Zur Definition von Wickprodukten mit Hilfe der mikrolokalen Analysis

Diplomarbeit

am II. Institut für
Theoretische Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Carsten Neff

Februar 2000

Gutachter der Diplomarbeit	: Prof. Dr. K. Fredenhagen
Zweitgutachter	: Prof. Dr. G. Mack

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

1.1 Einleitung und Problemstellung

Neben den freien Quantenfeldern repräsentieren die Wickprodukte die einzigen Felder in 4 Raumzeitdimensionen, die sich axiomatisch im Sinn von Gårding und Wightman formulieren lassen [19]. Im Rahmen der Störungstheorie, wie des Epstein-Glaser Verfahrens, bilden sie als operatorwertige Distributionen einen elementaren Baustein zur Konstruktion von wechselwirkenden Quantenfeldern.

Aufgrund des lokalen Charakters und einer Formulierung im Ortsraum ist es möglich, den Epstein-Glaser-Formalismus auch auf gekrümmte Raumzeiten zu erweitern [3].

Eine Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit ist eine Theorie, die die Gravitation dadurch berücksichtigt, daß sich das Quantenfeld unter dem Einfluß einer klassischen Raumzeit ausbreitet. Konzeptionell hat dies den großen Vorteil, daß mit wohlverstandenen Methoden gearbeitet werden kann. Das zentrale Problem ist die fehlende Translationsinvarianz und die damit verbundene Nicht-Eindeutigkeit des Vakuums. Es gibt jedoch eine ausgezeichnete Klasse physikalischer Zustände, die Hadamard-Zustände, die lokal ähnliche Eigenschaften wie das Vakuum einer Minkowskiraumtheorie aufweisen. Mit Hilfe der sogenannten Wellenfrontmenge lassen sich diese Zustände mathematisch charakterisieren. Das Fehlen eines ausgezeichneten Hadamard-Zustandes führt zu einer Klasse von Darstellungen des Quantenfeldes, die aus physikalischer Sicht alle identisch sind. Dies soll kurz erläutert werden.

Sei $\mathcal{A}$ die Observablen-Algebra [6, 7] eines Klein-Gordon-Feldes $\Phi(f)$ und w ein Zustand auf der Algebra. Assoziert mit jedem Zustand ist das GNS-Tripel $(\mathcal{H}_w, \pi_w, \Omega_w)$, wobei $\mathcal{H}_w$ ein Hilbertraum, π_w eine Darstellung der Algebra und Ω_w ein zyklischer Vektor ist. Der wesentliche Punkt ist, daß jeder Zustand auf der Algebra eine Darstellung des Feldes $\Phi(f)$ als operatorwertige Distribution auf $\mathcal{H}_w$ liefert.

Brunetti, Fredenhagen und Köhler haben gezeigt [4], daß sich zu jedem Hadamard-Zustand ein Wickprodukt des Klein-Gordon-Feldes konstruieren läßt. Allerdings hängt diese erste Konstruktion zu stark von der Wahl des jeweiligen Hadamard-Zustandes ab. Mathematisch läßt sich dies wie folgt darstellen:
Ist w ein quasifreier Hadamard-Zustand auf $\mathcal{A}$, dann existieren die Wickprodukte auf dem in $\mathcal{H}_w$ dichten Unterraum $\pi_w(\mathcal{A})\Omega_w$ als operatorwertige Distributionen. Die Menge $\pi_w(\mathcal{A})\Omega_w$ wird als Gårding-Wightman-Domäne bezeichnet. In [17] wurde gezeigt, daß alle durch quasifreie Hadamard-Zustände induzierte Darstellungen lokal equivalent sind. Es ist jedoch nicht anzunehmen, daß die

Gårding-Wightman-Domänen bei diesen unitären Transformationen ineinander abgebildet wird.

Aufgrund dessen haben Brunetti und Fredenhagen in [3] eine weitere Konstruktion des Wickproduktes angegeben, die nur von der durch einem quasifreien Hadamard-Zustand induzierten Darstellung abhängt, und nicht mehr wie in der alten Konstruktion [4] zusätzlich von dem zyklischen Vektor Ω_w.

Damit kann die Fragestellung der vorliegenden Arbeit präziser formuliert werden:

Sind die beiden Konstruktionen äquivalent ?

Zunächst soll präzisiert werden, was unter dieser Äquivalenz zu verstehen ist. Beide Konstruktionen müssen identische Operatoren liefern. Da diese unbeschränkt sind, muß gezeigt werden, daß der Abschluß beider Operatorgraphen identisch ist.

Die zweite Konstruktion der Wickprodukte wird mit Hilfe eines Ableitungsbegriffes für eine nichtlineare Abbildung erklärt. Hierbei handeltes es sich um eine Abbildung des lokalkonvexen Raum $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ in den Hilbertraum $\mathcal{H}_w$. Ein erhebliches Problem ist dabei, daß für Abbildungen zwischen Räumen mit weniger Struktur als einer Norm, kaum mathematische Methoden des Differenzierbarkeitsbegriffes zur Verfügung stehen. Einer der wenigen Artikel, der die Problematik des Differenzierbarkeitsbegriffs in allgemeinen Räumen ausführlich diskutiert, ist in [12] zu finden.

Es bestehen weitere Möglichkeiten zur Konstruktion von Wickprodukten, die in [1, 11, 13] beschrieben werden. Im Rahmen dieser Arbeit soll darauf nicht eingegangen werden.

