{2},0\right)} && \text{auf} && \Delta_{-,s} := \Delta^*_{\left(0,\frac{1}{2}\right)} \oplus \Delta_{\left(\frac{s-1}{2},0\right)} \end{aligned}$$

   Die assoziierten Spinor-Bündel werden mit $D^sM := \mathcal{S}(M) \times_{D^s} \Delta_s$ usw. bezeichnet.

2. Die $SL(2,\mathbb{C})$-Darstellung

$$D_s^B := D^s \oplus D^{-,s} \qquad \text{auf} \qquad \Delta_s^B := \Delta_s \oplus \Delta_{-,s}$$

   ist die *Buchdahl-Spinor-Darstellung mit Spin* $\frac{s}{2}$. Das entsprechende assoziierte Bündel

$$D_s^B M := D^s M \oplus D^{-,s} M$$

   heißt das *Buchdahl-Spinor-Bündel mit Spin* $\frac{s}{2}$. Wegen $\Delta_s^B M \subseteq \Delta^D \otimes \Delta_{s-1}$ lassen sich Schnitte $\psi \in \Gamma(D_s^B M)$ beschreiben als $\psi^{\tilde{A}(A_1 \dots A_{s-1})}$ und auf der 2-Spinor-Ebene als

$$\psi^{\tilde{A}(A_1\dots A_{s-1})} = \begin{pmatrix} (\psi_1)^{A(A_1\dots A_{s-1})} \\ (\psi_2)_{\dot{X}}^{\ (A_1\dots A_{s-1})} \end{pmatrix}$$

Definition II - 7 (Buchdahlgleichungen)**.**

1. Man definiere zunächst die folgenden Differentialoperatoren[4]:
   a) $\mathrm{M}_s : \Gamma(D^{+,s}M) \longrightarrow \Gamma(D^{-,s}M)$
      $(\mathrm{M}_s\, \psi)_{\dot{X}}^{\ A_1\dots A_{s-1}} := \nabla_{\dot{X}A} \psi^{AA_1\dots A_{s-1}}$
   b) $\mathrm{N}_s : \Gamma(D^{-,s}M) \longrightarrow \Gamma(D^{+,s}M)$
      $(\mathrm{N}_s\, \varphi)^{A\ A_1\dots A_{s-1}} := \nabla^{A\dot{X}} \varphi_{\dot{X}}^{\ A_1\dots A_{s-1}}$
   c) $\check{\mathrm{N}}_s : \Gamma(D^{-,s}M) \longrightarrow \Gamma(D^{s}M)$
      $(\check{\mathrm{N}}_s\, \varphi)^{AA_1\dots A_{s-1}} := (\mathrm{N}_s\, \varphi)^{(AA_1\dots A_{s-1})} = \nabla^{(A|\dot{X}} \varphi_{\dot{X}}^{\ |A_1\dots A_{s-1})}$
   d) $\mathrm{P}_s : \Gamma(D^{+,s}M) \longrightarrow \Gamma(D^{+,s}M)$
      $(\mathrm{P}_s\, \psi)^{AA_1\dots A_{s-1}} := \frac{(s-1)(s-2)}{s} \epsilon^{A(A_1|} \Psi^{PQD|A_2} \psi_{PQD}^{\ \ \ \ A_3\dots A_{s-1})}$

2. Für $s \in \mathbb{N}$ definiert man nun die Buchdahl-Gleichungen in verschiedenen Formen. Dabei sind $\mu, \nu \in \mathbb{C},\ \mu \neq 0$ und $(\psi, \varphi)^{\mathrm{tr}} \in D_s^B M$.

[4] Hier bezeichnet Ψ den Weyl-Spinor. Siehe dazu Appendix A.4.

a) *Buchdahl-Gleichungen*

$$\begin{cases} \mathrm{M}_s\,\psi - \mu\varphi = 0 \\ \mathrm{N}_s\,\varphi - \dfrac{1}{\mu}\,\mathrm{P}_s\,\psi - \nu\psi = 0 \end{cases} \tag{B}$$

b) *Buchdahl-Gleichungen nach Wünsch*

$$\begin{cases} \mathrm{M}_s\,\psi - \mu\varphi = 0 \\ \check{\mathrm{N}}_s\,\varphi - \nu\psi = 0 \end{cases} \tag{W}$$

3. Um die Buchdahlgleichungen kompakter schreiben zu können definiert man weiterhin die *Buchdahloperatoren*

   a) nach Buchdahl

$$\mathrm{B_s} : \Gamma(D_s^B M) \longrightarrow \Gamma(D_s^B M)$$
$$\mathrm{B_s} := \begin{pmatrix} -\nu - \frac{1}{\mu}\,\mathrm{P}_s & \mathrm{N}_s \\ \mathrm{M}_s & -\mu \end{pmatrix}$$

   b) nach Wünsch

$$\mathrm{B_s} : \Gamma(D_s^B M) \longrightarrow \Gamma(D_s^B M)$$
$$\mathrm{B_s}^W := \begin{pmatrix} -\nu & \check{\mathrm{N}}_s \\ \mathrm{M}_s & -\mu \end{pmatrix}$$

   Damit lauten die Buchdahlgleichungen $\mathrm{B_s}\,\psi = 0$ beziehungsweise $\mathrm{B_s}^W\,\psi = 0$ mit $\psi \in \Gamma(D_s^B M)$.

Hier wird der Beweis der Äquivalenz der verschiedenen Formulierungen der Buchdahlgleichungen ausgeführt. Dieser liefert einige Gedanken und Rechenschritte, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit wiederholt verwendet werden.

Theorem II - 8 (äquivalente Formulierungen der Buchdahl-Gleichungen Wünsch (1985))**.**
Die Buchdahlgleichungen in den Formen (B) *und* (W) *sind äquivalent.*

Lemma II - 9.
Für $\varphi \in \Gamma(D^{-,s}M)$ und $s \geq 1$ gilt:

$$(\mathrm{N}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} = (\check{\mathrm{N}}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} - \tfrac{(s-1)}{s}\epsilon^{A(A_1|}\nabla^{U\dot{V}}\varphi_{\dot{V}U}{}^{|A_2\ldots A_{s-1})} \tag{II.2}$$

Beweis. Für $s = 1$ ist die Aussage trivial. Man betrachte also $s > 1$. Für die rechte Seite von (II.2) gilt[5]:

$$
\begin{aligned}
&(\check{\mathrm{N}}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} - \frac{(s-1)}{s}\epsilon^{A(A_1|}\nabla^{U\dot{V}}\varphi_{\dot{V}U}{}^{|A_2\ldots A_{s-1})}\\
&= \tfrac{1}{s!}\sum_{\pi\in S_s}\left[\nabla^{A_{\pi()}\dot{X}}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_{\pi(1)}\ldots A_{\pi(s-1)}}\right] - \tfrac{(s-1)}{s(s-1)!}\sum_{\pi\in S_{(s-1)}}\epsilon^{AA_{\pi(1)}}\nabla^{U\dot{V}}\varphi_{\dot{V}U}{}^{A_{\pi(2)}\ldots A_{\pi(s-1)}}\\
&= \tfrac{1}{s(s-1)!}\sum_{\pi\in S_{(s-1)}}\Big[\nabla^{A\dot{X}}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_{\pi(1)}\ldots A_{\pi(s-1)}} + \cdots + \nabla^{A_{\pi(1)}\dot{X}}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_{\pi(2)}\ldots A_{\pi(s-1)A}}\\
&\qquad - (s-1)\epsilon^{AA_{\pi(1)}}\nabla^{U\dot{V}}\varphi_{\dot{V}U}{}^{A_{\pi(2)}\ldots A_{\pi(s-1)}}\Big]
\end{aligned}
$$

Mit $\varphi_{\dot{X}}^{A_1\ldots A_{s-1}} = \varphi_{\dot{X}}^{(A_1\ldots A_{s-1})}$ folgt dann:

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{s}\nabla^{A\dot{X}}\varphi^{A_1\ldots A_{s-1}} + \tfrac{(s-1)}{s!}\sum_{\pi\in S_{(s-1)}}\Big[\nabla^{A_{\pi(1)}\dot{X}}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_{\pi(2)}\ldots A_{s-1}}\\
&\qquad - \epsilon^{AA_{\pi(1)}}\nabla^{U\dot{V}}\varphi_{\dot{V}U}{}^{A_{\pi(1)}\ldots A_{\pi s-1}}\Big]\\
&= \cdots + \tfrac{(s-1)}{s!}\sum_{\pi\in S_{(s-1)}}\left[\nabla^{A_{\pi(1)}\dot{X}}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_{\pi(2)}\ldots A_{s-1}} + \epsilon^{AA_{\pi(1)}}\nabla_U{}^{\dot{V}}\varphi_{\dot{V}}{}^{UA_{\pi(1)}\ldots A_{\pi s-1}}\right]
\end{aligned}
$$

Es gilt $\frac{1}{2}\epsilon^{AB}\psi_C{}^C = \psi^{[AB]}$, damit erhält man:

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{s}\nabla^{A\dot{X}}\varphi^{A_1\ldots A_{s-1}} + \tfrac{(s-1)}{s!}\sum_{\pi\in S_{(s-1)}}\nabla^{A\dot{V}}\varphi_{\dot{V}}{}^{A_{\pi(1)}\ldots A_{\pi s-1}}\\
&= \nabla^{A\dot{X}}\varphi^{A_1\ldots A_{s-1}} = (\mathrm{N}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}}\,\blacksquare
\end{aligned}
$$

Lemma II - 10.
Für $s \geq 2$ und $(\psi,\varphi)^{\mathrm{tr}} \in \Gamma(D_s^B M)$, sowie unter der Voraussetzung, dass $(\psi,\varphi)^{\mathrm{tr}}$ eine Lösung von (W) ist, gilt:

$$
(\check{\mathrm{N}}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} = (\mathrm{N}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} - \tfrac{(s-1)(s-2)}{\mu s}\epsilon^{A(A_1|}\Psi^{EFG|A_2}\psi_{EFG}{}^{A_3\ldots A_{s-1})} \qquad \text{(II.3)}
$$

Beweis. Lemma II - 9 zeigt

$$
(\mathrm{N}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} = (\check{\mathrm{N}}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} - \tfrac{(s-1)}{s}\epsilon^{A(A_1|}\nabla^{U\dot{V}}\varphi_{\dot{V}U}{}^{|A_2\ldots A_{s-1})}
$$

Einsetzen der Voraussetzung (W) ergibt:

$$
\begin{aligned}
&= (\check{\mathrm{N}}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} - \tfrac{(s-1)}{s\mu}\epsilon^{A(A_1|}\nabla^{U\dot{V}}(\mathrm{M}_s\,\psi)_{\dot{V}U}{}^{|A_2\ldots A_{s-1})}\\
&= \cdots + \tfrac{(s-1)}{s\mu}\epsilon^{A(A_1|}\nabla_U{}^{\dot{V}}\nabla_{\dot{V}B}\psi^{BU|A_2\ldots A_{s-1})}\\
&= \cdots - \tfrac{(s-1)}{s\mu}\epsilon^{A(A_1|}\nabla_{U\dot{V}}\nabla^{\dot{V}}{}_B\psi^{BU|A_2\ldots A_{s-1})} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

[5] S_n bezeichnet hier die Symmetrische Gruppe mit n Elementen.

$\psi^{BU|A_2 \dots A_{s-1})} \in \Gamma(D_s^B M)$ ist symmetrisch in allen Indizes. Also lässt sich ($*$) in folgender Form schreiben:

$$
\begin{aligned}
&= \dots - \tfrac{(s-1)}{s\mu} \epsilon^{A(A_1|} \nabla_{(U|\dot{V}} \nabla^{\dot{V}}{}_{|B)} \psi^{BU|A_2 \dots A_{s-1})} \\
&= \dots - \tfrac{(s-1)}{s\mu} \underbrace{\epsilon^{A(A_1|} \epsilon^{BC} \epsilon^{UD} \epsilon^{|A_2|B_2} \dots \epsilon^{|A_{s-1})B_{s-1}}}_{=:\varepsilon} \nabla_{(U|\dot{V}} \nabla^{\dot{V}}{}_{|B)} \psi_{CDB_2 \dots B_{s-1}} \\
&= \dots - \tfrac{(s-1)}{s\mu} \varepsilon \nabla_{(U|\dot{V}} \nabla^{\dot{V}}{}_{|B)} \psi_{CDB_2 \dots B_{s-1}}
\end{aligned}
$$

Die Verwendung der Spinor-Ricci-Identität (A.5) liefert:

$$
\begin{aligned}
&= \dots - \tfrac{(s-1)}{s\mu} \varepsilon \sum_{i=1}^{s-1} \Big[\Psi_{UBB_i}{}^{P} \psi_{CDB_s \dots B_{i-1} P B_{i+1} \dots B_{s-1}} - 2\Lambda \epsilon_{B_i(U|} \psi_{CD \dots |B) \dots B_{s-1}} \Big] \\
&= \dots - \tfrac{(s-1)}{s\mu} \varepsilon \Big[\underbrace{\Psi_{UBC}{}^{P} \psi_{PDB_2 \dots B_{s-1}}}_{=:T_1} - 2 \underbrace{\Lambda \epsilon_{C(U} \psi_{B)DB_2 \dots B_{s-1}}}_{=:T_2} \\
&\qquad + \underbrace{\Psi_{UBD}{}^{P} \psi_{PCB_2 \dots B_{s-1}}}_{=:T_3} - \underbrace{2\Lambda \epsilon_{D(U} \psi_{C|B)B_2 \dots B_{s-1}}}_{=:T_4} \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=2}^{s-1} [\dots] \Big]
\end{aligned}
$$

Unter Ausnutzung der Symmetrien von ψ, ϵ und Ψ erhält man für die Terme T_1 bis T_4 folgende Ergebnisse:

$$
\begin{aligned}
T_1 : \quad & \epsilon^{[BC]} \Psi_{U(BC)}{}^{P} \psi_{PDB_2 \dots B_{s-1}} = 0 \\
T_2 : \quad & \epsilon^{BC} \epsilon^{UD} \Lambda \epsilon_{C(U} \psi_{B)DB_2 \dots B_{s-1}} \\
& = \epsilon^{BC} \epsilon^{UD} \Lambda \epsilon_{CU} \psi_{BDB_2 \dots B_{s-1}} + \epsilon^{BC} \epsilon^{[UD]} \Lambda \epsilon_{CB} \psi_{(UD)B_2 \dots B_{s-1}} \\
& = -2\Lambda \epsilon^{[BD]} \psi_{(BD)B_2 \dots B_{s-1}} = 0
\end{aligned}
$$

Analog zur obigen Betrachtung verschwinden auch T_3 und T_4. Es verbleibt demnach die

Untersuchung der restlichen Summanden.

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^{BC}\epsilon^{UD}\sum_{i=2}^{s-1}\Lambda\epsilon_{B_i(U|}\psi_{CD\ldots|B)\ldots B_{s-1}}\\
&=\epsilon^{[BC]}\epsilon^{[UD]}\sum_{i=2}^{s-1}\left[\Lambda\epsilon_{B_iU}\psi_{(C|D\ldots|B)\ldots B_{s-1}}+\Lambda\epsilon_{B_iB}\psi_{C(D|\ldots|U)\ldots B_{s-1}}\right]=0\\
&\epsilon^{A(A_1|}\epsilon^{BC}\epsilon^{UD}\epsilon^{|A_2|B_2}\ldots\epsilon^{|A_{s-1})B_{s-1}}\sum_{i=2}^{s-1}\Psi_{UBB_i}{}^{P}\psi_{CDB_s\ldots B_{i-1}PB_{i+1}\ldots B_{s-1}}\\
&=\epsilon^{A(A_1}\sum_{i=2}^{s-1}\Psi_{UB}{}^{A_i|P}\psi^{BU|A_2\ldots|}{}_{P}{}^{|\ldots A_{s-1})}\\
&=-\epsilon^{A(A_1}\sum_{i=2}^{s-1}\Psi_{UB}{}^{A_i|}{}_{P}\psi^{BU|A_2\ldots|P|\ldots A_{s-1})}\\
&=-\epsilon^{A(A_1}\sum_{i=2}^{s-1}\Psi_{UB}{}^{A_i|}{}_{P}\psi^{BUP|A_2\ldots\hat{A}_i\ldots A_{s-1})}\\
&=-(s-2)\epsilon^{A(A_1}\Psi_{UB}{}^{A_i|}{}_{P}\psi^{BUP|A_3\ldots\hat{A}_i\ldots A_{s-1})}
\end{aligned}
$$

Also erhält man schließlich

$$(\mathrm{N}_s\,\varphi)^{AA_1\ldots A_{s-1}}=(\check{\mathrm{N}}_s\,\varphi)+\tfrac{(s-1)(s-2)}{s\mu}\epsilon^{A(A_1}\Psi^{A_2|BUP}\psi_{BUP}{}^{|A_3\ldots A_{s-1})}\blacksquare$$

Beweis: Theorem II - 8. Der Beweis von Theorem II - 8 folgt unmittelbar aus Lemma II - 10. ■

Lemma II - 11 (normale Hyperbolizität des Buchdahloperators)**.**
Setze

$$\mathrm{B_s}' := 2\begin{pmatrix}-\nu+\frac{1}{\mu}\,\mathrm{P}_s & \mathrm{N}_s\\ \mathrm{M}_s & -\mu\end{pmatrix}$$

auf $\Gamma(D^B_sM)$ *mit* $s\in\mathbb{N}$. *Dann ist* $\mathrm{B_s}\,\mathrm{B_s}'$ *normal hyperbolisch.*

Beweis.

$$\mathrm{B_s}\,\mathrm{B_s}'=\begin{pmatrix}\nu^2-\frac{1}{\mu^2}\,\mathrm{P}_s^2+\mathrm{N}_s\,\mathrm{M}_s & -(\nu+\mu)\,\mathrm{N}_s-\frac{1}{\mu}\,\mathrm{P}_s\,\mathrm{N}_s\\ -(\nu+\mu)\,\mathrm{M}_s-\frac{1}{\mu}\,\mathrm{M}_s\,\mathrm{P}_s & \mu^2+\mathrm{M}_s\,\mathrm{N}_s\end{pmatrix}$$