1.2 Vorgehensweise und Aufbau der Arbeit

Zunächst wird die axiomatische Darstellung einer Feldtheorie auf der Basis der Gårding-Wightman-Axiome erläutert. Um einen leichteren Zugangs zu den Beweisen einiger wichtiger Theoreme zu ermöglichen, wird danach die Darstellung des freien Bosonenfeldes detailliert durchgeführt. Anschließend wird dann unter Nutzung der bis dahin vorliegenden mathematischen Hilfsmittel das massive skalare Klein-Gordon-Feld im Rahmen des Gårding-Wightman-Formalismus konstruiert. In Kap. 3 wird schließlich die Äquivalenz der beiden Konstruktionen der Wickprodukte analysiert. Naheliegend ist zunächst die Untersuchung und der Vergleich der Eigenschaften beider Konstruktionen im Minkowskiraum, da die Situation hier übersichtlicher ist.

Der Vorgehensweise dieser Arbeit liegt der Gedanke zugrunde, daß sich möglicherweise auch analoge Zusammenhänge finden lassen, wie sie zwischen Richtungs- und totalem Differential im $\mathbb{R}^n$ bestehen. Diese können dann, falls existent, auch auf die o.e. beiden Konstruktionen von Wickprodukten übertragen werden.

Die zuvor erwähnte zweite Konstruktion des Wickproduktes nach [3], erfolgte dabei über einen angepaßten Ableitungsbegriff, und in Verbindung mit einer nichtlinearen Abbildung. Etwas grob gesprochen entsprechen hier die Wickprodukte dem totalen Differential dieser nichtlinearen Abbildung. Um dann einen Zusammenhang zwischen der ersten und zweiten Konstruktion zu schaffen, muß auch für die erste Konstruktion eine entsprechende Darstellung gefunden werden, die aus einer Richtungsableitung dieser nichtlinearen Abbildung hervorgeht.

Das Analogon der Richtungsableitung in abstrakten Räumen bildet die Gâteaux-Ableitung. Die n-fache Gâteaux-Ableitung der o.e. nichtlinearen Abbildung generiert dabei normalgeordnete n-fache Produkte von Feldoperatoren auf einem großen Definitionsbereich. Die genaue Analyse erfolgt in Kap. 3.1.

In Kap. 3.2 werden die Objekte untersucht, die durch den als totales Differential interpretierten Ableitungsbegriff der charakteristischen nichtlinearen Abbildung entstehen. Diese werden mit Prä-Wickprodukte bezeichnet, und mit den über die Gâteaux-Ableitung erhaltenen normalgeordneten Produkte von Feldoperatoren verglichen.

Im Anschluß daran wird in 3.3 schließlich das Wickprodukt des Klein-Gordon-Feldes mit Hilfe der mikrolokalen Analysis aus dem Prä-Wickprodukt konstruiert und die erzielten Aussagen zusammengefaßt.

Eine detaillierte Darstellung der verwendeten mathematischen Hilfsmittel erfolgt im Anschluß. Ausfürlich dargestellt im Anhang sind die umfangreichen Beweise, die im Text zu unübersichtlich wären.

Kapitel 2

Massives Kleingordonfeld

2.1 Die Gårding Wightman Axiome

Die Quantenfeldtheorie enstand in den 20er Jahren mit dem Ziel einer quantenmechanischen Beschreibung von elektromagnetischen Phänomenen. Seitdem wurde der Formalismus ständig erweitert und damit viele Phänomene der Elementarteilchenphysik erklärt. Von Anfang an war diese Theorie mit vielen fast unüberwindbaren Problemen mathematischer Natur behaftet. Ungeachtete dessen wurde die Theorie ausgebaut und basierte aus einer Vielzahl von Annahmen und komplizierten störungstheoretischen Rechnungen. Diese erwiesen sich als schwer beweisbar, da das zentrale Objekt der Theorie, das Quantenfeld, nur vage definiert war.

Ende 1940 begannen Schwinger, Feynman, Tomonaga, Dyson und andere die Störungstheorie zu systematisieren,und führten damit Berechnungen zur Quantenelektrodynamik durch. Die exzellente Übereinstimmung zwischen den theoretischen Vorhersagen und experimentellen Ergebnissen, zeigte, daß das Modell der Quantenfeldtheorie zumindest für einige Phänomene zu nutzbaren Ergebnissen führt.

Auf dieser Grundlage formulierten Gårding und Wightman eine Definition des Quantenfeldes formulierten und gaben eine Menge von mathematischer Eigenschaften an, die jede Quantenfeldtheorie besitzen sollte. Diese Eigenschaften werden **Wightman-Axiome** genannt. Die Untersuchung der Wightman-Axiome und ihrer mathematischen Konsequenzen wird als **Axiomatische Quantenfeldtheorie** bezeichnet. Diese Bezeichnung ist irreführend , da sie suggeriert, daß das Hauptinteresse den Axiomen gilt und nicht den mathematischen Schlußfolgerungen oder konkreten Beispielen. Aus diesem Grund wird dieser Teil der Theoretischen Physik auch als allgemeine Theorie quantisierter Felder bezeichnet.

Der Einfachheit halber werden hier die Axiome nur für eine hermitiesche, skalare Quantenfeldtheorie angegeben. Es wird die Standardnotation verwendet, in der die Planck-Konstante und die Lichtgeschwindigkeit gleich Eins gesetzt werden.

Definition 2.1.1 *Ein **Hermitiesches skalares Quantenfeld** ist ein Quadrupel* $< \mathcal{H}, U, \varphi, \mathcal{D} >$ *mit den Eigenschaften (1-8):*

W1: ***(Relativistische Invarianz der Zustände)*** *$\mathcal{H}$ ist ein separabler Hilbertraum und $U(.,.)$ eine stark stetig unitäre Darstellung der eingeschränkten Poincaré Gruppe auf $\mathcal{H}$.*

W2: ***(Spektrumsbedingung)*** *Das Spektrum des Energieimpulsoperators P ist im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel $\overline{V^+}$ enthalten.*

W3: ***(Existenz und Eindeutigkeit des Vakuums)*** *Es existiert ein eindeutiger Vektor $\Omega \in \mathcal{H}$ genannt **Vakuum**, der invariant ist bezüglich der Raumzeittranslationen $U(a, I) \quad \forall a \in \mathbb{R}^4$.*

W4: ***(Invarianter Definitionsbereich für die Felder)*** *Es gibt einen dichten Teilraum $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ und eine Abbildung φ von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ in die (unbeschränkten) Operatoren auf $\mathcal{H}$,so daß*
(i)Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, $\mathcal{D} \subset D(\varphi(f))$, $\mathcal{D} \subset D(\varphi(f)^*)$ und $\varphi(f)^* \restriction_{\mathcal{D}} = \varphi(\overline{f}) \restriction_{\mathcal{D}}$.
(ii)$\Omega \in \mathcal{D}$ und $\varphi(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$.
(iii) Für festes $\psi \in \mathcal{D}$, ist die Abbildung $f \mapsto \varphi(f)\psi$ linear.

W5: ***(Regularität der Felder)*** *Für alle $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}$ ist die Abbildung $f \mapsto (\psi_1, \varphi(f)\psi_2)$ eine temperierte Distribution.*

W6: ***(Poincaré Invarianz der Felder)*** *Für alle $< a, \Lambda > \in \mathcal{P}_+^\uparrow$, $U(a, \Lambda)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4), \psi \in \mathcal{D}$, ist*

$$U(a, \Lambda)\varphi(f)U(a, \Lambda)^{-1}\psi = \varphi(< a, \Lambda > f)\psi,$$

wobei $< a, \Lambda > f(x) = f\left(\Lambda^{-1}(x - a)\right)$.

W7: ***(Lokale Kommutativität oder mikroskopische Kausalität)*** *Seien f und g aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ mit raumartig getrennten Trägern, dann gilt für alle $\psi \in \mathcal{D}$*

$$(\varphi(f)\varphi(g) - \varphi(g)\varphi(f))\,\psi = 0.$$

W8: ***(Zyklizität des Vakuums)*** *Der lineare Spann von Vektoren der Form $\varphi(f_1)\cdots\varphi(f_n)\Omega$ ist dicht in $\mathcal{H}$.*

Frühere Formulierungen der Quantenfeldtheorie behandelten φ als operatorwertige Funktion, obwohl das singuläre Verhaltens von φ bekannt war. Der Operator $\varphi(x)$ bezeichnete das Feld am Punkt x, analog dem klassischen Feld. Diese Formulierung führt jedoch zu Schwierigkeiten in der mathematischen Beschreibung. Diese lassen sich umgehen, indem das Feld φ als **operatorwertige Distribution** statt einer operatorwertigen Funktion definiert wird. Damit ist φ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ statt auf $\mathbb{R}^4$ definiert. $\varphi(f)$ kann als Raumzeitmittel eines hypothetischen Feldes $\varphi(x)$ mit der Verteilungsfunktion f betrachtet werden. Symbolisch wird dies durch

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^4} \varphi(x)f(x)dx.$$

dargestellt.

Bohr und Rosenfeld haben aus physikalischer Sicht gezeigt, daß es infolge der quantenmechanischen Unschärferelation, unmöglich ist, die elektrische Feldstärke an einem Punkt zu messen. Somit erscheint es aus mathematischer und physikalischer Sicht gerechtfertigt, **verschmierte Felder** $\varphi(f)$ zu betrachten. Es läßt sich auch zeigen, daß ein Feld, das die Eigenschaften 1-8 erfüllt, nicht durch Integration einer wohldefinierten operatorwertigen Funktion entstehen kann. Die Wahl des Testfunktionenraumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ist nicht zwingend. Eigenschaft 7 beschreibt mathematisch den Sachverhalt aus, daß sich Messungen in raumartig getrennten Gebieten nicht gegenseitig beeinflussen.

Es gibt zwei Möglichkeiten des weiteren Vorgehens. Erstens lassen sich die mathematischen Konsequenzen der Axiome untersuchen. Dies wurde in den Fünfziger und Anfang der Sechziger Jahre durchgeführt. Die zweite Möglichkeit ist die Konstruktion von Theorien, die die Axiome weitesgehend erfüllen. In Kapitel 2.3 wird gezeigt, daß das freie massive Klein-Gordon-Feld diese Axiome erfüllt. Allerdings beschreiben freie Theorien nur Teilchen, die nicht miteinander wechselwirken. Es hat sich herausgestellt, daß die Konstruktion von Theorien, die die Wechselwirkung berücksichtigen außerordentlich schwierig ist. Referenzen zu diesem Abschnitt sind [5, 9, 15, 16, 19].