$\mathrm{B_s}\,\mathrm{B_s}'$ ist ein Differentialoperator 2. Ordnung. Demzufolge besteht das Hauptsymbol aus den Termen zweiter Ordnung.

$$\mathrm{B_s}\,\mathrm{B_s}'=\begin{pmatrix}2\,\mathrm{N}_s\,\mathrm{M}_s & 0\\ 0 & 2\,\mathrm{M}_s\,\mathrm{N}_s\end{pmatrix}+(\text{Terme der Ordnung}\leq 1)$$

Es ist also die normale Hyperbolizität von $2\,\mathrm{N}_s\,\mathrm{M}_s$ $(2\,\mathrm{M}_s\,\mathrm{N}_s)$ zu zeigen. Sei $\psi \in \Gamma(D^{+,s})$.

$$
\begin{aligned}
&(2\,\mathrm{N}_s\,\mathrm{M}_s\,\psi)^{AA_1\ldots A_{s-1}} = 2\nabla^{A\dot{X}}\nabla_{\dot{X}B}\psi^{BA_1\ldots A_{s-1}}\\
&= 2\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\nabla_C{}^{\dot{X}}\nabla_{\dot{X}B}\psi_D{}^{A_1\ldots A_{s-1}}\\
&= 2\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\nabla_{[C|}{}^{\dot{X}}\nabla_{\dot{X}|B]}\psi_D{}^{A_1\ldots A_{s-1}} + 2\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\underbrace{\nabla_{(C|}{}^{\dot{X}}\nabla_{\dot{X}|B)}\psi_D{}^{A_1\ldots A_{s-1}}}_{\text{Spinor-Ricci-Identität} \Rightarrow \text{Ordnung=0}}\\
&= -\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}\epsilon_{CB}\sigma_\alpha{}^{E\dot{X}}\sigma_{\beta\,\dot{X}E}\nabla^\alpha\nabla^\beta\psi_D{}^{A_1\ldots A_{s-1}} + \ldots\\
&= \epsilon^{AD}g_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\nabla^\beta\psi_D{}^{A_1\ldots A_{s-1}} + \ldots\\
&= g_{\alpha\beta}\nabla^\alpha\nabla^\beta\psi^{AA_1\ldots A_{s-1}} + \ldots
\end{aligned}
$$

Die Berechnung des Hauptsymbols von $2\,\mathrm{M}_s\,\mathrm{N}_s$ liefert in analoger Weise das gleiche Resultat. Demnach ist $\mathrm{B_s}\,\mathrm{B_s}'$ ein normal hyperbolischer Differentialoperator. ∎

Definition II - 12 (avancierte und retardierte Green'sche Operatoren)**.** Sei (M, g) eine zeitorientierte zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit und P ein Differentialoperator auf den Schnitten eines glatten Vektorbündels $\mathcal{E}$ über M.

Eine lineare Abbildung $G_\pm : \Gamma_0(\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E})$ heißt *avancierter (retardierter) Operator von* P, wenn gelten:

- $P \circ G_\pm = \mathrm{id}_{\Gamma_0(\mathcal{E})}$
- $G_\pm \circ P = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathcal{E})}$
- $\forall \varphi \in \Gamma_0(\mathcal{E}) : \mathrm{supp}\,(G_\pm\varphi) \subseteq J_\pm^M(\mathrm{supp}\,(\varphi))$

Korollar II - 13 (Green'sche Operatoren des Buchdahl-Operators)**.** Für den Buchdahloperator existieren eindeutige avancierte und retardierte Green'sche Operatoren.

Beweise dazu finden sich in Mühlhoff (2007)(Theorem 7.3.2 angewendet auf Lemma II - 11) und in Bär et al. (2007).

Theorem II - 14 (Cauchy-Problem für die Buchdahl-Gleichungen)**.**
Für $2 \leq s \in \mathbb{N}$ *hat das Cauchy-Problem*

$$
\begin{cases}
\mathrm{B_s}\,\Phi = 0, & \Phi \in \Gamma(D_s^B M)\\
\Phi|_\Sigma = \Phi_0
\end{cases}
$$

mit den Cauchy-Daten $\Phi_0 \in \Gamma_0(D_s^B\Sigma)$ *genau dann eine eindeutige Lösung, wenn* $\Phi_0 = (\psi_0, \varphi_0)^{\mathrm{tr}}$ *die Bedingung*

$$
\mathfrak{n}_{A_1}{}^{\dot{X}}\left(\tilde{\nabla}_{\dot{X}B}\psi_0{}^{BA_1\ldots A_{s-1}} - \mu\varphi_0{}^{A_1\ldots A_{s-1}}{}_{\dot{X}}\right) = 0
$$

erfüllt. Hier ist Σ *eine glatte raumartige Cauchy-Hyperfläche mit Normalenvektorfeld* $\mathfrak{n}$ *und* $\tilde{\nabla}$ *beschreibt den zu* Σ *tangentialen Anteil von* ∇*.*

Für den Beweis dieses Theorems vgl. Mühlhoff (2007), S.113.

6. Ansätze zur Quantisierung

In diesem Kapitel wird zunächst die Quantisierung des Diracfeldes nach Dimock (1982) als Prototyp für die Quantisierung höherer Spinorfelder beschrieben. Im weiteren werden dann die Ansätze von Illge (1993) und Mühlhoff (2007) zur Quantisierung von massiven Felder höheren Spins zusammengefasst. Die in diesen auftretenden Probleme werden im darauf folgenden Abschnitt des Kapitels noch einmal aufgegriffen und wir schlagen einen weiteren Ansatz zur Quantisierung höherer Spinorfelder vor, den wir anhand des aus physikalischer Sicht am relevantesten erscheinenden, sowie rechnerisch am einfachsten zu handhabenden Beispiels mit $s = 3$ untersuchen.

6.1. Die Quantisierung des Dirac-Feldes

Anhand der Quantisierung des Dirac-Feldes soll das prinzipielle Verfahren zur Quantisierung der höheren Spinorfelder erläutert werden.

Das Ziel der Quantisierung im Rahmen der Algebraischen Quantenfeldtheorie ist die Konstruktion der unitalen C^*- bzw. $*$-Algebra der Observablen.

Dazu ist zunächst die Konstruktion der Feldoperatoren als operatorwertige Distributionen notwendig. Da im vorliegenden Fall massive fermionische Felder beschrieben werden sollen, fordert man von den Feldern kanonische Antikommutatorrelationen (CAR)

$$\{\Phi^*(f), \Phi(g)\} = \langle f, g \rangle \mathbb{1}.$$

Diese Forderung soll nun mathematisch präzisiert werden.

Definition II - 15 (CAR-Algebra)**.** Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbertraum. Eine unitale C^*-Algebra $CAR(\mathcal{H})$ mit einer $\mathbb{C}$-antilinearen Einbettung $\iota : \mathcal{H} \longrightarrow CAR(\mathcal{H})$ heißt *CAR-Algebra von $\mathcal{H}$*, wenn

1. $CAR(\mathcal{H})$ von $\iota(\mathcal{H}) \cup \{\mathbb{1}\}$ erzeugt wird und
2. für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gelten
   - $\{\iota(x), \iota(y)^*\} = \langle x, y \rangle \mathbb{1}$,
   - $\{\iota(x), \iota(y)\} = 0$.

   wobei man mit $\{\cdot, \cdot\}$ den Antikommutator bezeichnet.

Die Grundlegende Idee zur Quantisierung nach Dimock (1982) besteht darin, auf dem Raum der Cauchydaten der Bewegungsgleichung des klassischen Systems ein Skalaprodukt zu definieren, und für die Vervollständigung dieses Prähilbertraumes dann die

CAR-Algebra zu konstruieren. Zunächst scheint diese Konstruktion eine beliebige Anzahl an quantisierten Theorien zu ermöglichen, da die Einschränkung des Lösungsraumes auf eine beliebige Cauchyfläche eine zulässige Menge an Anfangsbedingungen darstellt. Die Tatsache, dass die Konstruktion eindeutig ist, folgt aus der Eigenschaft des Skalarproduktes unabhängig von der gewählten Cauchyfläche zu sein. Da der Dirac-Fall bisher der einzige Fall ist, für den alle notwendigen Bedingungen erfüllt sind, werden die Beweise der zentralen Eigenschaften des Stromes hier als Beispiel angegeben.

Unabhängigkeit von j_Σ von der Cauchy-Fläche Σ im Dirac-Fall $s = 1$ Es zeigt sich, dass im Dirac-Fall ($s = 1$) die Sesquilinearform j_Σ aus (I.4) Unabhängig von der gewählten Cauchy-Fläche ist (vgl. (Dimock, 1982)).

Seien $\varphi, \psi \in \Gamma\left(D^D M\right) = \Gamma\left(D_1^B M\right)$ Lösungen des Cauchy-Problems für die Buchdahlgleichungen mit $s = 1$ (vgl. Theorem II - 14), dann ist

$$j_\Sigma(\varphi,\psi) = \int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\ \mathfrak{n}_\alpha \left[\overline{\varphi_2}_A \sigma^{\alpha\dot{X}A}\psi_{2\dot{X}} + \overline{\varphi_1}^{\dot{Y}}\sigma^\alpha{}_{B\dot{Y}}\psi_1{}^B\right]. \tag{II.1}$$

Sei $\Sigma \subseteq M$ eine beliebige Cauchy-Fläche. Dann existieren $f, g \in \Gamma_0\left(D_s^B M\right)$, so dass für φ und ψ gelten

$$\begin{aligned} Gf &= \varphi, \\ Gg &= \psi. \end{aligned}$$

Weiterhin sind $\varphi|_\Sigma$ und $\psi|_\Sigma$ gültige Randbedingungen für das Cauchy-Problem. Also erhält man aus (II.1)[1]:

$$\begin{aligned} & -i\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\ \mathfrak{n}_a (Gf)^+\gamma^a(Gg) \\ =& -i\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\ \mathfrak{n}_a \left((G^- - G^+)f\right)^+\gamma^a(Gg) \\ =& -i\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\ \mathfrak{n}_a (G^- f)^+\gamma^a(Gg) + i\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\ \mathfrak{n}_a (G^+ f)^+\gamma^a(Gg) \end{aligned}$$

[1] Um die physikalischen Bewegungsgleichungen zu erhalten setzt man in den Buchdahloperatoren $\mu = \nu = im$.

Mit dem Satz von Stokes[2]folgt:

$$
\begin{aligned}
&= i \int\limits_{J^+(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, \gamma^a \nabla_a \left[(G^- f)^+ (Gg)\right] + i \int\limits_{J^-(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, \gamma^a \nabla_a \left[(G^+ f)^+ (Gg)\right] \\
&= i \int\limits_{J^+(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, \Big[\left[\gamma^a \nabla_a (G^- f)^+\right](Gg) + (G^- f)^+ \left[\gamma^a \nabla_a (Gg)\right] + m (G^- f)^+ (Gg) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - m (G^- f)^+ (Gg)\Big] \\
&\quad + i \int\limits_{J^-(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, \Big[\left[\gamma^a \nabla_a (G^+ f)^+\right](Gg) + (G^+ f)^+ \left[\gamma^a \nabla_a (Gg)\right] + m (G^+ f)^+ (Gg) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - m (G^+ f)^+ (Gg)\Big] \\
&= \int\limits_{J^+(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, \left[D G^- f\right]^+ (Gg) + \int\limits_{J^+(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, \left[G^- f\right]^+ (DGg) \\
&\quad + \int\limits_{J^-(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, \left[D G^+ f\right]^+ (Gg) + \int\limits_{J^-(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, \left[G^+ f\right]^+ (DGg)
\end{aligned}
$$

Der jeweils zweite Term in den vorherigen zwei Zeilen verschwindet wegen der Trägereigenschaften von $G^{\pm} f$.

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{J^+(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, f^+ (Gg) + \int\limits_{J^-(\Sigma)} \mathrm{d}_g\, x\, f^+ (Gg) \\
&= \int\limits_{M} \mathrm{d}_g\, x\, f^+ (Gg)
\end{aligned}
$$

Positivität Die Positivität der Sesquilinearform folg unmittelbar aus dem folgenden Lemma II-16.

Lemma II-16 (Mühlhoff (2007), Lemma 9.2.3)**.**
Für $\psi \in \Delta_{\frac{1}{2},0}$, $\psi \neq 0$ gilt:

$$
x^a := \sigma^a{}_{A\dot{X}} \psi^A \overline{\psi}^{\dot{X}} \tag{$*$}
$$

ist eine lichtartiges zukunftsorientiertes Element von$(\mathbb{R}^4, \eta)$. Dabei ist $\sigma^a{}_{A\dot{X}}$ der faserweise definierte Tensor-Spinor.

[2]Die Cauchy-Fläche wird zunächst zu der geschlossenen Oberfläche $\partial J^{\pm}(\Sigma)$ ergänzt. Die übrigen Randflächen tragen aufgrund der Trägereigenschaften nicht zum Integral bei. Weiterhin trägt das Vorzeichen des 1. Terms der Orientierung des Normalenvektorfeldes $\mathfrak{n}$ Rechnung.

Beweis.

- Man wähle zunächst die Standardbasen
  - $\{e_\mu\}$ für $(\mathbb{R}^4, \eta)$
  - $\{E_l\}$ als Spinorbasis für $\Delta_{\frac{1}{2},0}$

  Mit dieser Wahl hat $(*)$ in Komponenten geschrieben folgende Form[3]

$$x^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\sigma}^\alpha{}_{l\dot{m}} \psi^l \overline{\psi}^{\dot{m}}$$

  Damit berechnet man

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi}^1, \overline{\psi}^2\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\psi}^1 \psi^2 + \overline{\psi}^2 \psi^1\right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re}\left(\psi^1 \overline{\psi}^2\right). \end{aligned}$$

  Für die übrigen Komponenten erhält man in analoger Weise

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\psi^1\right|^2 + \left|\psi^2\right|^2 \right), \\ x^2 &= \sqrt{2} \operatorname{Im}\left(\psi^1 \overline{\psi}^2\right), \\ x^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\psi^1\right|^2 - \left|\psi^2\right|^2 \right). \end{aligned}$$

  Also ist $x^\alpha \in \mathbb{R}^4$ und $x^0 > 0$. Es verbleibt also die Lichtartigkeit von x^α zu zeigen.

$$\begin{aligned} 2\left[\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2\right] &= \left(\overline{\psi}^1 \psi^2 + \overline{\psi}^2 \psi^1\right)^2 - \left(\overline{\psi}^1 \psi^2 - \overline{\psi}^2 \psi^1\right)^2 \\ &\quad + \left(\left|\psi^1\right|^2 - \left|\psi^2\right|^2 \right)^2 \\ &= \left(\left|\psi^1\right|^2 + \left|\psi^2\right|^2 \right)^2 \\ &= 2\left(x^0\right)^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.2. Lagrange-Formalismus für die Buchdahl-Gleichungen

In diesem Abschnitt wird der von Illge (1993) vorgeschlagene Lagrange-Formalismus für die Buchdahlgleichungen zusammengefasst.

[3] $\{\tilde{\sigma}^\alpha\}_{\alpha \in \{0,1,2,3\}}$ bezeichnen dabei die Pauli Matrizen.

Theorem II - 17 (Lagrange-Dichte).
Seien $\Psi = (\varphi, \chi)^{\mathrm{tr}} \in \Gamma(D_s^B M)$ *und* $\Sigma = (\bar{\xi}, \bar{\vartheta})^{\mathrm{tr}} \in \Gamma(D_s^B M)$. *Für die Lagrange-Dichte*[4]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\left(\frac{s}{2}\right)} =& a\left((\mathrm{M}_s\,\varphi, \bar{\vartheta}) + (\xi, \mathrm{M}_s\,\bar{\varphi})\right)\\ &+ b\left((\varphi, \check{\mathrm{N}}_s\,\bar{\vartheta}) + (\check{\mathrm{N}}_s\,\chi, \bar{\xi})\right)\\ &+ \bar{a}\left((\check{\mathrm{N}}_s\,\bar{\varphi}, \vartheta) + (\bar{\xi}, \check{\mathrm{N}}_s\,\xi)\right)\\ &+ \bar{b}\left((\bar{\varphi}, \mathrm{M}_s\,\vartheta) + (\mathrm{M}_s\,\bar{\chi}, \xi)\right)\\ &+ (a+b)\left(\mu(\chi, \bar{\vartheta}) - \nu(\varphi, \bar{\xi})\right)\\ &+ (\bar{a}+\bar{b})\left(\bar{\mu}(\bar{\chi}, \vartheta) - \bar{\nu}(\bar{\varphi}, \xi)\right)\end{aligned}$$

mit $a =$ konst., $b =$ konst. *sowie* $a + b \neq 0$ *sind die Euler-Lagrange Gleichungen:*

$$\begin{cases}\mathrm{B_s}\,\Psi = 0\\ \mathrm{B_s}\,\Sigma = 0\end{cases} \tag{B}$$

Beweis. Zur Aufstellung der Euler-Lagrange Gleichungen sind die folgenden Ableitungen zu berechnen:

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{\left(\frac{s}{2}\right)}}{\partial\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}^{\left(\frac{s}{2}\right)}}{\partial\left(\nabla_{B\dot{Y}}\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}\right)}$$

Dazu betrachtet man φ und $\bar{\varphi}$ als uabhängige Felder. Die zur Berechnung zu berücksichtigenden Terme von $\mathcal{L}^{\left(\frac{s}{2}\right)}$ (im Sinne von $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi}$) sind

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= a(\mathrm{M}_s\,\varphi, \bar{\vartheta}) + b(\varphi, \check{\mathrm{N}}_s\,\bar{\vartheta}) - \nu(a+b)(\varphi, \bar{\xi})\\ &= a\left(\nabla^A{}_{\dot{X}}\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}\right)\bar{\vartheta}^{\dot{X}A_1\ldots A_{s-1}} + b\,\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}\left(\nabla^{\dot{X}(A}\bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1})}\right)\\ &\qquad\qquad -\nu(a+b)\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}\bar{\xi}^{AA_1\ldots A_{s-1}}\end{aligned}$$

Man erhält also

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{\left(\frac{s}{2}\right)}}{\partial\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}} = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}} = b\nabla^{\dot{X}(A}\bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1})} - \nu(a+b)\bar{\xi}^{AA_1\ldots A_{s-1}}.$$

Man berechnet nun die Ableitung nach den Feldimpulsen:

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\left(\nabla_{B\dot{Y}}\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}\right)} = \frac{\partial}{\partial\nabla\varphi}\left[a\epsilon^{AC}\nabla_{C\dot{X}}\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}\bar{\vartheta}^{\dot{X}A_1\ldots A_{s-1}}\right] \tag{II.2}$$

Aus der Symmetrie von φ ergibt sich

$$\begin{aligned}&\epsilon^{AC}\nabla_{C\dot{X}}\varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}\bar{\vartheta}^{\dot{X}A_1\ldots A_{s-1}}\\ &= \epsilon^{[A|C}\nabla_{C\dot{X}}\varphi_{(AA_1\ldots A_{s-1})}\bar{\vartheta}^{\dot{X}|A_1\ldots A_{s-1}]} + \epsilon^{(A|C}\nabla_{C\dot{X}}\varphi_{(AA_1\ldots A_{s-1})}\bar{\vartheta}^{\dot{X}|A_1\ldots A_{s-1})}\\ &= \epsilon^{(A|C}\nabla_{C\dot{X}}\varphi_{(AA_1\ldots A_{s-1})}\bar{\vartheta}^{\dot{X}|A_1\ldots A_{s-1})}\end{aligned}$$

[4] Dabei bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ die vollständige Kontraktion der Spinoren.

Damit ergibt sich für (II.2)

$$= a\epsilon^{(A|B}\bar{\vartheta}^{\dot{Y}|A_1\dots A_{(s-1)})}$$

Insgesammt ergeben sich damit die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Variation nach φ zu

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{s}{2})}}{\partial \varphi_{AA_1\dots A_{s-1}}} - \nabla_{B\dot{Y}} \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{s}{2})}}{\partial\left(\nabla_{B\dot{Y}}\varphi_{AA_1\dots A_{s-1}}\right)} \\
&= \nabla^{\dot{X}(A}\bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\dots A_{s-1})} - \nu(a+b)\bar{\xi}^{AA_1\dots A_{s-1}} - a\nabla_{B\dot{Y}}\epsilon^{(A|B}\bar{\vartheta}^{\dot{Y}|A_1\dots A_{(s-1)})} \\
&= \dots - a\nabla^{(A|}{}_{\dot{Y}}\bar{\vartheta}^{\dot{Y}|A_1\dots A_{(s-1)})} \\
&= \dots + a\nabla^{(A|\dot{Y}}\bar{\vartheta}_{\dot{Y}}{}^{|A_1\dots A_{(s-1)})} \\
&= (a+b)\left(\nabla^{\dot{X}(A}\bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\dots A_{s-1})} - \nu\bar{\xi}^{AA_1\dots A_{s-1}}\right).
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 0 = \nabla^{\dot{X}(A|}\bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{|A_1\dots A_{s-1})} - \nu\bar{\xi}^{AA_1\dots A_{s-1}}.$$

Diese Gleichung ist eine Komponente von (B). Die übrigen Buchdahlgleichungen ergeben sich in analoger Weise durch Variation nach den Feldern ξ, χ und ϑ. ■

Hier zeigen wir explizit, dass der von Illge definierte Strom erhalten ist.

Theorem II - 18 (Dirac-Strom)**.**
Für Lösungen der Buchdahlgleichungen (B) $\Psi = (\varphi, \chi)^{\mathrm{tr}} \in \Gamma(D_s^B M)$ *und* $\Sigma = (\bar{\xi}, \bar{\vartheta})^{\mathrm{tr}} \in \Gamma(D_s^B M)$ *ist*

$$\begin{aligned}
j_{A\dot{X}} := i\,e\,\Big[&k\left(\varphi_{AA_1\dots A_{s-1}}\bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\dots A_{s-1}} + \chi_{\dot{X}A_1\dots A_{s-1}}\bar{\xi}_A{}^{A_1\dots A_{s-1}}\right) \\
&-\bar{k}\left(\bar{\varphi}_{\dot{X}\dot{X}_1\dots \dot{X}_{s-1}}\vartheta_A{}^{\dot{X}_1\dots\dot{X}_{s-1}} + \bar{\chi}_{A\dot{X}_1\dots\dot{X}_{s-1}}\xi_{\dot{X}}{}^{\dot{X}_1\dots\dot{X}_{s-1}}\right)\Big]
\end{aligned}$$

mit $e \in \mathbb{R}$ *und* $k \in \mathbb{C}$ *ein erhaltener Strom* [5], *d.h.* $\nabla^{A\dot{X}} j_{A\dot{X}} = 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\nabla^{A\dot{X}} j_{A\dot{X}} = i\,e\,k\Big[&\underbrace{\left(\nabla^{A\dot{X}}\varphi_{AA_1\dots A_{s-1}}\right)\bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\dots A_{s-1}}}_{=:T_1} + \underbrace{\varphi_{AA_1\dots A_{s-1}}\left(\nabla^{A\dot{X}}\bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\dots A_{s-1}}\right)}_{=:T_2} \\
&+ \underbrace{\left(\nabla^{A\dot{X}}\chi_{\dot{X}A_1\dots A_{s-1}}\right)\bar{\xi}_A{}^{A_1\dots A_{s-1}}}_{=:T_3} + \underbrace{\chi_{\dot{X}A_1\dots A_{s-1}}\left(\nabla^{A\dot{X}}\bar{\xi}_A{}^{A_1\dots A_{s-1}}\right)}_{=:T_4}\Big] \\
&- i\,e\,\bar{k}\left[\overline{T_1} + \overline{T_2} + \overline{T_3} + \overline{T_4}\right]
\end{aligned}$$

[5] Für $k = (a+b)$ aus Theorem II - 17, erhält man den Strom $j_{A\dot{X}}$ auch aus der Betrachtung der $U(1)$-Eichsymmetrie der Lagrange-Dichte. Siehe dazu (Illge, 1993).

Es bietet sich an, die folgenden Summen von jeweils zwei der Terme T_i, $i \in \underline{4}$ zu betrachten.

$$T_2 + T_3 = \varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}} \left(\nabla^{A\dot{X}} \bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1}}\right) + \left(\nabla^{A\dot{X}} \chi_{\dot{X}A_1\ldots A_{s-1}}\right) \bar{\xi}_A{}^{A_1\ldots A_{s-1}} \qquad (*)$$

Aus den Symmetrien von $\varphi^{AA_1\ldots A_{s-1}} \in \Gamma(D^s M)$ und $\bar{\xi}^{AA_1\ldots A_{s-1}} \in \Gamma(D^s M)$, sowie (Penrose und Rindler, 1984a, Proposition 3.3.54, S. 140), folgt

$$= \varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}} \left(\nabla^{(A|\dot{X}} \bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{|A_1\ldots A_{s-1})}\right) - \left(\nabla_{(A|}{}^{\dot{X}} \chi_{\dot{X}|A_1\ldots A_{s-1})}\right) \bar{\xi}_A{}^{A_1\ldots A_{s-1}} \qquad \text{(II.3)}$$

$$= \varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}} \left(\check{\mathrm{N}}_s\, \bar{\vartheta}\right)^{AA_1\ldots A_{s-1}} - \left(\check{\mathrm{N}}_s\, \chi\right)_{AA_1\ldots A_{s-1}} \bar{\xi}^{AA_1\ldots A_{s-1}} \qquad \text{(II.4)}$$

Die Buchdahlgleichungen (B) liefern dann

$$= \nu \varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}} \bar{\xi}^{AA_1\ldots A_{s-1}} - \nu\, \varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}} \bar{\xi}^{AA_1\ldots A_{s-1}} \qquad \text{(II.5)}$$

$$= 0 \qquad \text{(II.6)}$$

$$\begin{aligned}
T_1 + T_4 &= \left(\nabla^{A\dot{X}} \varphi_{AA_1\ldots A_{s-1}}\right) \bar{\vartheta}_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1}} + \chi_{\dot{X}A_1\ldots A_{s-1}} \left(\nabla^{A\dot{X}} \bar{\xi}_A{}^{A_1\ldots A_{s-1}}\right) \\
&= (-1)^{s+1} \left(\nabla_{A\dot{X}} \varphi^{AA_1\ldots A_{s-1}}\right) \bar{\vartheta}^{\dot{X}}{}_{A_1\ldots A_{s-1}} + \chi_{\dot{X}A_1\ldots A_{s-1}} \left(\nabla^{A\dot{X}} \bar{\xi}_A{}^{A_1\ldots A_{s-1}}\right) \\
&= (-1)^{s+1} \left(\mathrm{M}_s\, \varphi\right)_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1}} + \chi^{\dot{X}}{}_{A_1\ldots A_{s-1}} \left(\mathrm{M}_s\, \bar{\xi}\right)_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1}}
\end{aligned}$$

In diesem Fall folgt aus den Buchdahlgleichungen

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{s+2} \mu\, \chi_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1}} \bar{\vartheta}^{\dot{X}}{}_{A_1\ldots A_{s-1}} - \mu\, \chi^{\dot{X}}{}_{A_1\ldots A_{s-1}} \vartheta_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Verbleibenden Summanden in $(*)$ verschwinden auf Grund der Antilinearität der komplexen Konjugation. ■

Man erhält also aus der Lagrange-Dichte einen erhaltenen Strom. Allerdings ist die Interpretation des zweiten Satzes an Feldern, der für die Konstruktion notwendig ist, nicht geklärt. Um aufbauend auf dem hier konstruierten Skalarprodukt eine Quantisierung nach Abschnitt 6.1 durchzuführen, müssen die zusätzlichen Feldern von den ursprünglichen in einer Weise abhängen, so dass das Integral des Stromes über eine Cauchyfläche positiv definit ist. Man stösst an dieser Stelle auf ein grundsätzliche Problem bei der Quantisierung von höheren Spinorfeldern. Dieses wird in Abschnitt 6.4.2 genauer beschrieben.

6.3. Konstruktion eines Skalarproduktes

Der folgende Abschnitt liefert eine Wiederholung der Konstruktion und der Ergebnisse von Mühlhoff (2007).

Definition II - 19 (verallgemeinerter Dirac-adjungierter Spinor)**.** Sei $\Phi = \left(\psi^{AA_1\ldots A_{s-1}}, \varphi_{\dot{X}}{}^{A_1\ldots A_{s-1}}\right)^{\mathrm{tr}} \in \Gamma\left(D_s^B M\right)$ ein Buchdahl-Spinor, dann definiert man durch

$$\Phi^+ := \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_A{}^{\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-1}} \\ \overline{\psi}^{\dot{X}\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-1}} \end{pmatrix} = \left(\Phi^+\right)_{\tilde{A}}{}^{\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-1}} \in \Gamma\left(\overline{D}_s^B\right) \subseteq \Gamma\left(D^{D*}M \otimes D^{\left(0,\frac{s-1}{2}\right)}M\right)$$

den *verallgemeinerten Dirac-adjungierten Spinor*.

Definition II - 20. Sei $\Sigma \subseteq M$ eine glatte raumartige Cauchy-Hyperfläche mit einem zukunftsorientierten normierten Normalenvektorfeld $\mathfrak{n}^a$. Man definiert

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} &:= \mathfrak{n}_a \gamma^{a\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} \\ \mathfrak{n}_{\dot{X}A} &:= \sigma_{a\dot{X}A}\mathfrak{n}^a \end{aligned}$$

Es folgt das zentrale Theorem dieses Abschnittes.

Theorem II - 21 (Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_\Sigma^s$)**.**
Für Σ und $\mathfrak{n}^a$ wie zuvor definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} b_\Sigma^s : \Gamma_0\left(D_s^B M\right) \times \Gamma_0\left(D_s^B M\right) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \int_\Sigma d\mu_\Sigma \left(\varphi^+\right)_{\tilde{A}}{}^{\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-1}} \mathfrak{n}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} \mathfrak{n}_{\dot{X}_1 A_1} \ldots \mathfrak{n}_{\dot{X}_{s-1}A_{s-1}} \psi^{\tilde{B}A_1\ldots A_{s-1}} \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf $\Gamma_0\left(D_s^B M\right) \supseteq \mathcal{H}_\Sigma^s$.

Es werden zunächst zwei Lemmata bewiesen, aus denen die Aussage folgt.

Lemma II - 22.
Jeder lichtartige und zukunftsorientierte Vektor $x^a \in \left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$ lässt sich schreiben als

$$x^a = \sigma^a{}_{A\dot{X}} \psi^A \overline{\psi}^{\dot{X}}$$

mit einem $\psi \in \Delta_{\frac{1}{2},0}$.

Beweis.

- Man wähle nunächst wiederum die Standardbasen von $\Delta_{\frac{1}{2},0}$ und $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$.
- Sei $\tilde{\varphi} \in \Delta^{\frac{1}{2},0}$ beliebig. Dann ist nach Lemma II - 16 $\tilde{y}^a = \sigma^a{}_{A\dot{X}} \tilde{\varphi}^A \overline{\tilde{\varphi}}^{\dot{X}}$ lichtartig und zukunftsorientiert.
- Wegen $x^0, \tilde{y}^0 > 0$ existiert nun ein $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $x^0 = \mu\tilde{y}^0$.
- Für $\varphi^a := \sqrt{\mu}\tilde{\varphi}^a$ gilt also $y^0 = x^0$ und y^a ist lichtartig.
- Es existiert also eine räumliche Drehung $L \in \mathcal{L}_\uparrow^+$, so dass $x = L(y)$.

- Sei $S \in SL(2,\mathbb{C})$, so dass $\Lambda(S) = L$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x = L(y) &= \sigma^{-1}\left(D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(S)\sigma(y)\right) \\ &= \sigma^a{}_{A\dot{X}} S^A{}_C \overline{S}^{\dot{X}}{}_{\dot{Z}} \sigma_b{}^{C\dot{Z}} \left(\sigma^b{}_{B\dot{Y}} \varphi^B \overline{\varphi}^{\dot{Y}}\right) \\ &= \sigma^a{}_{A\dot{X}} S^A{}_C \overline{S}^{\dot{X}}{}_{\dot{Z}} \varphi^C \overline{\varphi}^{\dot{Z}} \\ &= \sigma^a{}_{A\dot{X}} (S\varphi)^A \left(\overline{S\varphi}\right)^{\dot{X}} \end{aligned}$$

  Mit $\psi := S\varphi$ gilt also $x^a = \sigma^a{}_{A\dot{X}} \psi^A \overline{\psi}^{\dot{X}}$.■

Lemma II-23.
Sei $\varphi \in \left(\Delta_{\frac{1}{2},0}\right)^{\otimes r} \otimes \left(\Delta_{0,\frac{1}{2}}\right)^{\otimes s}, \quad \varphi^{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_s} \neq 0$. *Mit*

$$\varphi^{a_1\ldots a_r b_1\cdots_s} := \sigma^{a_1}{}_{A_1\dot{X}_1}\ldots\sigma^{a_r}{}_{A_r\dot{X}_r}\sigma^{b_1}{}_{B_1\dot{Y}_1}\ldots\sigma^{b_s}{}_{B_s\dot{Y}_s}\varphi^{A_1\ldots A_r\dot{X}_1\ldots\dot{X}_r}\overline{\varphi}^{\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_r B_1\ldots B_s}$$

und $\mathfrak{n}^a$ *wie zuvor gilt*

$$\mathfrak{n}_{a_1}\ldots\mathfrak{n}_{a_r}\mathfrak{n}_{b_1}\ldots\mathfrak{n}_{b_s}\varphi^{a_1\ldots a_r b_1\ldots b_s} \in \mathbb{R}_{>0} \tag{II.7}$$

Beweis.

1. Man betrachte die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} b_{\mathfrak{n}} : \Delta_{\frac{1}{2},0} \times \Delta_{\frac{1}{2},0} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\varphi,\psi) &\longmapsto \mathfrak{n}_{A\dot{X}}\psi^A\overline{\varphi}^{\dot{X}} \end{aligned}$$

   - $b_{\mathfrak{n}}$ ist sesquilinear.
   - $\mathfrak{n}^a \in \mathbb{R}^4$, also ist $\mathfrak{n}^{A\dot{X}} = \mathfrak{n}^a\sigma_a{}^{A\dot{X}} = \mathfrak{n}^a\overline{\sigma_a}^{\dot{X}A} = \overline{\mathfrak{n}}^a\overline{\sigma_a}^{\dot{X}A} = \overline{\mathfrak{n}}^{\dot{X}A}$. Daraus folgt $\overline{b_{\mathfrak{n}}(\varphi,\psi)} = \overline{\mathfrak{n}_{A\dot{X}}\psi^A\overline{\varphi}^{\dot{X}}} = \overline{\mathfrak{n}}_{A\dot{X}}\overline{\psi}^{\dot{X}}\varphi^A = \mathfrak{n}_{A\dot{X}}\varphi^A\overline{\psi}^{\dot{X}} = b_{\mathfrak{n}}(\psi,\varphi)$. $b_{\mathfrak{n}}$ ist also eine hermitesche Sesquilinearform.
   - Mit Lemma II-16 gilt außerdem

$$b_{\mathfrak{n}}(\psi,\psi) = \mathfrak{n}_{A\dot{X}}\psi^A\overline{\psi}^{\dot{X}} = \mathfrak{n}^a\sigma_{aA\dot{X}}\psi^A\overline{\psi}^{\dot{X}} > 0,$$

     da $\mathfrak{n}^a$ zeitartig, y^a lichtartig sowie beide Vektoren zukunftsorientiert sind.