2.2 Freies Bosonenfeld

Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, dann wird $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ mit dem inneren Produkt $(<\varphi_1,\phi_1>,<\varphi_2,\phi_2>) \equiv (\varphi_1,\varphi_2)_{\mathcal{H}_1} + (\phi_1,\phi_2)_{\mathcal{H}_2}$ zu einem Hilbertraum. Diesen Raum nennt man **direkte Summe** von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$, und er wird symbolisch durch $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ gekennzeichnet. Es lassen sich nunmehr in einfacher Weise abzählbare direkte Summen von Hilberträumen konstruieren. Sei $\{\mathcal{H}_n\}$ eine Folge von Hilberträumen und $\mathcal{H}$ die Menge aller Folgen $\{\Phi_n\}$ mit $\Phi_n \in \mathcal{H}_n$, die $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Phi_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty$ erfüllen. $\mathcal{H}$ wird dann zu einem Hilbertraum, der durch das Symbol $\oplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ dargestellt wird.

Seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1$ und $\varphi_2 \in \mathcal{H}_2$. Durch $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ mit $<\psi_1,\psi_2> \mapsto (\psi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}(\psi_2,\varphi_2)_{\mathcal{H}_2}$ wird eine konjugierte Linearform auf $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ definiert. Sei Θ die Menge aller endlichen Linearkombinationen solcher Linearformen. Dann wird durch $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\mu_1 \otimes \mu_2) \equiv (\varphi_1,\mu_1)_{\mathcal{H}_1}(\varphi_2,\mu_2)_{\mathcal{H}_2}$ und lineare Erweiterung ein wohldefiniertes positiv definites inneres Produkt auf Θ definiert. Das **Tensorprodukt** $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ist die Vervollständigung von Θ bezüglich dieses inneren Produktes. Ist $\{\varphi_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$ und $\{\psi_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$, dann ist $\{\varphi_n \otimes \psi_m\}$ Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Beispiel: Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$, d.h der Raum aller quadratintegrablen Funktionen, dann ist $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ isomorph zu $L^2(\mathbb{R}^2, d^2x)$.

Es gibt eine Verallgemeinerung des letzten Beispiels. Der Beweis ist in [14] zu finden.

Satz 2.2.1 *Seien $<X_1,\mu_1>$ und $<X_2,\mu_2>$ Maßräume, so daß $L^2(X_1,d\mu_1)$ und $L^2(X_2,d\mu_2)$ separabel sind. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus von $L^2(X_1,d\mu_1) \otimes L^2(X_1,d\mu_2)$ nach $L^2(X_1 \times X_2, d\mu_1 \otimes d\mu_2)$, so daß $f \otimes g \mapsto fg$.*

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}$ das n-fache Tensorprodukt. Sei

$\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}^n$, und $\mathcal{P}_n$ die Permutationsgruppe von n Elementen und sei $\{\varphi_n\}$ Basis von $\mathcal{H}$. Für jedes $\sigma \in \mathcal{P}_n$ definiert man einen Operator auf der Basis von $\mathcal{H}$ durch

$$\sigma(\varphi_{k_1} \otimes \varphi_{k_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_n}) = \varphi_{k_{\sigma(1)}} \otimes \varphi_{k_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{\sigma(n)}}.$$

σ läßt sich auf ganz $\mathcal{H}$ erweitern. Sei $S_n \equiv (1/n!)\sum_{\sigma\in\mathcal{P}_n}\sigma$, dann ist S_n ein Orthogonalprojektor mit Norm Eins. Sein Wertebereich wird als n-faches symmetrisches Tensorprodukt von H bezeichnet. Dies führt zur folgenden Definition:

Definition 2.2.1

- ***Bosonenfockraum:*** $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_s^n = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n\mathcal{H}^n.$

- *Zusätzlich wird ein spezieller dichter Teilraum von $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ ausgezeichnet, der sogenannten* ***endlichen Teilchenzahlraum*** $\mathcal{D}_0$*. Dieser ist wie folgt definiert:*

$$\mathcal{D}_0 := \{\psi = (\psi^0, \psi^1, \cdots) \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})\,|\exists N \in \mathbb{N}\,mit\,\psi^n = 0\,\forall n \geq N\}.$$

- ***Teilchenzahloperator:*** *Sei*

$$D(\mathcal{N}) \equiv \left\{\psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \middle| \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\|\psi^n\|^2 < \infty\right\},$$

dann definiert man eine Abbildung $\mathcal{N} : D(\mathcal{N}) \to \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ durch

$$(\psi^0, \psi^1, \psi^2, \cdots) \mapsto (0, \psi^1, 2\psi^2, 3\psi^3, \cdots).$$

Der Teilchenzahloperator ist selbstadjungiert und besitzt als Core den endlichen Teilchenzahlraum $\mathcal{D}_0$. Sei $f \in \mathcal{H}$ fest. Für Vektoren aus $\mathcal{H}^n$ mit der Form $\eta = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_n$ definiert man eine Abbildung $b^-(f) : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^{n-1}$ durch

$$b^-(f)(\eta) = (f, \psi_1)(\psi_2 \otimes \psi_3 \cdots \otimes \psi_n).$$

$b^-(f)$ läßt sich leicht auf Linearkombinationen von solchen Vektoren erweitern. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung wird gezeigt, daß $\|b^-(f)(\eta)\| \leq \|f\|\|\eta\|$. Da der Spann solcher Vektoren η dicht in $\mathcal{H}^n$ ist, und $b^-(f)$ auf dieser Menge beschränkt ist, läßt sich $b^-(f)$ unter Beibehaltung der Operatornorm in eindeutiger Weise auf ganz $\mathcal{H}^n$ ausdehnen(Theorem 4.1.1). Im Fall $n = 0$ definiert man $b^-(f) : \mathcal{H}_0 \to 0$. Sei η wie zuvor, dann wird eine zweite Abbildung $b^+(f) : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^{n+1}$ definiert, und zwar durch