   $b_{\mathfrak{n}}$ ist also ein hermitesches Skalarprodukt auf $\Delta_{\frac{1}{2},0}$.

2. Sei $\{B_1, B_2\}$ eine bzgl. $b_{\mathfrak{n}}$ orthonormale Basis von $\Delta_{\frac{1}{2},0}$ und $\{\overline{B}_1,\overline{B}_2\}$ die entsprechende komplex konjugierte Basis von $\Delta_{0,\frac{1}{2}}$. In Koordinatenschreibweise ist also

$$\varphi = \varphi^{\alpha_1\ldots\alpha_r\dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_s} B_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes B_{\alpha_r}\otimes\overline{B}_{\dot{\beta}_1}\otimes\cdots\otimes\overline{B}_{\dot{\beta}_s}$$

Setzt man diese Darstellung in (II.7) ein, so erhält man

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{n}_{a_1} \dots \mathfrak{n}_{a_r} \mathfrak{n}_{b_1} \dots \mathfrak{n}_{b_s} \varphi^{a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s} \\
&= \mathfrak{n}_{A_1 \dot{X}_1} \dots \mathfrak{n}_{C_s \dot{Y}_s} \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} \overline{\varphi}^{\dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_s \nu_1 \dots \nu_s} \\
&\qquad (B_{\alpha_1})^{A_1} \otimes \dots \otimes (\overline{B}_{\dot{\beta}_s})^{\dot{Y}_s} \otimes (\overline{B}_{\dot{\mu}_1})^{\dot{X}_1} \otimes \dots \otimes (B_{\nu_s})^{C_s} \\
&= \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} \overline{\varphi}^{\dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_s \nu_1 \dots \nu_s} b_{\mathfrak{n}} \left(B_{\dot{\mu}_1}, B_{\alpha_1}\right) \dots \overline{b_{\mathfrak{n}}} \left(\overline{B}_{\dot{\beta}_s}, \overline{B}_{\nu_s}\right).
\end{aligned}
$$

Da $\{B\}$ und $\{\overline{B}\}$ nach Voraussetzung Orthonormalbasen sind, ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
&= \varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} \overline{\varphi}^{\dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_s \nu_1 \dots \nu_s} \delta_{\alpha_1 \dot{\mu}_1} \dots \delta_{\dot{\beta}_s \nu_s} \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_r \\ \dot{\nu}_1 \dots \dot{\nu}_s}} |\varphi^{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\nu}_1 \dots \dot{\nu}_s}|^2 > 0,
\end{aligned}
$$

da nach Voraussetzung $\varphi \neq 0$ und $\mathfrak{n} \neq 0$.■

Den Abschluss der Betrachtungen des Skalarproduktes bildet die Diskussion des Transformationsverhaltens.

Korollar II - 24 (Verhalten von b^s_Σ unter Koordinatentransformationen)**.** Die hermitesche Sesquilinearform b^s_Σ ist invariant unter $SL(2, \mathbb{C})$-Transformationen.

Beweis. Seien $\psi, \varphi \in \mathcal{H}^s_\Sigma$, dann ist mit $S \in SL(2, \mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
&b^s_\Sigma \left(D^B_s(S)\varphi, D^B_s(S)\psi\right) \\
&= \int_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \left(D^B_s(S)\varphi\right)^{+\ \dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s-1}}_{\tilde{A}} \mathfrak{n}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} \mathfrak{n}_{\dot{X}_1 A_1} \dots \mathfrak{n}_{\dot{X}_{s-1} A_{s-1}} \left(D^B_s(S)\psi\right)^{\tilde{B} A_1 \dots A_{s-1}} \\
&= \int_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \Big[\underbrace{\overline{D^s(S)\varphi_1}^{\dot{X} \dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s-1}} \mathfrak{n}_{\dot{X} A} \mathfrak{n}_{\dot{X}_1 A_1} \dots \mathfrak{n}_{\dot{X}_{s-1} A_{s-1}} \left(D^s(S)\psi_1\right)^{A A_1 \dots A_{s-1}}}_{=: T_1} \\
&\qquad + \underbrace{\overline{D^{-,s}(S)\varphi_2}_A{}^{\dot{X}_1 \dots \dot{X}_{s-1}} \mathfrak{n}^{\dot{X} A} \mathfrak{n}_{\dot{X}_1 A_1} \dots \mathfrak{n}_{\dot{X}_{s-1} A_{s-1}} \left(D^{-,s}(S)\psi_2\right)_A{}^{A_1 \dots A_{s-1}}}_{=: T_2} \Big].
\end{aligned}
$$

Für die Summanden T_1 und T_2 erhält man folgendes:

$$
\begin{aligned}
T_1 :& \\
&\overline{D^s(S)\varphi_1}^{\dot{X}\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-1}}\mathfrak{n}_a\sigma^a{}_{\dot{X}A}\ldots\mathfrak{n}_{a_{s-1}}\sigma^{a_{s-1}}{}_{\dot{X}_{s-1}A_{s-1}}\left(D^s(S)\psi_1\right)^{AA_1\ldots A_{s-1}} \\
&= \overline{S}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\ldots\overline{S}^{\dot{X}_{s-1}}{}_{\dot{Y}_{s-1}}\overline{\varphi_1}^{\dot{Y}\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_{s-1}}\mathfrak{n}_a\sigma^a{}_{\dot{X}A}\ldots\mathfrak{n}_{a_{s-1}}\sigma^{a_{s-1}}{}_{\dot{X}_{s-1}A_{s-1}}S^A{}_B\ldots S^{A_{s-1}}{}_{B_{s-1}}\psi_1{}^{BB_1\ldots B_{s-1}} \\
&= \overline{\varphi_1}^{\dot{Y}\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_{s-1}}\mathfrak{n}_a\left(\overline{S}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}S^A{}_B\sigma^a_{\dot{X}A}\right)\ldots\mathfrak{n}_{a_{s-1}}\left(\overline{S}^{\dot{X}_{s-1}}{}_{\dot{Y}_{s-1}}S^{A_{s-1}}{}_{B_{s-1}}\sigma^a_{\dot{X}_{s-1}A_{s-1}}\right)\psi_1{}^{BB_1\ldots B_{s-1}} \\
&= \overline{\varphi_1}^{\dot{Y}\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_{s-1}}\mathfrak{n}_a\left(D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)*}\left(S^{-1}\right)\sigma^a\right)_{\dot{Y}B}\ldots \\
&\qquad\mathfrak{n}_{a_{s-1}}\left(D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)*}\left(S^{-1}\right)\sigma^{a_{s-1}}\right)_{\dot{Y}_{s-1}B_{s-1}}\psi_1{}^{BB_1\ldots B_{s-1}}
\end{aligned}
$$

Das Transformationsverhalten von $\mathfrak{n}_a\sigma^a_{\dot{X}A}$ unter $SL(2,\mathbb{C})$-Transformationen liefert schließlich

$$
= \overline{\varphi_1}^{\dot{Y}\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_{s-1}}\mathfrak{n}_a\sigma^a{}_{\dot{Y}B}\ldots\mathfrak{n}_{a_{s-1}}\sigma^{a_{s-1}}{}_{\dot{Y}_{s-1}B_{s-1}}\psi_1{}^{BB_1\ldots B_{s-1}}.
$$

Durch eine analoge Rechnung für T_2 findet man

$$
\begin{aligned}
&\overline{D^{-,s}(S)\varphi_2}_A{}^{\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{s-1}}\mathfrak{n}^{\dot{X}A}\mathfrak{n}_{\dot{X}_1A_1}\ldots\mathfrak{n}_{\dot{X}_{s-1}A_{s-1}}\left(D^{-,s}(S)\psi_2\right)_A{}^{A_1\ldots A_{s-1}} \\
&= \overline{\varphi_2}_B{}^{\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_{s-1}}\mathfrak{n}_a\left(D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(S^{-1}\right)\sigma^a\right)^{\dot{Y}B}\ldots \\
&\qquad\mathfrak{n}_{a_{s-1}}\left(D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)*}\left(S^{-1}\right)\sigma^{a_{s-1}}\right)_{\dot{Y}_{s-1}B_{s-1}}\psi_{2\dot{Y}}{}^{B_1\ldots B_{s-1}} \\
&= \overline{\varphi_2}_B{}^{\dot{Y}_1\ldots\dot{Y}_{s-1}}\mathfrak{n}_a\sigma^{a\,\dot{Y}B}\ldots\mathfrak{n}_{a_{s-1}}\sigma^{a_{s-1}}{}_{\dot{Y}_{s-1}B_{s-1}}\psi_{2\dot{Y}}{}^{B_1\ldots B_{s-1}}.\blacksquare
\end{aligned}
$$

Die vorangegangene Konstruktion produziert ein Skalarprodukt, welches invariant unter $SL(2,\mathbb{C})$-Transformationen ist. Die fehlende Eigenschaft, also die Unabhängigkeit von der Cauchyfläche ist allerdings ungeklärt. Sie scheint jedoch durch das s-fache Auftreten des Normalenvektorfeldes in der Kontraktion äußerst unwahrscheinlich.

6.4. Konstruktion eines erhaltenen Rarita-Schwinger-Stromes

6.4.1. Motivation

Wie die in den Abschnitte 6.2 und 6.3 zu sehen ist, gelingt es nicht in naheliegender Weise einen erhaltenen und positiven Strom und daraus analog zu Dimock (1982) eine CAR-Algebra zu konstruieren.

Die Gründe dafür sind mit der Struktur der entsprechenden Spinorbündel verbunden. Für die Schwierigkeiten bei der expliziten Konstruktion sind wesentlich, dass

- die eindeutige $SL(2,\mathbb{C})$-invariante Paarung zwischen dem Spinorbündel und dem dazu dualen Bündel antisymmetrisch ist
- sowie die positive und die negative Weyldarstellung inäquivalente irreduzible Darstellungen der selben Dimension sind und daher kein Intertwiner zwischen ihnen existiert.

Eine Möglichkeit, positive und negative Weyl-Spinoren $SL(2,\mathbb{C})$-invariant zu paaren, bietet die Kontraktion des Tensorproduktes der beiden Spinoren mit einem Lorentzvektor.

Die Kontraktion mit dem Normalenvektor der betrachteten Cauchyfläche in allen Weyl-Komponenten liefert nach Mühlhoff (2007) ein Skalarprodukt auf der Cauchyfläche, allerdings ist die Unabhängigkeit der Konstruktion von selbiger ungeklärt.

Die hier vorgeschlagene Vorgehensweise beruht auf den in 4 zusammengefassten Ergebnissen der Konstruktionen auf dem Minkowskiraum und dem folgenden Theorem von Fulling et al. (1981).

Theorem II - 25 (Deformation von global hyperbolischen Raumzeiten[6]).
Seien (M_i, g_i), $i \in \underline{2}$ global hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit raumartigen Cauchy-Flächen Σ_i, die beide diffeomorph zu einer Mannigfaltigkeit Σ sind.

Dann existiert eine dritte global hyperbolische Mannigfaltigkeit $(M = \mathbb{R} \times \Sigma, g)$ mit Cauchyflächen $\Sigma_i', i \in \underline{2}$, so dass die Σ_i isometrisch diffeomorph zu den Σ_i' sind und für jeweils offene Umgebungen Selbiges gilt.

Beweis. In einer Umgebung von Σ_i, wählt man gauß'sche Normalkoordinaten. In diesen hat die Raumzeitmetrik die Form

$$\mathrm{d}s_i^2 = \mathrm{d}t^2 - \gamma_{kl}^{(i)}(t)\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^l,$$

wobei $t = t_i$ die Fläche Σ_i beschreibt. Man nehme an, dass $t_1 \neq t_2$ gilt.

Sei $f(t,x)$, $0 \leq f \leq 1$ eine glatte Funktion, welche in einer Umgebung von $t = t_1$ den Wert 1 hat und außerhalb der Umgebung, für die die gauß'schen Normalkoordinaten gewählt sind, verschwindet. Weiterhin sei $h(t,x)$ eine glatte Funktion mit den entsprechenden Eigenschaften für g_2 und t_2.

Man definiere nun die Metrik g durch

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = \beta^2(t,x)\,\mathrm{d}t^2 - \Big[&f(t,x)\gamma_{kl}^{(1)}(t) + h(t,x)\gamma_{kl}^{(2)}(t)\\ &+ (1-f(t,x))\,(1-h(t,x))\,\gamma_{kl}\Big]\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^l,\end{aligned}$$

wobei γ_{kl} eine beliebige riemannsche Metrik und $\beta(t,x)$ eine positive Funktion ist, welche in Umgebungen von $t = t_i$ den Wert 1 annimmt. Wählt man β außerhalb der o.g. Umgebungen hinreichend klein, ist $(\mathbb{R} \times M, g)$ die gewünschte Raumzeit. ■

[6] Fulling et al. (1981, Appendix C, Proposition C.1)

Die Aussage des Theorems lässt sich direkt in eine Aussage über erhaltene Ströme auf speziellen global hyperbolischen Raumzeiten umformulieren.

Ein erhaltener Strom auf einer global hyperbolischen Raumzeit mit zu $\mathbb{R}^3$ diffeomorphen Cauchyflächen ist positiv, wenn er auf der Cauchyfläche äquivalent zum in Abschnitt 4 definierten kanonischen Strom auf dem Minkowskiraum ist.

Diesen Ansatz werden wir verfolgen, indem wir mögliche Verallgemeinerungen des Rarita-Schwinger-Stromes auf global hyperbolischen Raumzeiten betrachten.

6.4.2. Variationen des Rarita-Schwinger-Skalarproduktes

In diesem Abschnitt werden wir den Rarita-Schwinger-Strom auf dem Minkowskiraum im Hinblick auf mögliche Verallgemeinerungen auf global hyperbolische Raumzeiten umformulieren.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns auf den Spin-$\frac{3}{2}$-Fall – die Rechnungen lassen sich jedoch ohne weitere Annahmen direkt auf beliebige höhere fermionische Spinorfelder verallgemeinern.

Seien $(\chi, \xi)^{\mathrm{tr}}$ und $(\vartheta, \varphi)^{\mathrm{tr}}$ glatte Lösungen der Buchdahl-Gleichungen mit $s = 3$, deren Träger geschnitten mit einer Cauchyfläche kompakt ist. Wir betrachten nun die folgende Abbildung der negativen chiralen Komponenten

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\mu_\Sigma \; \mathfrak{n}^{\dot{X}(A|}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\partial_{\dot{X}_1A_1}\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{|A_1A_2)} \\
&= \frac{1}{3}\int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\mu_\Sigma \; \Big[\mathfrak{n}^{\dot{X}A}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\partial_{\dot{X}_1A_1}\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
&\qquad\qquad + \mathfrak{n}^{\dot{X}A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\partial_{\dot{X}_1A_1}\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2} \\
&\qquad\qquad + \mathfrak{n}^{\dot{X}A_2}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\partial_{\dot{X}_1A_1}\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_1}\Big] \\
&= -\frac{1}{3}\int\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\mu_\Sigma \; \Big[\mathfrak{n}^{\dot{X}A}\left(\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
&\qquad\qquad + \mathfrak{n}^{\dot{X}A_1}\left(\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2} \\
&\qquad\qquad + \mathfrak{n}^{\dot{X}A_2}\left(\partial_{\dot{X}_2A_2}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_1A_1}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_1}\Big].
\end{aligned}
$$

Durch Anwendung des Stokes'schen Satzes erhalten wir

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\int_{\Sigma} \mathrm{d}\mu_\Sigma \ \Big[& \left(\partial^{\dot{X}A}\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
& + \left(\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial^{\dot{X}A}\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
& + \left(\partial^{\dot{X}A_1}\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2} \\
& + \left(\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial^{\dot{X}A_1}\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2} \\
& + \left(\partial^{\dot{X}A_2}\partial_{\dot{X}_2A_2}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_1A_1}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_1} \\
& + \left(\partial_{\dot{X}_2A_2}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial^{\dot{X}A_2}\partial_{\dot{X}_1A_1}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_1}\Big].
\end{aligned}
$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$
\begin{aligned}
& -\left(\partial^{\dot{X}A_1}\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2} \\
= \ & \left(\partial_{\dot{X}}{}^{A_1}\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi^{\dot{X}AA_2} \\
= & \frac{1}{2}\left(\left(\partial_{\dot{X}}{}^{A_1}\partial_{\dot{X}_1A_1} - \partial_{\dot{X}_1}{}^{A_1}\partial_{\dot{X}A_1}\right)\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi^{\dot{X}AA_2} \\
= & \frac{1}{2}\left(\Box\epsilon_{\dot{X}\dot{X}_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi^{\dot{X}AA_2} \\
= & \frac{1}{2}\left(\Box\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}_1}{}^{AA_2} \\
= & \frac{1}{2}\left(\Box\epsilon_{BA}\overline{\xi}^{B\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi^{\dot{X}AA_2} \\
= & \frac{1}{2}\left(\left(\partial_{\dot{X}B}\partial^{\dot{X}}{}_A - \partial_{\dot{X}A}\partial^{\dot{X}}{}_B\right)\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi^{\dot{X}AA_2} \\
= & -\left(\partial_{\dot{X}_1A_1}\partial^{\dot{X}_1A}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}\dot{X}_2}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}^{A_1A_2}.
\end{aligned}
$$

Nach diesen Überlegungen ergibt der ursprüngliche Ausdruck

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Sigma} \mathrm{d}\mu_\Sigma \ \Big[& \left(\partial^{(\dot{X}|A}\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{|\dot{X}_1\dot{X}_2)}\right)\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
& + \left(\partial_{\dot{X}_1A_1}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\right)\partial^{\dot{X}(A|}\partial_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{|A_1A_2)}\Big].
\end{aligned}
$$

Aus den Bewegungsgleichungen folgt, dass die symmetrisierten Ausdrücke ohnehin symmetrisch in den entsprechenden Indizes sind. Erneute partielle Integration liefert schließlich

$$\int_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\ \mathfrak{n}^{\dot X(A|}\overline{\xi}_A{}^{\dot X_1\dot X_2}\partial_{\dot X_1A_1}\partial_{\dot X_2A_2}\varphi_{\dot X}{}^{|A_1A_2)} \tag{II.8}$$

$$= \int_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma\ \mathfrak{n}^{\dot XA}\overline{\xi}_A{}^{\dot X_1\dot X_2}\partial_{\dot X_1A_1}\partial_{\dot X_2A_2}\varphi_{\dot X}{}^{A_1A_2}. \tag{II.9}$$

6.4.3. deSitter-Variante

Wir betrachten hier einen Kandidaten für einen erhaltenen Strom, der sich auf deSitter-Raumzeiten als solcher erweist. Seien $(\chi,\xi)^{\mathrm{tr}}$ und $(\vartheta,\varphi)^{\mathrm{tr}}$ Lösungen der Buchdahlgleichungen für $s=3$ und mit $\mu=\nu=i\,m$. Wir definieren den folgenden Kanditaten für einen erhaltenen Strom:

$$\begin{aligned} j^\alpha &= \sigma^\alpha{}_{A\dot X}\overline{\chi}^{\dot X\dot X_1\dot X_2}\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\vartheta^{AA_1A_2} \\ &\qquad + \sigma^{\alpha(\dot X|A}\overline{\xi}_A{}^{|\dot X_1\dot X_2)}\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\varphi_{\dot X}{}^{A_1A_2}. \end{aligned}$$

Aus (II.8) folgt, dass das Integral von $\mathfrak{n}_\alpha j^\alpha$ über eine Cauchyfläche auf dem Minkowskiraum dem Integral über die aus dem Rarita-Schwinger-Strom definierte Sesquilinearform (I.3) auf den Fasern des Spinorbündels entspricht.

Das in Abschnitt 6.4.1 entwickelte Schema sieht zunächst die Berechnung der Divergenz vor.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} j &= \nabla_{\dot XA}\left(\overline{\chi}^{\dot X\dot X_1\dot X_2}\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\vartheta^{AA_1A_2}\right) \\ &\qquad + \nabla^{(\dot X|A}\left(\overline{\xi}_A{}^{|\dot X_1\dot X_2)}\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\varphi_{\dot X}{}^{A_1A_2}\right) \\ &= \nabla_{\dot XA}\left(\overline{\chi}^{\dot X\dot X_1\dot X_2}\right)\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\vartheta^{AA_1A_2} \\ &\qquad + \overline{\chi}^{\dot X\dot X_1\dot X_2}\left(\nabla_{\dot XA}\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\vartheta^{AA_1A_2}\right) \\ &\qquad + \left(\nabla^{(\dot X|A}\overline{\xi}_A{}^{|\dot X_1\dot X_2)}\right)\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\varphi_{\dot X}{}^{A_1A_2} \\ &\qquad + \overline{\xi}_A{}^{(\dot X_1\dot X_2|}\left(\nabla^{|\dot X)A}\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\varphi_{\dot X}{}^{A_1A_2}\right) \\ &= m^2\overline{\xi}_A{}^{\dot X_1\dot X_2}\nabla_{\dot X_1A_1}\varphi_{\dot X_2}{}^{AA_1} + \overline{\xi}_A{}^{(\dot X_1\dot X_2|}\nabla^{|\dot X)A}\nabla_{\dot X_1A_1}\nabla_{\dot X_2A_2}\varphi_{\dot X}{}^{A_1A_2} \end{aligned} \tag{II.10}$$

Es erweist sich als zweckmäßig die Symmetrisierung an diesem Punkt auszuschreiben.

$$
\begin{aligned}
= m^2 \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2} \nabla_{\dot{X}_1 A_1} \varphi_{\dot{X}_2}{}^{AA_1} & \\
+ \frac{1}{3} \bar{\xi}_A^{\dot{X}_1\dot{X}_2} \nabla^{\dot{X}A} \nabla_{\dot{X}_1 A_1} \nabla_{\dot{X}_2 A_2} \varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} & \qquad \equiv \mathrm{T}_1 \\
- \frac{1}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}\dot{X}_1} \nabla^{\dot{X}_2 A} \left[\nabla_{\dot{X}_1 A_1}, \nabla_{\dot{X}_2 A_2} \right] \varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} & \qquad \equiv \mathrm{T}_2 \\
+ \frac{2}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}\dot{X}_1} \left[\nabla^{\dot{X}_2 A_1}, \nabla_{\dot{X}_1 A_1} \right] \nabla_{\dot{X}_2 A_2} \varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} & \qquad \equiv \mathrm{T}_3 \\
+ \frac{2}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}\dot{X}_1} \nabla_{\dot{X}_1 A_1} \nabla^{\dot{X}_2 A} \nabla_{\dot{X}_2 A_2} \varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} & \qquad \equiv \mathrm{T}_4
\end{aligned}
$$

Wir wenden uns zunächst der Berechnung von T_1 zu.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2} \nabla^{\dot{X}A} \nabla_{\dot{X}_1 A_1} \nabla_{\dot{X}_2 A_2} \varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
= & \frac{1}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2} \Big\{ \nabla_{\dot{X}_1 A_1} \nabla_{\dot{X}_2 A_2} \nabla^{\dot{X}A} & \qquad \equiv \mathrm{T}_{10} \\
& \qquad + \left[\nabla^{\dot{X}A}, \nabla_{\dot{X}_1 A_1} \right] \nabla_{\dot{X}_2 A_2} & \qquad \equiv \mathrm{T}_{11} \\
& \qquad + \nabla_{\dot{X}_1 A_1} \left[\nabla^{\dot{X}A}, \nabla_{\dot{X}_2 A_2} \right] \Big\} \varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} & \qquad \equiv \mathrm{T}_{12}
\end{aligned}
$$

Die Berechnung der Kommutatoren unter Ausnutzung der Symmetrien der Felder ergibt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_{11}: \quad & \frac{1}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2} \Big[-\bar{\Psi}_{\dot{X}_1\dot{X}_2}{}^{\dot{X}\dot{Z}} \nabla_{\dot{Z}A_2} \varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2} - \Phi_{\dot{X}_2}{}^{\dot{Z}A}{}_{A_1} \nabla_{\dot{Z}A_2} \varphi_{\dot{X}_1}{}^{A_1A_2} \\
& \qquad + \Lambda \nabla_{\dot{X}_1 A_2} \varphi_{\dot{X}_2}{}^{AA_2} \Big] \\
\mathrm{T}_{12}: \quad & \frac{1}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2} \nabla_{\dot{X}A_1} \left[\Psi^{AA_1}{}_{A_2 D} \varphi_{\dot{X}_2}{}^{DA_2} - \Phi^{\dot{X}}{}_{\dot{X}_2}{}^{A_1}{}_{D} \varphi_{\dot{X}}{}^{DA} - \Lambda \varphi_{\dot{X}_2}{}^{AA_1} \right]
\end{aligned}
$$

Wir fahren fort die in T_2 und T_3 auftretenden Kommutatoren durch Krümmungsspinoren auszudrücken.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_2 \;: \quad & \frac{1}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}\dot{X}_1} \nabla_{\dot{X}_1}{}^{A} \Phi_{\dot{X}}{}^{\dot{Z}}{}_{A_1A_2} \varphi_{\dot{Z}}{}^{A_1A_2} \\
\mathrm{T}_3 \;: \quad & \frac{2}{3} \bar{\xi}_A{}^{\dot{X}\dot{X}_1} \Big[-\bar{\Psi}^{\dot{X}_2}{}_{\dot{X}_1\dot{X}}{}^{\dot{Z}} \nabla_{\dot{X}_2 A_2} \varphi_{\dot{Z}}{}^{AA_2} - \Phi_{\dot{X}}{}^{\dot{Z}A}{}_{A_1} \nabla_{\dot{X}_1 A_2} \varphi_{\dot{Z}}{}^{A_1A_2} \\
& \qquad + \Lambda \nabla_{\dot{X}_1 A_2} \varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2} \Big]
\end{aligned}
$$

Für die Berechnung der Divergenz verbleit noch die Zerlegung von T_4 in krümmungsabhängige Terme.

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}\dot{X}_1}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\nabla^{\dot{X}_2A}\nabla_{\dot{X}_2A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} = \frac{2}{3}\overline{\xi}_{A\dot{X}\dot{X}_1}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\nabla_{\dot{X}_2A}\nabla^{\dot{X}_2}{}_{A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
=&\frac{2}{3}\overline{\xi}^{A\dot{X}\dot{X}_1}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\Big[\underbrace{\nabla_{\dot{X}_2(A|}\nabla^{\dot{X}_2}{}_{|A_2)}}_{\equiv \mathrm{T}_{41}} + \underbrace{\nabla_{\dot{X}_2[A|}\nabla^{\dot{X}_2}{}_{|A_2]}}_{\equiv \mathrm{T}_{42}}\Big]\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2}
\end{aligned}$$

Mit der Identität (A.5) erhalten wir für T_{41} das Ergebnis

$$\mathrm{T}_{41} \quad : \frac{2}{3}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}\dot{X}_1}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\left[-\Psi_{A_2}{}^{AA_1}{}_D\varphi_{\dot{X}}{}^{DA_2} - \Phi_{\dot{X}}{}^{\dot{Z}A}{}_{A_2}\varphi_{\dot{Z}}{}^{A_1A_2} - 4\Lambda\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_1}\right].$$

Um den verbleibenden Summanden T_{42} ebenfalls auf Kontraktionen der Felder mit einer Ableitung und Krümmungsspinoren zu zerlegen, betrachten wir zunächst folgende zweite Ableitung des Feldes φ:

$$\nabla_{\dot{X}_1A}\nabla^{\dot{X}A}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2}$$

Daraus erhält man für den $\Box$-Term die Identität

$$\Box\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} = 2\nabla_{\dot{X}A}\nabla^{\dot{X}_1A}\varphi_{\dot{X}_1}{}^{A_1A_2} + 4\Phi_{\dot{X}}{}^{\dot{X}_1(A_1|}{}_D\varphi_{\dot{X}_1}{}^{D|A_2)} + 6\Lambda\varphi_{\dot{X}_1}{}^{A_1A_2}.$$

Mit dieser finden wir

$$\mathrm{T}_{42}: \quad \overline{\xi}_{A_1}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\nabla_{\dot{X}_1A_2}\left[\frac{2}{3}\nabla_{\dot{X}_2A}\nabla^{\dot{X}A}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} + \frac{4}{3}\Phi_{\dot{X}_2}{}^{\dot{Y}(A_1|}{}_A\varphi_{\dot{Y}}{}^{A|A_2)} + \Lambda\varphi_{\dot{X}_2}{}^{A_1A_2}\right].$$

Beginnend mit den Termen, welche dreifache Ableitungen enthalten, fassen wir nun die einzelnen Terme geordnet nach den auftretenden Krümmungsgrössen wieder zusammen.

$$\begin{aligned}
&m^2\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\varphi_{\dot{X}_2}^{AA_1} \\
+&\frac{1}{3}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\nabla_{\dot{X}_2A_2}\nabla^{\dot{X}A}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
+&\frac{2}{3}\overline{\xi}_{A_1}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\nabla_{\dot{X}_1A_2}\nabla_{\dot{X}_2A}\nabla^{\dot{X}A}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2}
\end{aligned}$$

Die Buchdahlgleichungen liefern zunächst

$$\begin{aligned}
-&\quad\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\nabla_{\dot{X}_2A_2}\nabla^{\dot{X}(A|}\varphi_{\dot{X}}{}^{|A_1A_2)} \\
+&\frac{1}{3}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\nabla_{\dot{X}_2A_2}\nabla^{\dot{X}A}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\
+&\frac{2}{3}\overline{\xi}_{A_1}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\nabla_{\dot{X}_1A_2}\nabla_{\dot{X}_2A}\nabla^{\dot{X}A}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2}.
\end{aligned}$$

Mit der Identität (A.5) erhalten wir

$$\frac{1}{3}\overline{\xi}_A{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\Phi_{\dot{X}_1\dot{X}_2}{}^A{}_D\nabla^{\dot{X}}{}_{A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{DA_2}. \tag{II.11}$$

Die Summe der von der skalaren Krümmung abhängenden Terme ergibt

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}\bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\nabla_{\dot{X}_1A_1}\Lambda\right)\varphi_{\dot{X}_2}{}^{AA_1} \\ = \; & \frac{1}{3}\bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\nabla^{\dot{Y}D}\Phi_{\dot{X}_1\dot{Y}DA_1}\right)\varphi_{\dot{X}_2}{}^{AA_1}. \end{aligned} \tag{II.12}$$

Der letzte Schritt folgt aus den Spinor-Ricci-Identitäten (Wünsch, 1985, Gleichung (4)). Unter Anwendung dieser folgt für die von der Weyl-Krümmung abhängigen Terme

$$\begin{aligned} & \bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\Psi^{AA_1}{}_{A_2D}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\varphi_{\dot{X}_2}{}^{DA_2} - \overline{\Psi}_{\dot{X}_1\dot{X}_2}{}^{\dot{X}\dot{Z}}\nabla_{\dot{Z}A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2}\right) \\ & \qquad\qquad + \bar{\xi}^{A\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\nabla_{\dot{X}_1}{}^{A_1}\Psi_{AA_1A_2D}\right)\varphi_{\dot{X}}{}^{DA_2} \\ = \; & \bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\Psi^{AA_1}{}_{A_2D}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\varphi_{\dot{X}_2}{}^{DA_2} - \overline{\Psi}_{\dot{X}_1\dot{X}_2}{}^{\dot{X}\dot{Z}}\nabla_{\dot{Z}A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2}\right) \\ & \qquad\qquad + \bar{\xi}^{A\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\nabla^{\dot{Y}}{}_{(A|}\Phi_{\dot{Y}\dot{X}_1|A_2D)}\right)\varphi_{\dot{X}_2}{}^{DA_2}. \end{aligned} \tag{II.13}$$

Es verbleibt die Zusammenfassung der Terme, die von der spurfreien Ricci-Krümmung abhängen. Einschließlich der Ergebnisse (II.11), (II.12) und (II.13) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\nabla_{\dot{X}A_1}\Phi_{\dot{X}_1}{}^{\dot{X}A}{}_{A_2}\right)\varphi_{\dot{X}_2}{}^{A_1A_2} \\ + & \frac{1}{3}\bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\nabla_{\dot{X}_1A_1}\Phi_{\dot{X}_2}{}^{\dot{X}A}{}_{A_2}\right)\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\ + & \frac{2}{3}\bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\Phi_{\dot{X}_1\dot{X}_2}{}^{A}{}_{A_1}\nabla^{\dot{X}}{}_{A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2}. \end{aligned} \tag{II.14}$$

Insgesamt ist die Divergenz in Abhängigkeit von den Krümmungsspinoren schließlich gegeben als

$$\begin{aligned} \operatorname{div} j = \; & \bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\nabla_{\dot{X}A_1}\Phi_{\dot{X}_1}{}^{\dot{X}A}{}_{A_2}\right)\varphi_{\dot{X}_2}{}^{A_1A_2} \\ & + \frac{1}{3}\bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\nabla_{\dot{X}_1A_1}\Phi_{\dot{X}_2}{}^{\dot{X}A}{}_{A_2}\right)\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\ & + \frac{2}{3}\bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\Phi_{\dot{X}_1\dot{X}_2}{}^{A}{}_{A_1}\nabla^{\dot{X}}{}_{A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{A_1A_2} \\ & + \bar{\xi}_{A}{}^{\dot{X}_1\dot{X}_2}\left(\Psi^{AA_1}{}_{A_2D}\nabla_{\dot{X}_1A_1}\varphi_{\dot{X}_2}{}^{DA_2} - \overline{\Psi}_{\dot{X}_1\dot{X}_2}{}^{\dot{X}\dot{Z}}\nabla_{\dot{Z}A_2}\varphi_{\dot{X}}{}^{AA_2}\right). \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass die Divergenz nicht von der skalaren Krümmung abhängt. Daraus folgt, dass der zuvor betrachtete Strom auf der deSitter-Raumzeit erhalten ist, da in diesem Fall die übrigen Kümmungsspinoren verschwinden.

6.5. Modifizierte Rarita-Schwinger-Operatoren

Im Folgenden untersuchen wir zunächst den von Buchdahl (1982b) vorgeschlagenen modifizierten Rarita-Schwinger Operator für Felder mit Spin $\frac{3}{2}$. Anschließend betrachten wir den von Kallosh et al. (2000) im Rahmen ihrer Untersuchung von kosmologischer Gravitino-Produktion hergeleiteten Operator.

Dazu verwenden wir in beiden Fällen ein Verfahren nach Bär und Ginoux (2011) zur Konstruktion eines erhaltenen Stromes aus dem Hauptsymbol des Differentialoperators und der durch die Lorentzsche Metrik induzierten inneren Produkt auf dem Bündel.

Als Verallgemeinerung der Rarita-Schwinger-Gleichungen sind die betrachteten Felder glatte Schnitte Ψ im D^1_{RS}-Spinorbündel über der global hyperbolischen Raumzeit M, welche die Bedingung

$$\gamma_\alpha \Psi^\alpha = 0$$

erfüllen[7].

Auf den Fasern des Bündels existiert ein durch die Lorentz'sche Metrik induziertes inneres Produkt[8], gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\langle \cdot, \cdot \rangle : \Delta^1_{RS} \times \Delta^1_{RS} \longrightarrow \mathbb{C} \\
&\langle \Theta_m, \Psi_m \rangle = (\overline{\vartheta}_m)_{AB\dot{X}} (\xi_m)^{\dot{X}BA} + (\overline{\chi}_m)_{B\dot{Y}}{}^{\dot{X}} (\varphi_m)_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}B}.
\end{aligned}$$

Dabei sind χ und ϑ (bzw. ξ und φ) die chiralen Komponenten von Θ (bzw. Ψ).