$$b^+(f)(\eta) = f \otimes \psi_1 \cdots \otimes \psi_n.$$

Auf der Menge der Linearkombination von Vektoren des Typs η ergibt sich die Abschätzung $\|b^+(f)(\eta)\| \leq \|f\|\|\eta\|$. Somit läßt sich $b^+(f)$ wieder auf ganz $\mathcal{H}^n$ erweitern. Beide Operatoren lassen sich sich auf $\mathcal{F} \equiv \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}^n$ ausdehnen. Man beachte, daß $f \mapsto b^+(f)$ linear, $f \mapsto b^-(f)$ antiliner und $b^+(f) = b^-(f)^*$.

Definition 2.2.2

- ***Erzeugungsoperator:*** $a^+(f) \equiv Sb^+(f)\sqrt{\mathcal{N}+1} : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0$
- ***Vernichtungsoperator:*** $a^-(f) \equiv b^-(f)\sqrt{\mathcal{N}} : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0$

Die $a^{\#}(f)$'s sind unbeschränkte Operatoren. Die Abbildung $\mathcal{H} \ni f \to a^+(f)$ ist linear, jedoch $\mathcal{H} \ni f \to a^-(f)$ antilinear. Anhand der Definition zeigt man, daß $a^+(f)^* \restriction_{\mathcal{D}_0} = a^-(f)$ und $a^-(f)^* \restriction_{\mathcal{D}_0} = a^+(f)$. Damit sind beide Operatoren abschließbar, und die Abschlüsse sollen mit dem gleichen Symbol bezeichnet werden. Weiter ergibt sich für alle $\psi^n \in \mathcal{H}_s^n$ die Abschätzung

$$\|a^{\#}(f_1)a^{\#}(f_2)\cdots a^{\#}(f_k)\psi^n\| \leq \sqrt{n+1}\cdots\sqrt{n+k}\|f_1\|\cdots\|f_k\|\|\psi^n\|, \tag{2.1}$$

wobei $a^{\#}(f)$ entweder für $a^+(f)$ oder $a^-(f)$ steht.

In der relativistischen Quantenfeldtheorie ist die Teilchenzahl nicht mehr konstant. Der Fockraum $\mathcal{F} \equiv \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}^n$ modelliert ein Quantensystem mit variabler Teilchenzahl. Dabei werden die Vektoren aus $\mathcal{H}_n$ als n-Teilchenzustände interpretiert. Die Bose-Statistik wird durch Restriktion auf die Teilräume $S_n\mathcal{H}^n$ realisiert.

Beispiel: Sei $< X, d\mu >$ ein Maßraum, so daß $L^2(X, d\mu)$ separabel ist, dann folgt mit Theorem 2.2.1, daß

$$S_n \bigotimes_{j=1}^{n} L^2(X, d\mu) = L_s^2(X \times \cdots \times X, d\mu \otimes \cdots \otimes d\mu).$$

Dabei ist L_s^2 die Menge aller Funktionen in L^2, die invariant sind bezüglich der Permutation der Variabeln. Die Operatoren $a^-(f)$ und $a^+(f)$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \left(a^-(f)\psi\right)^n(x_1,\cdots,x_n) &= \sqrt{n+1}\int_X \overline{f}(x)\psi_s^{n+1}(x,x_1,\cdots,x_n)d\mu(x) \\ \left(a^+(f)\psi\right)^n(x_1,\cdots,x_n) &= \tfrac{1}{\sqrt{n}}\textstyle\sum_{i=1}^n f(x_i)\psi_s^{n-1}(x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n), \end{aligned}$$

wobei $\hat{x}_i$ bedeutet, daß x_i ausgelassen wird.

Satz 2.2.2 *Sei $\Phi(f) \equiv a^+(f) + a^-(f)$, dann gilt:*

a) *$\Phi(f)$ ist auf $\mathcal{D}_0$ wesentlich selbstadjungiert.*
b) *für alle $\Psi \in \mathcal{D}_0$ gilt*

$$[\Phi(f), \Phi(g)]\psi = \Phi(f)\,\Phi(g)\psi - \Phi(g)\,\Phi(f)\psi = 2iIm(f,g)_{\mathcal{H}}\psi \tag{2.2}$$
$$[a^-(f), a^+(g)]\psi = a^-(f)a^+(g)\psi - a^+(g)a^-(f)\psi = (f,g)_{\mathcal{H}}\psi \tag{2.3}$$
$$[a^+(f), a^+(g)]\psi = [a^-(f), a^-(g)]\psi = 0. \tag{2.4}$$

c) *Sei $W(f) = e^{i\overline{\Phi(f)}}$, dann gilt*

$$W(f+g) = e^{iIm(f,g)_{\mathcal{H}}}W(f)W(g). \tag{2.5}$$

d) *Falls $f_n \to f \in \mathcal{H}$, dann gilt $\Phi(f_n)\psi \to \Phi(f)\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{D}_0$ und $W(f_n)\psi \to W(f)\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$.*

Beweis: [14] und [2]

Die unitären Operatoren $W(f) = e^{i\overline{\Phi(f)}}$ werden als **Weyloperatoren** bezeichnet. Die Beziehungen (2.11) sind die sogenannten **Weylrelationen** und (2.9) die **Kanonischen Vertauschungsrelationen**. $\Phi(f)$ bezeichnet den **Segal Feldoperator**, oder Feldoperator. Der Abschluß des Feldoperators wird im folgenden auch mit $\Phi(f)$ bezeichnet.