Die zu untersuchenden Bewegungsgleichungen haben im 2-Spinor-Formalismus die folgende Form:

$$\begin{aligned}
-i\nabla^{\dot{X}A} \varphi_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}B} &= \mu \xi^{\dot{Y}BA} - \hat{\beta}^{\dot{Y}BA} \\
-i\nabla_{\dot{X}A} \xi^{\dot{Y}BA} &= \nu \varphi_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}B} + \hat{\alpha}^{\dot{Y}}{}_{\dot{X}}{}^{B}.
\end{aligned} \tag{II.15}$$

Dabei sind ξ und φ die chiralen Komponenten des Feldes, $\nu = -\mu = \frac{m}{\sqrt{2}}$ die Masse und

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}^{\dot{Y}BA} &= i\nabla^{\dot{Y}A}\alpha^B - 2i\nabla^{\dot{Y}B}\alpha^A - 3\mu\epsilon^{AB}\beta^{\dot{Y}} \\
\hat{\alpha}^{\dot{Y}}{}_{\dot{X}}{}^{A} &= -i\nabla_{\dot{X}}{}^{A}\beta^{\dot{Y}} + 2i\nabla^{\dot{Y}A}\beta_{\dot{X}} - 3\nu\epsilon_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\alpha^A
\end{aligned}$$

wobei α und β sich nach

$$\begin{aligned}
\alpha^A &= \frac{-2}{12m^2 + R} \Phi_{\dot{X}}{}^{\dot{Y}B}{}_{B} \varphi_{\dot{Y}}{}^{\dot{X}B} \\
\beta_{\dot{X}} &= \frac{-2}{12m^2 + R} \Phi_{\dot{X}\dot{Y}AB} \xi^{\dot{Y}AB}
\end{aligned}$$

aus dem Feld ergeben. Im vorliegenden Fall bietet sich an, die Korrespondenz zwischen der $D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$- und der Vektor-Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ zu nutzen, da sich die Rechnungen

[7] Vergleiche Abschnitt 4.2, Gleichung (RS2) und den folgenden Abschnitt zur Formulierung in 2-Spinoren.

[8] Der Index m bezieht sich hier auf den Punkt der Mannigfaltigkeit, an dem das Produkt der Schnitte ausgewertet wird.

dadurch wesentlich kompakter schreiben lassen. In Dirac-Spinor-Vektor-Schreibweise lauten die Gleichungen (II.15)

$$\left(-i\nabla\!\!\!/ - m\right)\Psi^\alpha + \left(-2i\nabla^\alpha - i\gamma^\alpha\nabla\!\!\!/ - 3m\gamma^\alpha\right)B_\Psi = 0 \tag{mRS}$$

wobei die Dirac-Indizes der besseren Übersicht halber unterdrückt sind und B_Ψ den durch $2^{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta)^{\mathrm{tr}}$ aus Ψ gegebenen Dirac-Spinor bezeichnet.

Lemma II - 26 (Irreduzibilitätsbedingung)**.**
Sei $\Psi^\alpha \in \Gamma_0\left(D^1_{RS}M\right)$ *und man definiere*

$$\tilde{\Psi}^\alpha := \left(-i\nabla\!\!\!/ - m\right)\Psi^\alpha + \left(-2i\nabla^\alpha - 2i\gamma^\alpha\nabla\!\!\!/ - 3m\gamma^\alpha\right)B_\Psi.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha\tilde{\Psi}^\alpha &= 0, \ \textit{also} \\ -i\nabla_\alpha\Psi^\alpha &= 3\left(-i\nabla\!\!\!/ - 2m\right)B_\Psi. \end{aligned}$$

Ausgedrückt durch die chiralen Komponenten von Ψ *lauten die Beziehungen*

$$\begin{aligned} \nabla^{\dot{X}A}\varphi_{\dot{X}\ \ A}^{\ \dot{Y}} &= 3\nabla^{\dot{Y}}{}_A\alpha^A + 6i\mu\beta^{\dot{Y}}, \\ \nabla_{\dot{X}A}\xi^{\dot{X}AB} &= -3\nabla^{\dot{X}V}\beta_{\dot{X}} - 6i\nu\alpha^B. \end{aligned} \tag{II.16}$$

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Irreduzibilitätsbedingung

$$\gamma_\alpha\Theta^\alpha = 0$$

für $\Theta \in \Gamma_0\left(D^1_{RS}M\right)$. ■

Lemma II - 27 (formale Selbstadjungiertheit)**.**
Der durch die Gleichungen (mRS) *bzw.* (II.15) *definierte Differentialoperator*

$$R : \Gamma_0\left(D^1_{RS}M\right) \longrightarrow \Gamma_0\left(D^1_{RS}M\right)$$

ist bezüglich des durch die Lorentzmetrik auf M *induzierten inneren Produktes formal selbstadjungiert*

Beweis. Seien $\Theta = (\chi, \vartheta)^{\mathrm{tr}}$ und $\Psi = (\xi, \varphi)^{\mathrm{tr}}$ aus $\Gamma_0\left(D^1_{RS}M\right)$.

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \,\langle \Theta, R\Psi\rangle \\
=& \int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \,\Big[\overline{\vartheta}_{AB\dot{X}}\left(-i\nabla^{\dot{Y}A}\varphi_{\dot{Y}}{}^{\dot{X}B} + i\nabla^{\dot{X}A}\alpha^B - 2i\nabla^{\dot{X}B}\alpha^A\right) \\
&\qquad + \overline{\chi}_{B\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\left(-i\nabla_{\dot{Y}A}\xi^{\dot{X}BA} + i\nabla_{\dot{Y}}{}^A\beta^{\dot{X}} - 2i\nabla^{\dot{X}B}\beta_{\dot{Y}}\right)\Big] \\
=& \int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \,\Big[\overline{\vartheta}_{AB\dot{X}}\left(-i\nabla^{\dot{Y}A}\varphi_{\dot{Y}}{}^{\dot{X}B} - i\nabla^{\dot{X}B}\alpha^A\right) \\
&\qquad + \overline{\chi}_{B\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\left(-i\nabla_{\dot{Y}A}\xi^{\dot{X}BA} - i\nabla^{\dot{X}B}\beta_{\dot{Y}}\right)\Big] \\
=& \; i\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \,\Big[\left(\nabla^{\dot{Y}A}\overline{\vartheta}_{AB\dot{X}}\right)\varphi_{\dot{Y}}{}^{\dot{X}B} + \left(\nabla^{\dot{X}B}\overline{\vartheta}_{AB\dot{X}}\right)\alpha^A \\
&\qquad + \left(\nabla_{\dot{Y}A}\overline{\chi}_{B\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\right)\xi^{\dot{X}BA} + \left(\nabla^{\dot{X}B}\overline{\chi}_{B\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\right)\beta_{\dot{Y}}\Big]
\end{aligned}
$$

Man verwendet nun die Irreduzibilitätsbedingung (II.16).

$$
\begin{aligned}
=& \; i\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \,\Big[\left(\nabla^{\dot{Y}A}\overline{\vartheta}_{AB\dot{X}}\right)\varphi_{\dot{Y}}{}^{\dot{X}B} + \left(-3\nabla_A{}^{\dot{X}}\overline{\overline{\alpha}}_{\dot{X}} - 6i\mu\overline{\overline{\beta}}_A\right)\alpha^A \\
&\qquad + \left(\nabla_{\dot{Y}A}\overline{\chi}_{B\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\right)\xi^{\dot{X}BA} + \left(-3\nabla^{\dot{Y}B}\overline{\overline{\beta}}_B + 6i\nu\overline{\overline{\alpha}}^{\dot{Y}}\right)\beta_{\dot{Y}}\Big] \\
=& \; i\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \,\Big[\left(\nabla^{\dot{Y}A}\overline{\vartheta}_{AB\dot{X}}\right)\varphi_{\dot{Y}}{}^{\dot{X}B} + \overline{\overline{\alpha}}_{\dot{X}}\left(3\nabla_A{}^{\dot{X}}\alpha^A - 6i\nu\beta_{\dot{X}}\right) \\
&\qquad + \left(\nabla_{\dot{Y}A}\overline{\chi}_{B\dot{X}}{}^{\dot{Y}}\right)\xi^{\dot{X}BA} + \overline{\overline{\beta}}_B\left(3\nabla^{\dot{Y}B}\beta_{\dot{Y}} - 6i\mu\alpha^B\right)\Big]
\end{aligned}
$$

Mit $\mu = -\nu$ und unter erneuter Verwendung von (II.16) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
=& \; i\int\limits_\Sigma \mathrm{d}\mu_\Sigma \,\Big[\left(\nabla^{\dot{Y}A}\overline{\vartheta}_{AB\dot{X}} + \nabla^{\dot{Y}}{}_B\overline{\overline{\alpha}}_{\dot{X}}\right)\varphi_{\dot{Y}}{}^{\dot{X}B} \\
&\qquad + \left(\nabla_{\dot{Y}A}\overline{\chi}_{B\dot{X}}{}^{\dot{Y}} + \nabla_{\dot{Y}B}\overline{\overline{\beta}}_A\right)\xi^{\dot{X}BA}\Big]
\end{aligned}
$$

Der in der obigen Rechnung nicht betrachtete Summand des vollen Operators, welcher im inneren Produkt nicht verschwindet, besteht aus einer Multiplikation mit einer reellen Zahl und ist demnach selbstadjungiert. Die Summe der Terme, also der gesamte Operator, ist folglich formal selbstadjungiert bezüglich des inneren Produktes $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Sigma$. ■

Der Vorgehensweise von Bär und Ginoux (2011) folgend, untersuchen wir das Hauptsymbol σ_R des Differentialoperators. Das Hauptsymbol für einen Schnitt k im Tangentialbündel von M angewendet auf ein Spinorfeld Ψ ist

$$
(\sigma_R(k)\Psi)^\alpha = \not{k}\Psi^\alpha + (2k^\alpha + \gamma^\alpha\not{k})\,B_\Psi
$$

Um die charakteristische Mannigfaltigkeit[9] zu bestimmen, suchen wir nichttriviale Lösungen der Gleichung

$$0 = \not{k}\Psi^\alpha + (2k^\alpha + \gamma^\alpha \not{k})\, B_\Psi. \tag{II.17}$$

Betrachten wir zunächst die lichtartigen $k \neq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= (\not{k})^2\Psi^\alpha + (2\not{k}k^\alpha + \not{k}\gamma^\alpha\not{k})\, B_\Psi \\ &= (2\not{k}k^\alpha + 2k^\alpha\not{k})\, B_\Psi \\ &= 4k^\alpha\not{k}B_\Psi \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existiert eine Komponente von k, die nicht identisch verschwindet. Es muss also gelten

$$0 = \not{k}B_\Psi. \tag{II.18}$$

Da $\not{k}$ für lichtartige k nilpotent, also insbesondere nicht invertierbar ist, folgt die Existenz einer nichttrivialen Lösung der Gleichung. Kontrahieren wir (II.17) mit γ, erhalten wir die Gleichung

$$k_\alpha\Psi^\alpha = -3\not{k}B_\Psi$$

Mit Gleichung (II.18) folgt

$$k_\alpha\Psi^\alpha = 0 \tag{II.19}$$

Betrachten wir nun das Hauptsymbol für zeit- und raumartige Vektoren. Die Linearität des Hauptsymbols in k erlaubt es,ohne Einschränkung der Allgemeinheit den entsprechenden Vektor p^α derart zu wählen, dass $|p^2| = 1$ gilt.

$$\begin{aligned} 0 &= \not{p}\Psi^\alpha + \left(2p^\alpha + \gamma^\alpha\not{p}\right) B_\Psi \qquad \text{(II.20)} \\ 0 &= (\not{p})^2\Psi^\alpha + \left(2\not{p}p^\alpha + \not{p}\gamma^\alpha\not{p}\right) B_\Psi \\ &= \pm\Psi^\alpha + \left(4\not{p}p^\alpha \mp \gamma^\alpha\right) B_\Psi \end{aligned}$$

Setzen wir nun die Definition von B_Ψ ein, erhalten wir

$$\Psi^\alpha = (\mp 4\not{p}p^\alpha + \gamma^\alpha)c\tilde{R}_{\mu\nu}\gamma^\mu\Psi^\nu \tag{II.21}$$

mit $c = (12m^2 + R)^{-1}$ und dem spurfreien Ricci-Tensor $\tilde{R}_{\mu\nu}$. Kontraktion von (II.20) mit γ fürt in diesem Fall ebenfalls auf

$$p_\alpha\Psi^\alpha = -3\not{p}B_\Psi. \tag{II.22}$$

[9]Die charakterisitsche Mannigfaltigkeit ist die Menge der Schnitte k in TM für die die Gleichung $\sigma_R(k)\Psi = 0$ nichttriviale Lösungen besitzt.

Um die Beweisidee für die Wohldefiniertheit des Cauchyproblems aus Bär und Ginoux (2011, Remark 2.27) für den hier untersuchten Operator zu übernehmen, muss die charakteristische Mannigfaltigkeit von R den lichtartigen Vektoren entsprechen.

Anders ausgedrückt ist es notwendig, dass

- die Gleichungen (II.18), (II.19) eine nichttriviale Lösung besitzen und
- die Gleichungen (II.21), (II.22) nur trivial lösbar sind.

Die nichttriviale Lösbarkeit von (II.21) ist gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$\mp \tilde{R}_{\mu\nu}\gamma^\mu = \not{p} p_\nu (12m^2 + R)$$

Wir wählen nun als Vektoren, das zeit- und ein raumartiges Element einer Basis von $\mathbb{M}$.

$$\begin{aligned} -\tilde{R}_{\mu\nu}\gamma^\mu &= \gamma^0 p_\nu (12m^2 + R) \\ \tilde{R}_{\mu\nu}\gamma^\mu &= \gamma^i p_\nu (12m^2 + R) \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der γ-Matrizen folgen also

$$\begin{cases} -\tilde{R}_{00} = (12m^2 + R) \\ -\tilde{R}_{\mu j} = 0, \quad j \in \underline{3} \end{cases} \qquad \text{und}$$
$$\begin{cases} \tilde{R}_{ii} = (12m^2 + R), \\ \tilde{R}_{\mu\nu} = 0, \quad (\mu, \nu) \neq (i, i). \end{cases}$$

Diese Bedingungen widerspechen sich, falls die Krümmung nicht verschwindet. Daraus folgt, dass die Bedingungen nicht für alle zeit- und raumartigen Vektoren erfüllt sein können. Das impliziert jedoch lediglich, dass nicht alle zeit- und raumartigen Vektoren zur charakteristischen Mannigfaltigkeit des Operators gehören können.

Im Allgemeinen sind die Bedingungen, die aus den Voraussetzungen für den Beweis der Wohldefiniertheit des Cauchy-Problems nach Bär und Ginoux (2011) folgen, für den hier betrachteten Operator nicht erfüllbar. Zudem erscheinen im Rahmen der Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten die Bedingungen unphysikalisch, da diese die Masse der Felder in direkte Beziehung zu Krümmungsgrößen der Raumzeit setzen.

Wir widmen uns nun dem von Kallosh et al. (2000) hergeleiteten Operator. In der zitierten Arbeit ist der Operator für konstante Gravitinomasse als

$$(-i\not{\nabla} - m)\Psi^\alpha + \left(i\nabla^\alpha + \frac{m}{2}\gamma^\alpha \right) \not{\Psi} = 0$$

gegeben. Hier soll die allgemeinere Variante

$$\begin{aligned} &(Q\Psi)^\alpha := (-i\not{\nabla} - m)\Psi^\alpha + (ai\nabla^\alpha + bm\gamma^\alpha)\not{\Psi} + ci\gamma^\alpha\nabla_\mu\Psi^\mu, \quad \{a, b, c\} \subset \mathbb{C} \\ &Q\Psi = 0 \end{aligned} \tag{II.23}$$

des Operators untersucht werden.

Das Spinorbündel, auf dessen Schnitten die Operatoren wirken ist

$$\left(D^D \otimes D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right) M.$$

Es werden zunächst keine weiteren Bedingungen and die Felder gestellt, so dass es sich im Allgemeinen nicht um freie Felder handelt, da die Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ reduzibel ist.

Der erste Schritt ist die Bestimmung der Parameterbereiche für a, b und c, für die die Konsistenz der Bewegungsgleichung (II.23) gewährleistet ist.

Aus Kontraktion der Gleichung (II.23) mit γ_α erhalten wir

$$\nabla_\alpha \Psi^\alpha = \frac{i(1+a)\not\nabla + (4b+1)m}{i(2-4c)} \not\Psi \quad \text{für } c \neq \frac{1}{2}. \tag{II.24}$$

Kontrahieren wir (II.23) mit ∇_α und setzen in Terme, die Ausdrücke mit $\gamma_\alpha \Psi^\alpha$ enthalten die Identität (II.24) ein, folgt

$$\left[\frac{i(c-1)(a+1)}{2-4c}(\Box - \frac{R}{4} + \frac{[(4b+1)(c-1)+(a+1)]\, m\not\nabla}{2-4c} \right.$$
$$\left. - \frac{i(4b+1)m^2}{2-4c} + ai\Box + bm\not\nabla\right]\not\Psi + \frac{i}{2} R_{\mu\nu}\gamma^\mu \Psi^\nu = 0.$$

Um die Irreduzibilitätsbedingung durch eine algebraische Gleichung ersetzen zu können, müssen

$$\begin{aligned} a &= -\frac{(c-1)(a+1)}{2-4c}, \\ b &= -\frac{(4b+1)(c-1)+(a+1)}{2-4c} \end{aligned} \tag{II.25}$$

gelten. Die algebraische Bedingung an die Felder lautet dann

$$\not\Psi = \frac{2-4c}{(4b+1)m^2}\left[\frac{1}{2} R_{\mu\nu}\gamma^\mu - \frac{aR}{4}\gamma^\mu g_{\mu\nu}\right]\Psi^\nu. \tag{II.26}$$

Für flache Raumzeiten erhalten wir also gerade die Irreduzibilitätsbedingung $\not\Psi = 0$ und für $a = 1, b = \frac{1}{2}$ und $c = 0$ entspricht die Bedingung Gleichung (3.4) in Kallosh et al. (2000) für eine konstante Masse.

Im Gegensatz zu der Analyse der von Buchdahl vorgeschlagenen Modifikation des Rarita-Schwinger-Operators werden wir in diesem Fall zunächst das Hauptsymbol des Operators untersuchen.

$$(\sigma_Q(k)\Psi)^\alpha = \not k \Psi^\alpha - ak^\alpha \not\Psi - c\gamma^\alpha k_\mu \Psi^\mu$$

Kontrahieren wir die Gleichung zur Bestimmung der charakteristischen Mannigfaltigkeit $(\sigma_Q(k)\Psi)^\alpha = 0$ mit γ_α erhalten wir die Identität

$$k_\alpha \Psi^\alpha = \frac{(1+a)}{2(1-2c)} \not k \not\Psi \tag{II.27}$$

Wir betrachten nun zeit- und raumartige Schnitte p des Tangentialbündels.

$$
\begin{aligned}
0 &= (\sigma_Q(p)\Psi)^\alpha \\
0 &= (1-c)\not{p}p_\alpha\Psi^\alpha \mp a\not{\Psi}
\end{aligned}
$$

Einsetzen von (II.27) liefert

$$
0 = \pm\frac{(1-c)(1+a)}{2(1-2c)}\not{\Psi} \mp a\not{\Psi}.
$$

Aus der Forderung nach algebraischen Einschränkungen an die Felder (II.25) ergibt sich

$$
0 = (a-a)\not{\Psi}.
$$

Demnach ist das Hauptsymbol unter den gestellten Anforderungen für keinen zeit- und raumartigen Schnitt des Tangentialbündels invertierbar. Eine analoge Rechnung für zeitartige Schnitte zeigt, dass das Hauptsymbol für beliebige Schnitte nicht invertierbar ist. Die betrachtete Klasse und insbesondere der von Kallosh et al. (2000) betrachtete Operator für eine konstante Masse haben folglich kein wohldefiniertes Cauchyproblem und lassen keine Definition einer Antikommutatorrelation zu.

Teil III.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir Möglichkeiten studiert, die klassischen und quantisierten Theorien höherer fermionischer Felder auf global hyperbolische Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern.

Dazu haben wir zunächst die bekannten Ansätze rekapituliert und dabei festgestellt, dass sich die Probleme der verschiedenen Ansätze stets auf die selben Grundsätze reduzieren lassen.

Im Falle der Buchdahlgleichungen liegt das Problem wesentlich am Fehlen einer durch die Metrik induzierten Paarung des Spinorbündels und seines komplex Konjugierten.

Bei den betrachteten Modifikationen des Rarita-Schwinger-Operators liegen die Schwierigkeiten weniger auf der Seite der Geometrie als bei den Operatoren selbst. Wir konnten zeigen, dass es eine große Klasse von möglichen Modifikationen gibt, die zwar Verwendung finden, deren Lösungen allerdings im Allgemeinen kein kausales Ausbreitungsverhalten besitzen. Eine wichtige Rolle spielt hier die algebraische Einschränkung der Freiheitsgrade, die von Nöten ist, um die Irreduzibilität der Darstellung der Symmetriegruppe zu gewährleisten.

Wir haben bei unseren Ansätzen versucht, die Beweise der Äquivalenz der Bewegungsgleichungen auf dem flachen Raum soweit möglich auszunutzen und mit Hilfe von Deformationsargumenten Eigenschaften der Strukturen von diesem auf den gekrümmten Raum fortzusetzen.

Das Problem der Konstruktion einer allgemein kovarianten Quantenfeldtheorie für höhere Spinorfelder bleibt ungelöst.

Das Feld bietet jedoch viele weitere Möglichkeiten, die zu untersuchen sind. Es wäre zunächst wichtig, das Konsistenzproblem der Bewegungsgleichungen weiter zu untersuchen. Bisher existieren nur für wenige der im flachen Fall äquivalenten Spinorbündel konsistente Bewegungsgleichungen.

Im Falle der Buchdahlgleichungen, die in der Form nach Wünsch bisher die eleganteste Variante derartiger Gleichungen sind, wäre eine allgemeinere Untersuchung der in dieser Arbeit nur für den einfachsten Fall betrachteten Kontraktion potentiell interessant, da diese Kontraktion im Grenzwert einer flachen Raumzeit gerade der im Beweis der Äquivalenz der Theorien verwendeten Konstruktion entspricht. Aus physikalischer Sicht ist dieser Ansatz insofern interessant, als dass er sich im flachen Fall direkt auf die gemeinhin verwendete Form des Rarita-Schwinger Stromes reduziert.

Ein anderer Möglicher Ansatz wäre das Fallenlassen der Irreduzibilität, oder die Betrachtung wechselwirkender Theorien, die in der Supergravitation verwendet werden.

Nicht zuletzt bietet es sich an, das Problem auf einem möglicherweise abstrakteren Niveau zu betrachten und zu überprüfen, ob der Katalog der Bedingungen an eine allgemein kovariante Quantenfeldtheorie höherer Spinorfelder diese unter gewissen Umständen ausschließt.

A. Mathematische Ergänzungen

A.1. Clifford Algebra

Definition A - 1 (Clifford-Algebra)**.** Sei (V, q) ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $q : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ eine quadratische Form.

Eine assoziative unitale $\mathbb{K}$-Algebra $CL\,(V, q)$ zusammen mit einer linearen Abbildung $\iota : V \longrightarrow CL\,(V, q)$ nennt man genau dann eine *Clifford-Algebra*, wenn gilt

1. $\forall x \in V : \quad (\iota(x))^2 = q(x)\mathbb{1}_{CL(V,q)}$
2. Für jede weitere assoziative unitale $\mathbb{K}$-Algebra A und jede weitere lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow A$, für die $(\varphi(X))^2 = q(x)\mathbb{1}_A$ gilt, existiert ein eindeutiger $\mathbb{K}$-Algebra-Homomorphismus $\varphi : CL\,(V, q) \longrightarrow A$, so dass $\varphi = \varphi \circ \iota$.

Korollar A - 2 (Eigenschaften von Clifford-Algebren)**.**

1. Für alle Paare (V, q) existiert eine Clifford-Algebra, d.h. beliebige Clifford-Algebren $CL\,(V, q)$ und $CL'(V, q)$ sind isomorph.
2. Eine konkrete Realisierung der Clifford-Algebra $CL\,(V, q)$ ist die Tensor-Algebra von V modulo dem Ideal $I := \{x \otimes X - q(x)\mathbb{1} \mid x \in V\}$
3. Clifford-Algebren sind $\mathbb{Z}_2$-gradierte Algebren. Der Gradierungsautomorphismus α ist gegeben durch die Fortsetzung von $\alpha(x) = -x$ auf ganz $CL\,(V, q)$. α ist involutiv, also lässt sich $CL\,(V, q)$ in folgender Weise zerlegen $CL\,(V, q) = CL^+(V, q) \oplus CL^-(V, q)$, dabei sind $CL^\pm(V, q)$ die Eigenräume von α zu den Eigenwerten ±1. Sie werden auch als gerader $(+)$ bzw. ungerader $(-)$ Anteil von $CL\,(V, q)$ bezeichnet.

Definition A - 3 (Einheitsgruppe)**.** Sei (V, q) ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit quadratischer Form q, dann bezeichnet man die Untergruppe

$$CL^\times(V, q) := \{x \in CL\,(V, q)\,|\exists\, x^{-1} \in CL\,(V, q) : \quad x^{-1-}x = xx^{-1} = \mathbb{1}\} \subseteq CL\,(V, q)$$

als *Einheitsgruppe*.

Ist V endlichdimensional mit $\mathrm{Dim}_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$, so ist $CL^\times(V, q)$ eine $\mathbb{K}$-Lie-Gruppe der Dimension 2^n.

Definition A - 4 (verdrehte adjungierte Darstellung von $CL^\times(V, q)$)**.** Man bezeichnet die Darstellung von $CL^\times(V, q)$ auf $CL\,(V, q)$, die definiert ist durch

$$\tilde{Ad}_\varphi(x) := \alpha(\varphi) \cdot x \cdot \varphi^{-1} \qquad \varphi \in CL^\times(V, q),\ x \in CL\,(V, q)$$

als die *verdrehte adjungierte Darstellung von* $Cl^\times(V, q)$.

Definition A - 5 (Clifford-Gruppe)**.** Sei (V,q) wie zuvor, dann heißt

$$\Gamma(V,q) := \{\varphi \in Cl^{\times}(V,q) |\ \tilde{Ad}_{\varphi}(V) = V\}$$

die *Clifford-Gruppe von* (V,q).

Definition A - 6 (Spin und Pin)**.** Sei $CL\,(V,q)$ eine Clifford-Algebra, dann sind

- $\mathrm{Pin}(V,q)$ die multiplikative Untergruppe der Clifford-Gruppe $\Gamma(V,q)$, die erzeugt wird von Elementen der Form $\{x \in V |\ q(x) = \pm 1\}$,
- $\mathrm{Spin}(V,q) := \mathrm{Pin}(V,q) \cap Cl^{+}(V,q)$.

Es gilt also:

$$\mathrm{Spin}(V,q) \subseteq \mathrm{Pin}(V,q) \subseteq \Gamma(V,q) \subseteq Cl^{\times}(V,q) \subseteq Cl(V,q)$$

Für den Fall $V = \mathbb{R}^4$ und $q(x) = (x^0)^2 - (\vec{x})^2$ gilt[1]:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}^{+}(1,3) \xrightarrow{\tilde{Ad}} SO^{+}(1,3) \longrightarrow 1$$

$\mathrm{Spin}^{+}(1,3)$ bezeichnet hier die Einschränkung von $\mathrm{Spin}(1,3)$ auf die Zusammenhangskomponente der $\mathbb{1} \in Cl_{1,3}$. Demnach existiert also ein universeller Überlagerungshomomorphismus

$$\mathrm{Spin}^{+}(1,3) \longrightarrow SO^{+}(1,3) = \mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$$

und damit is $SL(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Spin}^{+}(1,3)$ (vgl. dazu Lawson und Michelsohn (1989), Theorem 2.9 ff.).

Definition A - 7 (Darstellung einer Clifford-Algebra)**.** Sei $CL\,(V,q)$ eine Clifford-Algebra und W ein endlichdimensionaler $\mathbb{L}$-Vektorraum mit $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$.

Eine *Darstellung der Cliffordalgebra* $CL\,(V,q)$ *auf* W ist ein $\mathbb{K}$-Algebra-Homomorphismus

$$\rho : CL\,(V,q) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(W)$$

W (der Darstellungsraum von ρ) heißt dann ein $CL\,(V,q)$-Modul über $\mathbb{K}$ und die Wirkung von $CL\,(V,q)$-Elementen auf W wird als Clifford-Multiplikation bezeichnet.

$$\rho(\varphi)(x) = \varphi \cdot x \quad \varphi \in CL\,(V,q)\,,\ x \in W$$

Definition A - 8 (Spinor-Darstellung)**.**

[1] Man bezeicnet $CL\left(\mathbb{R}^4, q\right)$ auch als $Cl_{1,3}$, dementsprechend ergeben sich auch die Bezeichnungen der diversen Unteralgebren, bzw. Untergruppen

1. $CL^c_{1,3} = Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-Algebra-isomorph zu $\mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$

$$CL^c_{1,3} \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$$

   Einen entsprechenden Isomorphismus bezeichnet man als *Spinor-Darstellung von* $Cl^c_{1,3}$. Eine solche Darstellung ist irreduzibel und bis auf Äquivalenz die einzige irreduzible komplexe Darstellung.

2. Eine Darstellung $\kappa_{1,3}$ von $Cl_{1,3}$ nennen wir eine *Spinor-Darstellung von* $Cl_{1,3}$, wenn

$$\kappa^c_{1,3} := \kappa_{1,3} \otimes \mathbb{C}$$

   eine Spinor-Darstellung von $Cl^c_{1,3}$ ist. Jede solche Darstellung ist wiederum irreduzibel und bis auf Äquivalenz die einzige irreduzible Darstellung.

Proposition A - 9. Die Einschränkung einer Spinor-Darstellung $\kappa_{1,3}$ von $CL_{1,3}$ auf $\mathrm{Spin}^+(1,3) \cong SL(2,\mathbb{C})$ ist äquivalent zu einer Darstellung

$$D^D := D^{\left(\frac{1}{2},0\right)} \oplus D^{(0,\frac{1}{2})*} \quad \text{auf } \Delta_D := \Delta_{\frac{1}{2},0} \oplus \Delta^*_{0,\frac{1}{2}} \cong \mathbb{C}^4 \tag{D}$$

A.2. Differentialgeometrie

Im Folgenden werden alle Mannigfaltigkeiten als glatt vorausgesetzt.

Definition A - 10 (Differential)**.** Sei $\Psi : M \longrightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und $m \in M$. Das *Differential von* Ψ *am Punkt* m ist gegeben durch eine Abbildung

$$\mathrm{d}\,\Psi_m : T_m M \longrightarrow T_{\Psi(m)} N.$$

Für $X \in T_m M$ ist $\mathrm{d}\,\Psi_m(X)$ definiert durch seine Wirkung auf glatte Funktionen in einer Umgebung $U \subseteq N$ von $\Psi(m)$,

$$\mathrm{d}\,\Psi_m(X)(g) = X_m(g \circ \Psi)$$

Definition A - 11 (lokal triviales Bündel)**.** Seien $\pi : E \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten und F eine weitere Mannigfaltigkeit. Das Tupel

$$(E, \pi, M; F)$$

heißt lokal *triviales Bündel* (auch lokal triviale Faserung) mit dem Fasertyp F, falls es um jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ und einen Diffeomorphismus $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ gibt, so dass $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_U = \pi$ gilt.

Definition A - 12 (Schnitt)**.** Unter einem (glatten) *Schnitt* in einem lokal trivialen Bündel $(E, \pi, M; F)$ versteht man eine glatte Abbildung $s : M \longrightarrow E$ mit $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$ Einen Schnitt in einem Teilbündel E_U über einer offenen Menge $U \subset M$ nennt man lokalen Schnitt in E über U.

$$\Gamma(E) = \{s : M \longrightarrow E,\ s \text{ glatter Schnitt in } (E, \pi, M; F)\}$$
$$\Gamma(U, E) = \Big\{s : U \longrightarrow E,\ s \text{ glatter Schnitt in } (E_U, \pi|_{E(U)}, U; F)\Big\}$$

Definition A - 13 (Hauptfaserbündel)**.** Sei G eine Lie-Gruppe und $\pi : P \longrightarrow M$ eine glatte Abbildung. Das Tupel $(P, \pi, M; G)$ heißt *Hauptfaser-* oder *Prizipalbündel* über M, falls gilt:

1. G wirkt von rechts als Liesche Transformationsgruppe auf P. Die Wirkung ist fasertreu und einfach transitiv auf den Fasern, d.h. $\forall p, q \in P$ und $g \in G$
   - $pg = p \Longrightarrow g = e \in G$
   - $\exists g \in G : q = pg$
   - $\pi(pg) = \pi(p)$
2. Es gibt einen Bündelatlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ aus G-äquivarianten Bündelkarten, d.h. es gelten:
   - $\varphi : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$ ist ein Diffeomorphismus
   - $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_i = \pi$
   - $\varphi(pg) = \varphi_i(p)g \quad \forall p \in \pi^{-1}(U_i)$ und $g \in G$, wobei G auf $U_i \times G$ durch $(x, h) \cdot g = (x, hg)$ wirkt.

Definition A - 14 (Repèrebündel, Rahmenbündel)**.** Seien M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und

$$GL(M)_x := \{v_x = \{v_1, \ldots, v_n\} | v_x \text{ Basis in } T_xM\}$$

die Menge der Basen in T_xM sowie $GL(M)$ die disjunkte Vereinigung der Mengen der Basen

$$GL(M) := \dot{\bigcup_{x \in M}} GL(M)_x.$$

Die Projektion π ist gegeben durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi : GL(M) &\longrightarrow M \\ v_x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Eine Rechtswirkung der Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ auf $GL(M)$ lässt sich durch

$$v_x \cdot A = (v_1, \ldots, v_n) \cdot A = \left(\sum_i v_i A_{i1}, \ldots, \sum_i v_i A_{in} \right) \qquad A \in GL(n, \mathbb{R}) = (A_{ij})$$

definieren. Das Hauptfaserbündel

$$(GL(M), \pi, M; GL(n, \mathbb{R})$$

ist das *Repèrebündel* oder das *Rahmenbündel* über M.

Definition A - 15 (Reduktion von Bündeln)**.** Sei $(P, \pi_P, M; G)$ ein G-Hauptfaserbündel und $\lambda : H \longrightarrow G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Eine λ-Reduktion von P ist ein Paar (Q, f) bestehend aus einem H-Hauptfaserbündel $(Q, \pi_Q, M; H)$ und einer glatten Abbildung $f : Q \longrightarrow P$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\pi_P \circ f = \pi_Q$
- $f(q \cdot h) = f(q) \cdot \lambda(h) \qquad \forall q \in Q$ und $h \in H$.