2.3 Massives skalares Klein-Gordon-Feld

Sei $x \in \mathbb{R}^4$. Solche Vektoren werden in einen zeitlichen und räumlichen Anteil aufgeteilt, $x \equiv < x^0, \underline{x} >$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Das Lorentz invariante Pseudoskalarprodukt zweier Vierervektoren wird durch

$$x \cdot \tilde{x} \equiv x_0^2 - \underline{x}^2, \text{ mit } \underline{x}^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

notiert. Sei $m \in \mathbb{R}$ und $m > 0$. Die **Massenschale** ist die Menge $H_m \equiv \{x \in \mathbb{R}^4 | \quad x^0 > 0 \quad x \cdot \tilde{x} = m^2\}$ und der **Vorwärtslichtkegel** ist definiert als $\overline{V}^+ \equiv \{x \in \mathbb{R} | \quad x \cdot \tilde{x} \geq 0, \quad x^0 \geq 0\}$. H_m ist eine abgeschlossene Menge und $H_m \subset \overline{V}^+$. Sei $\mathcal{H} = L^2(H_m, d\Omega_m)$, mit dem Lorentz invarianten Maß Ω_m auf H_m gegeben durch:

$$\Omega_m(B_m) = \int_{\mathbb{R}^3} 1_{B_m} \left(\sqrt{m^2 + \underline{x}^2}, \underline{x}^2 \right) \frac{1}{\sqrt{\underline{x}^2 + m^2}} d(\underline{x}).$$

Dabei ist $B_m \in \mathcal{B} \cap H_m$ und $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Lebesgue meßbaren Mengen in $\mathbb{R}^4$. $\mathcal{H}_m$ ist ein separabler Hilbertraum. Weiter wird definiert $\mu(\underline{x}) \equiv \sqrt{m^2 + \underline{x}}$.

Als nächstes wird der Schwartzraum, der schon in den Wightman Axiomen auftrat eingeführt. Dazu sind einige Notationen nötig. Sei I_+^n die Menge aller n-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen $\alpha =< \alpha_1, \cdots, \alpha_n >$ und $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Weiter sei

$$\begin{aligned} D^\alpha &\equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ x^\alpha &\equiv x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Definition 2.3.1

- *Der* ***Schwartzraum*** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ *ist die Menge aller unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen f(x) auf* $\mathbb{R}^n$*, für die gilt*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in I_+^n.$$

- *Der topologische Dual-Raum von* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$*, bezeichnet mit* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$*, heißt* ***Raum der temperierten Distributionen****.*

Satz 2.3.1
a)*Der Vektorraum* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ *mit der natürlichen Topologie, gegeben durch die Seminormen* $\|f\|_{\alpha,\beta}$*, ist ein Fréchet Raum.*
b)*Die Fouriertransformation ist eine lineare bistetige Bijektion von* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ *nach* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$*. Die inverse Abbildung ist die inverse Fouriertransformation.*

Als nächstes wird das massive Klein-Gordon-Feld mit Hilfe des Feldoperators aus Abschnitt 2.1 konstruiert. Die Fouriertransformation ist in diesem Abschnitt im Hinblick auf das Lorentzinvariante innere Produkt $y \cdot \tilde{x}$, definiert als:

$$\tilde{f}(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} e^{-ip\cdot\tilde{x}} f(x) dx$$

und

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} e^{ip\cdot\tilde{x}} \tilde{f}(p) dp \quad ,$$

wobei $x, p \in \mathbb{R}^4$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Weiter definiert man eine stetige Abbildung $\hat{} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \to L^2(H_m, d\Omega_m)$ durch

$$\hat{f}(x) = \tilde{f}(-\mu(\underline{x}), -\underline{x}).$$

Definition 2.3.2 *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ und $\mathcal{H}_m = L^2(H_m, d\Omega_m)$, dann ist das* ***massive Klein-Gordon-Feld*** *definiert durch*

$$\Phi_m(f) \equiv \sqrt{\pi} \left(\Phi(\widehat{\Re f}) + i\Phi(\widehat{\Im f}) \right). \tag{2.6}$$

Dabei ist $\Re f$ der Realteil von f und $\Im f$ der Imaginärteil. Da $a^{\pm}(\cdot)$ linear bzw. antilinear ist, folgt für das Klein-Gordon-Feld auf $\mathcal{D}_0$

$$\Phi_m(f) = \sqrt{\pi} \left(a^+(\hat{f}) + a^-(\overline{\tilde{f}} \restriction_{\mathcal{H}_m}) \right). \tag{2.7}$$

Aus dem Beispiel auf Seite 9 folgt, wie $\Phi_m(f)$ explizit auf dem Fockraum $\mathcal{F}_+(L^2(H_m, d\Omega_m))$ abbildet:

$$\begin{aligned}
\left(a^-(\overline{\tilde{f}} \restriction_{\mathcal{H}_m})\psi \right)^n (p_1, \cdots, p_n) &= \sqrt{n+1} \int\limits_{\mathcal{H}_m} \tilde{f}(p) \psi^{n+1}(p, p_1, \cdots, p_n) d\Omega_m(p) \\
&= \sqrt{n+1} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{f}(\mu(\underline{p}), (\underline{p}))}{\mu(\underline{p})} \psi^{n+1}((\mu(\underline{p}), \underline{p}), p_1, \cdots, p_n) d\underline{p} \\
\left(a^+(\hat{f})\psi \right)^n (p_1, \cdots, p_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}(-p_i) \psi^{n-1}(p_1, \cdots, \hat{p}_i, \cdots, p_n).
\end{aligned}$$