Das folgende Diagramm ist demnach kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
Q \times H \arrow[r] \arrow[dd, "f\times\lambda"] & Q \arrow[dr, "\pi_Q"] \arrow[dd, "f"] & \\
 & & M \\
P \times G \arrow[r] & P \arrow[ur, "\pi_P"'] &
\end{tikzcd}$$

Definition A - 16 (Assoziiertes Faserbündel)**.** Sei $(P, \pi, M; G)$ ein Hauptfaserbündel und Q ein Raum, auf dem eine Linkswirkung von G definiert ist. Dann wirkt G auf $P \times Q$ von rechts durch

$$(p, q) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot q) \qquad \forall p \in P,\ q \in Q \text{ und } g \in G.$$

Weiterhin seien

$$E := (P \times Q)/G =: P \times_G Q$$

und

$$\begin{aligned} \hat{\pi} : E &\longrightarrow M \\ [p, q] &\longmapsto \pi(p). \end{aligned}$$

Dann definiert das Tupel $(E, \hat{\pi}, M; Q)$ ein lokal triviales Faserbündel mit Fasertyp Q. Man nennt E das zum Hauptfaserbündel P und der Transformationsgruppe $[Q, G]$ assoziierte Faserbündel.

Definition A - 17 (geometrische Distribution)**.** Sein M eine Mannigfaltigkeit. Eine Zuordnung $\mathcal{E} : x \in M \longmapsto E_x \subset T_xM$, die jedem Punkt einen Unterraum des Tangentialraumes T_xM zuordnet heißt *geometrische Distribution vom Rang r*, wenn $\forall x \in M$ eineUmgebung $U \subset M$ und glatte lokale Vektorfelder $X_1, \ldots, X_r$ auf U existieren, so dass

$$E_y = \operatorname{Span}(X_1(y), \ldots, X_r(y)) \quad \forall y \in U$$

Definition A - 18 (vertikaler Tangentialraum)**.** Sei $(P, \pi, M; G)$ ein glattes G-Hauptfaserbündel. Auf P gibt es eine kanonische geometrishce Distribution, die durch die Tangentialräume an die Fasern des Bündels gebildet wird.

Sei $P_x = \pi^{-1}(x)$ die Faser über einem Punkt $x \in M$, dann bezeichnet man den Tangentialraum an P_x im Punkt $u \in P_x$ mit

$$Tv_u P := T_u(P_X) \subset T_u P.$$

Man nennt $Tv_u P$ den *vertikalen Tangentialraum*. Das Teilbündel $TvP \subset TP$ ist dem entsprechend das vertikale Tangentialbündel von P.

Definition A - 19 (horizontaler Tangentialraum)**.** Unter dem *horizontalen Tangentialraum am Punkt* $u \in P$ versteht man den zu $Tv_u P \subset T_u P$ komplementären Vektorraum.

Definition A - 20 (Zusammenhang)**.** Ein *Zusammenhang* auf einem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ ist eine geometrische Distribution aus horizontalen Tangentialräumen:

$$Th : u \in P \longmapsto Th_u P \subset T_u P$$

die rechtsinvariant ist, d.h. für alle $g \in G$ und $u \in P$ gilt

$$\mathrm{d}R_g(Th_u P) = Th_{u \cdot g} P.$$

Definition A - 21 (Zusammenhangsform)**.** Unter einer *Zusammenhangsform* auf einem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ versteht man eine 1-Form $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $R_g^* A = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ A \quad \forall g \in G$
2. $A(\tilde{X}) = X \quad \forall X \in \mathfrak{g}$[2]

Definition A - 22 (horizontaler Lift)**.** Sei X ein Vektorfeld auf M. Ein Vektorfeld X^* auf P heißt *horizontaler Lift von X*, falls

1. $X^*(p) \in Th_p P$
2. $\mathrm{d}\,\pi_p(X^*(p)) = X(\pi(P))$

Ein Weg $\gamma* : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow P$ heißt *horizontaler Lift des Weges* $\gamma : I \longrightarrow M$, falls

1. $\pi(\gamma^*(t)) = \gamma(t)$
2. die Tangentialvektoren $\dot{\gamma}^*(t)$ für alle $t \in I$ horizontal sind.

Definition A - 23 (kovariante Ableitung)**.** Sei $\mathcal{E}$ ein Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M. Eine lineare Abbildung

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(T^* M \otimes \mathcal{E})$$

heißt kovariante Ableitung in $\mathcal{E}$, falls

$$\nabla(fe) = \mathrm{d}f \otimes e + f \cdot \nabla e \qquad \forall f \in C^\infty M, e \in \Gamma(\mathcal{E})$$

[2]Hier bezeichnet $\tilde{X}$ das vom Lie-Algebra-Element X erzeugte fundamentale Vektorfeld.

A.3. Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten

Definition A - 24 (komponentenweise Ableitung)**.** Seien

- $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow M$ ein glattes Vektorbündel üner M mit Fasertyp E,
- $U \subset M$ eine offene Teilmenge, auf der eine Karte $\psi : U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine lokale Trivialisierung $\chi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times E$ existieren,
- $x^1, \ldots, x^n$ die durch ψ induzierten lokalen Koordinaten und $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ die induzierten lokalen Koordinatenvektorfelder.

Dann sind $\frac{\partial_\chi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial_\chi}{\partial x^n}$ Differentialoperatoren auf $\mathcal{E}|_U$, welche definiert sind durch

$$\frac{\partial_\chi}{\partial x^\mu} s\bigg|_x := \chi^{-1}\left(x, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bigg|_{\psi(x)} (\mathrm{pr}_2 \circ \chi \circ s \circ \psi^{-1})\right)$$

für $x \in U$ und $s \in \Gamma(\mathcal{E}|_U)$. Man bezeichnet $\frac{\partial_\chi}{\partial x^\mu}$ als die *komponentenweise Differentialoperatoren auf $\mathcal{E}$ bezüglich χ und $\{x^\mu\}$*

Definition A - 25 (Differentialoperatoren auf Vekorbündeln)**.** Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ glatte $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit Fasertypen E und F. Ein *linearer Differentialoperator P von höchstens k-ter Ordnung von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$* ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung

$$P : \Gamma(\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})$$

mit der folgenden Eigenschaft:

Um jeden Punkt $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ mit lokalen Koordinaten x^μ und es existieren eine lokale Trivialisierung $\chi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times E$ von $\mathcal{E}$, so dass $\forall s \in \Gamma(\mathcal{E})$ gilt:

$$(Ps)(m) = \sum_{|\alpha| \leq k} \left(A^\alpha \frac{\partial_\chi^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} s\right)(m) \qquad \forall m \in U$$

Dabei gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| < k$, $A^\alpha \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U)$. P ist *von Ordnung k*, wenn es kein $l < k$ gibt, so dass P von höchstens l-ter Ordnung ist.

Definition A - 26 (Hauptsymbol)**.** Sei P ein Differentialoperator der Ordnung k von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{F}$, der lokal durch

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} A^\alpha \frac{\partial_\chi^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$$

gegeben ist. Das *Haupsymbol σ_P von P* ist der Schnitt von $\left(\bigotimes_{sym.}^k TM\right) \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, welcher lokal durch

$$\sigma_P := \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\otimes_{sym.} \alpha_1} \underset{sym.}{\otimes} \cdots \underset{sym.}{\otimes} \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\otimes_{sym.} \alpha_n} \otimes A^\alpha$$

definiert ist.

Definition A - 27 (formal adjungierter Operator)**.** Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ glatte $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit dualen Bündeln $\mathcal{E}^*$ und $\mathcal{F}^*$. Weiterhin sei $P : \Gamma(\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ ein linearer Differentialoperator.

Dann gibt es einen eindeutigen linearen Differentialoperator $P^* : \Gamma(\mathcal{F}^*) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{E}^*)$, den *formal adjungierten Operator zu* P, so dass

$$\forall \varphi \in \Gamma_0(\mathcal{E}),\ \psi \in \Gamma_0(\mathcal{F}^*) : \int_M \mathrm{d}\mu\ \psi(P\varphi) = \int_M \mathrm{d}\mu\ (P^*\psi)(\varphi)$$

Für den formal adjungierten Operator gilt $(P^*)^* = P$ und die Ordnung von P^* entspricht der Ordnung von P.

A.4. Krümmungsspinoren

Die Bezeichnungen der Krümmungsspinoren entspricht Wald (1984, Abschnitt 13.2). Eine vergleichbare Diskussion enthält auch Penrose und Rindler (1984a).

Sei ρ ein Kospinorfeld.

$$[\nabla_{A\dot{X}}, \nabla_{B\dot{Y}}]\, \rho_C = \chi_{A\dot{X}B\dot{Y}C}{}^{D} \rho_D \tag{A.1}$$

Das spinorielle Äquivalent des Riemann-Tensors ist demzufolge

$$R_{A\dot{X}B\dot{Y}C\dot{V}}{}^{D\dot{W}} = \chi_{A\dot{X}B\dot{Y}C}{}^{D} \epsilon_{\dot{V}}{}^{\dot{W}} + \overline{\chi}_{A\dot{X}B\dot{Y}\dot{W}}{}^{\dot{V}} \epsilon_C{}^{D} \tag{A.2}$$

Der Kommutator kovarianter Ableitungen angewand auf ein (k,l)-Kospinorfeld ρ ist von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}[\nabla_{A\dot{X}}, \nabla_{B\dot{Y}}]\, \rho_{A_1\ldots A_k\dot{X}_1\ldots\dot{X}_l} &= \sum_{i=1}^{k} \chi_{A\dot{X}B\dot{Y}A_i}{}^{D} \rho_{A_1\ldots A_{i-1}DA_{i+1}\ldots A_k\dot{X}_1\ldots\dot{X}_l} \\ &+ \sum_{i=1}^{l} \overline{\chi}_{A\dot{X}B\dot{Y}\dot{X}_i}{}^{\dot{Z}} \rho_{A_1\ldots A_k\dot{X}_1\ldots\dot{X}_{i-1}\dot{Z}\dot{X}_{i+1}\ldots\dot{X}_l}\end{aligned}\ . \tag{A.3}$$

Bei Anwendung des Kommutators auf Spinorfelder sind die der Asymmetrie der Kontraktion geschuldeten Vorzeichen zu beachten.

Aus den Symmetrien des Riemann-Tensors erhält man die folgende Zerlegung von χ:

$$\begin{aligned}\chi_{A\dot{X}B\dot{Y}C}{}^{D} &= \Psi_{ABC}{}^{D}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}} + \Phi_{\dot{X}\dot{Y}C}{}^{D}\epsilon_{AB} + \Lambda\left(\epsilon_{AC}\epsilon_B{}^{D} + \epsilon_{BC}\epsilon_A{}^{D}\right)\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}} \\ \overline{\chi}_{A\dot{X}B\dot{Y}\dot{V}}{}^{\dot{W}} &= \overline{\Psi}_{\dot{X}\dot{Y}\dot{V}}{}^{\dot{W}}\epsilon_{AB} + \Phi_{\dot{V}}{}^{\dot{W}}{}_{AB}\epsilon_{\dot{X}\dot{Y}} + \Lambda\left(\epsilon_{\dot{X}\dot{V}}\epsilon_{\dot{Y}}{}^{\dot{W}} + \epsilon_{\dot{Y}\dot{V}}\epsilon_{\dot{X}}{}^{\dot{W}}\right)\epsilon_{AB}\end{aligned}$$

Die auftretenden Krümmungsgrößen haben dabei die Symmetrien

$$\begin{aligned}\Psi_{ABCD} &= \Psi_{(ABCD)} \\ \Phi_{\dot{X}\dot{Y}AB} &= \Phi_{(\dot{X}\dot{Y})(AB)}\end{aligned}$$

und unter komplexer Konjugation gelten

$$\overline{\Lambda} = \Lambda$$
$$\overline{\Phi}_{AB\dot{X}\dot{Y}} = \Phi_{\dot{X}\dot{Y}AB}.$$

Hilfreich für das Rechnen mit kovarianten Ableitungen von Spinoren sind die beiden Identitäten

$$\nabla_{\dot{X}[A|}\nabla^{\dot{X}}{}_{|B]} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\nabla_{\dot{X}C}\nabla^{\dot{X}C}, \tag{A.4}$$
$$\nabla_{\dot{X}(A|}\nabla^{\dot{X}}{}_{|B)} = \frac{1}{2}\left[\nabla_{\dot{X}A}, \nabla^{\dot{X}}{}_{B}\right]. \tag{A.5}$$

Literaturverzeichnis

Bär, C. und N. Ginoux: *Classical and Quantum Fields on Lorentzian Manifolds* (2011), 1104.1158.

Bär, C., N. Ginoux und F. Pfäffle: *Wave equations on Lorentzian manifolds and quantization*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society Publishing (2007).

Barut, A. O. und R. Raczka: *Theory Of Group Representations And Applications*, World Scientific, 2. Aufl. (1986).

Baum, H.: *Eichfeldtheorie*, Springer (2009).

Bratelli, O. und D. Robinson: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, *Texts and Monographs in Physics*, Bd. 1, Springer, 2. Aufl. (1982).

Buchdahl, H. A.: *On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field*, Il Nuovo Cimento (1955-1965) **10** 96 (1958).

Buchdahl, H. A.: *On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces*, Il Nuovo Cimento (1955-1965) **25** 486 (1962).

Buchdahl, H. A.: *On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces. II*, Journal of Physics A Mathematical General **15** 1057 (1982a).

Buchdahl, H. A.: *On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces. III*, Journal of Physics A: Mathematical and General **15** (4) 1057 (1982b).

Buchdahl, H. A.: *On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces. IV*, Classical and Quantum Gravity **1** (2) 189 (1984), URL http://stacks.iop.org/0264-9381/1/i=2/a=014.

Carmeli, M. und S. Malin: *Theory of Spinors: An Introduction*, World Scientific (2000), ISBN 9810242611.

Dappiaggi, C., T.-P. Hack und N. Pinamonti: *The extended algebra of observables for Dirac fields and the trace anomaly of their stress-energy tensor* (2009).

Dimock, J.: *Dirac Quantum Fields on a Manifold*, Transactions of the American Mathematical Society **269** (1) 133 (1982).

Dirac, P. A. M.: *Relativistic wave equations*, Proc. Roy. Soc. Lond. **155A** 447 (1936).

Fierz, M.: *Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin*, Helv. Phys. Acta **12** (1939).

Fierz, M. und W. Pauli: *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences **173** (953) 211 (1939), ISSN 1364-5021.

Fredenhagen, K.: *Quantum Field Theory* (2009), Skript zur Vorlesung an der Universität Hamburg.

Fulling, S. A., F. J. Narcowich und R. M. Wald: *Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved spacetime, II*, Annals of Physics **136** (2) 243 (1981), ISSN 0003-4916.

Geroch, R.: *Spinor Structure of Space-Times in General Relativity. II*, Journal of Mathematical Physics **11** (1) 343 (1970).

Haag, R.: *Local quantum physics*, Springer, 2. Aufl. (1996).

Hack, T.-P.: *On the Backreaction of Scalar and Spinor Quantum Fields in Curved Spacetimes - From the Basic Foundations to Cosmological Applications*, Dissertation, Universität Hamburg, II. Institut für theoretische Physik (2010), `1008.1776`.

Hack, T.-P.: *persönliche Korrespondenz* (2011).

Illge, R.: *Massive Fields of Arbitrary Spin in Curved Space-Times*, Communications in Mathematical Physics **158** 433 (1993).

Illge, R. und R. Schimming: *Consistent field equations for higher spin on curved spacetimes*, Annalen der Physik **8** (4) 319 (1999), ISSN 1521-3889.

Kallosh, R., L. Kofman, A. Linde und A. V. Proeyen: *Gravitino Production After Inflation*, Phys.Rev.D **61** 103503 (2000), `hep-th/9907124`.

Lawson, J. H. B. und M.-L. Michelsohn: *Spin Geometry*, Princeton University Press (1989).

Martin, S. P.: *A Supersymmetry Primer* (2008), `hep-ph/9709356v5`.

Mühlhoff, R.: *Higher Spin Fields on Curved Spacetimes*, Diplomarbeit, Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik, Mathematisches Institut (2007).

van Nieuwenhuizen, P.: *Supergravity*, Physics Reports **68** (4) 189 (1981).

Penrose, R. und W. Rindler: *Two-spinor calculus and relativistic fields*, Bd. 1, Cambridge University Press (1984a).

Penrose, R. und W. Rindler: *Two-spinor calculus and relativistic fields*, Bd. 2, Cambridge University Press (1984b).

Rarita, W. und J. Schwinger: *On a Theory of Particles with Half-Integral Spin*, Phys. Rev. **60** (1) 61 (1941).

Reed, M. und B. Simon: *Functional Analysis*, Methods of modern mathematical physics:, Academic Press (1978), ISBN 0125850042.

Sanders, J. A.: *Aspects of locally covariant quantum field theory*, Dissertation, University of York, Department of Mathematics (2008), 0809.4828v1.

Schmutzer, E.: *Relativistische Physik*, Teubner (1968).

Velo, G. und D. Zwanziger: *Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential*, Physical Review **186** 1337 (1969), ISSN 1536-6065.

Wald, R. M.: *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).

Wald, R. M.: *Quantum field theory in curved space-time and Black Hole Thermodynamics*, Chicago Lectures in Physics, The University of Chicago Press (1995).

Warner, F.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Nr. 94 in Graduate Texts in Mathematics, Springer (1983).

Wünsch, V.: *Cauchy's problem and Huygens' principle for relativistic higher spin wave equations in an arbitrary curved space-time*, General Relativity and Gravitation **17** 15 (1985), ISSN 0001-7701.

Danksagungen

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Fredenhagen für die spannende Aufgabenstellung und die Betreuung danken.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Thomas Hack für die unermüdliche Unterstützung und die vielen interessanten und lehrreichen Diskussionen.

Schließlich möchte ich noch den übrigen und ehemaligen Mitglieder der Arbeitsgruppe Andreas Degner, Benjamin Lang, Dr. Claudio Dappiagi, Daniel Siemssen, Falk Lindner, Katarzyna Rejzner, Paniz Imani und Sebastian Schubert für das teils ernste, teils lustige aber stets angenehme und nie langweilige Jahr danken.

Erklärung gemäß der Diplomprüfungsordnung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.
Ich gestatte die Veröffentlichung dieser Arbeit.

Hamburg, den 11. Mai 2011,

Mathias Makedonski