Auf $L^2(H_m, d\Omega_m)$ definiert sich eine unitäre Darstellung der eingeschränkten Poincaré-Gruppe durch:

$$\left(U_m(a, \Lambda)\psi \right)(p) = e^{ip\cdot\tilde{a}} \psi(\Lambda^{-1} p)$$

Satz 2.3.2 *Das Quadrupel $< \mathcal{F}_+(\mathcal{H} = L^2(H_m, d\Omega_m), \Gamma(U_m(\cdot,\cdot), \Phi_m(\cdot), \mathcal{D}_0 >$ erfüllt die Wightman Axiome, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ gilt folgende* ***Feldgleichung*** *:*

$$\Phi_m((\partial^2/\partial t^2 - \Delta + m^2) f) = 0.$$

Beweis: Ein Beweis, der mit Hilfe des freien Bosonenfeldes durchgeführt wird ist in [15] zu finden. Weitere Quellen sind [5] und [19].

Abschließend sollen noch einige wichtige Bemerkungen zum Klein-Gorden-Feld $\Phi_m(f)$ gegeben werden. Im Gegensatz zum Feldoperator $\Phi(f)$ aus Abschnitt (2.2), ist $\Phi_m(f)$ nicht mehr für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ wesentlich selbstadjungiert auf $\mathcal{D}_0$. Für reelle $f's$ ist dies jedoch der Fall und Theorem 2.2.2 ist voll anwendbar.

Kapitel 3

Wickprodukte

Im folgenden soll kurz eine Motivation zur Definition des Wickproduktes im Rahmen einer Feldtheorie dargestellt werden. Ein natürlicher Kandidat von Feldern, die auch den Gårding-Wightman-Axiomen genügen, sollten Potenzen des freien Klein-Gordon-Feldes $\Phi(x)$ sein. Eine formale Rechnung ergibt für den Vakuumerwartungswert von $\Phi(x)^2$

$$\lim_{y\to x}\Big(\Omega, \Phi(y)\Phi(x)\Omega\Big) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{p}}{(2\pi)^4\mu(\underline{p})} = \infty.$$

Die Lösung ist wohlbekannt [18]. Es müssen von $\Phi(x)^n$ geeignete Operatoren subtrahiert werden, so daß der Erwartungswert für bestimmte Zustände endlich wird. Für $n = 2$ folgt:

$$:\phi^2:(x) = \lim_{x_1,x_2\to x}\Bigg(\phi(x_1)\phi(x_2) - \Big(\Omega, \phi(x_1)\phi(x_2)\Omega\Big)\Bigg)$$

als richtige Wahl. Wird der Ausdruck in der Klammer mit einer Testfunktion $f(x_1)g(x_2)$ verschmiert, und benutzt man anschließend kanonische Vertauschungsrelationen, dann ergibt der verschmierte Ausdruck, dargestellt durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren,

$$a^+(f)a^+(g) + a^+(f)a^-(g) + a^+(g)a^-(f) + a^-(f)a^-(g).$$

Diese Subtraktion bewirkt folgendes: es treten nur noch Produkte von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf, in denen der Erzeugungsoperator vor dem Vernichtungsoperator steht. Beliebige Produkte von Auf- und Absteigeoperatoren, die in diesem Sinn geordnet sind, die sogenannten normalgeordneten Produkte, sollen durch das Symbol $:\quad:$ um das Produkt gekennzeichnet werden. In Kapitel 3.3 wird gezeigt, daß

$$:\phi^n:(x) = \lim_{x_1,\cdots,x_n\to x}\Big(:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n):\Big).$$

Um diesen Ausdruck mathematisch zu definieren, wird wie folgt vorgegangen. Zunächst werden die normalgeordneten Produkte des Feldes untersucht. Dieses ist im Detail in Kapitel 3.1 dargestellt. Im Hinblick auf hinreichende Allgemeinheit wird die Untersuchung in einem beliebigen Bosonenfockraumen durchgeführt. Aufgrund der in der Einleitung dargestellten Vorgehensweise, stehen folgende Fragestellungen im Mittelpunkt:

- Können normalgeordnete Produkte des Feldes mittels der Gâteaux-Ableitung einer nichtlinearen Abbildung konstruiert werden?
- Welchen Definitionsbereich erhält man aus dieser Charakterisierung und welche Eigenschaften haben die normalgeordneten Produkte des Feldes?
- Wie stellt sich die Kombinatorik der normalgeordneten Produkte von Feldern dar?

In Kapitel 3.2 werden die Ergebnisse von Abschnitt 3.1 auf den Fall des Klein-Gordon-Feldes angewandt. Wesentliches Ergebnis ist dabei zunächst, daß sich die normalgeordneten Produkte des Feldes durch die Gâteaux-Ableitung(Kap. 4.2) eines nichtlinearen Operators konstruieren lassen. Der dadurch charakterisierte Definitionsbereich gewährleistet nicht, daß das normalgeordnete Produkt des Feldes $:\Phi(\cdot)^n:$ eine operatorwertige Distribution ist. Zur gewählten Konstruktion des Wickproduktes ist dies jedoch notwendig. Im Anschluß daran wird der zweite Ableitungsbegriff eingeführt. Die dabei generierten Differentiale sind per Definition vektorwertige Distributionen. Allerdings kann nicht von vornherein davon ausgegangen werden, daß dieses Konzept unmittelbar zu normalgeordneten Produkten führen muß. Zur Unterscheidung werden diese neuen Objekte daher als Prä-Wickprodukte bezeichnet. Der letzte Teil des Abschnittes beschäftigt sich mit den Eigenschaften und Zusammenhängen der beiden Konstruktionen.

In Kapitel 3.3 wird dann das Wickprodukt

$$:\phi^n:(x) = \lim_{x_1,\cdots,x_n \to x} \Big(:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n): \Big)$$

rigoros definiert. Die Konstruktion erfolgt, völlig analog zu [3], mit Hilfe der mikrolokalen Analysis.

3.1 Normalgeordnete Produkte von Feldoperatoren

Definition 3.1.1 (Normalordnung) *Sei $a^{\#}(f_1)\cdots a^{\#}(f_n)$ ein Produkt aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren; unter der Normalordnung eines solchen Produktes versteht man wieder ein Produkt, wobei aber alle Erzeugungsoperatoren vor den Vernichtungsoperatoren stehen. Symbolisiert wird dies durch*

$$:a^{\#}(f_1)\cdots a^{\#}(f_n):.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} :\Phi(f)\Phi(g): &= :\big(a^+(f)a^+(g)+a^+(f)a^-(g)+a^-(f)a^+(g)+a^-(f)a^-(g)\big): \\ &= a^+(f)a^+(g)+a^+(f)a^-(g)+a^+(g)a^-(f)+a^-(f)a^-(g). \end{aligned}$$

Die $a^{\#}(f)$'s sind unbeschränkte Operatoren. Es ergibt sich bei ihren Produkten stets das Problem eines zulässigen Definitionsbereiches. Da $\mathcal{D}_0$ invariant ist unter Anwendung von Auf- bzw. Absteigeoperatoren, sind normalgeordnete Produkte auf dieser Menge stets wohldefiniert.

Satz 3.1.1 (Kombinatorik normalgeordneter Produkte von Feldoperatoren) *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ der Bosonenfockraum und $f \in \mathcal{H}$, dann gilt für alle $\psi \in \mathcal{D}_0$*

$$\textbf{\textit{a)}} : \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N) : \psi = \sum_{n=0}^{[N/2]} (-1)^n \sum_{A_n(N)} [f_{i_1}, \cdots, f_{i_{2n}}]\Phi(f_{j_1})\cdots\Phi(f_{j_{N-2n}})\psi. \tag{3.1}$$

Dabei ist $[N/2]$ die größte ganze Zahl die kleiner gleich $N/2$ ist. Summiert wird in der zweiten Summe über alle Aufteilungen der Menge $\{1, \cdots, N\}$ in zwei disjunkte Mengen $\{i_1, \cdots, i_{2n}\}$ und $\{j_1, \cdots j_{N-2n}\}$, die $i_1 < i_2 \cdots < i_{2n}$ und $j_1 < \cdots < j_{N-2n}$ erfüllen. Die Koeffizienten $[f_{i_1}, \cdots, f_{2n}]$ sind definiert durch

$$[f_{i_1}, \cdots, f_{i_{2n}}] \equiv \sum_{P_n\{i_1, \cdots, i_{2n}\}} \prod_{l=1}^{n} \left(f_{k_{2l-1}}, f_{k_{2l}}\right). \tag{3.2}$$

Summiert wird über alle Partitionen $(k_1, k_2), \cdots, (k_{2l-1}, k_{2l})$ der Menge $\{i_1, \cdots i_{2l}\}$ wobei $k_1 < k_2, k_3 < k_4, \cdots k_{2l-1} < k_{k_{2l}}$.
b)*Die normalgeordneten Produkte $: \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N) :$ lassen sich auf $\mathcal{D}_0$ auch durch folgende Rekursionsvorschrift konstruieren:*

$$\begin{aligned} : \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_{N+1}) : \psi &= : \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N) : \Phi(f_{N+1})\psi \\ &- \sum_{n=0}^{N} (f_n, f_{N+1}) : \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(\hat{f}_{i_n})\cdots\Phi(f_N) : \psi, \end{aligned}$$

$: \Phi(f)^0 : \psi = \psi$ und $: \Phi(f)^1 : \psi = \Phi(f)\psi$. $\hat{f}_j$ bedeutet, daß dieser Term ausgelassen wird.

Beweis: Mittels vollständiger Induktion und unter Ausnutzung der Vertauschungsrelationen (Gl. 2.8 und 2.9).

Normalgeordnete Potenzen des Feldoperators lassen sich auch durch Ableitungen der vektorwertigen Funktion

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto e^{\frac{1}{2}\|\lambda f\|^2} W(tf)\psi$$

konstruieren. Das folgende Theorem präzisiert diese Aussage.

Satz 3.1.2 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ der Bosonenfockraum ,$W(f) = e^{i\Phi(f)}$ der zugehörige Weyloperator,$\psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ und $f \in \mathcal{H}$. Ferner definiert man die vektorwertige Abbildung*

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \psi(\lambda f) \equiv e^{\frac{1}{2}\|\lambda f\|^2} W(\lambda f)\psi. \tag{3.3}$$

a)*Sei $\mathcal{D}_f$ die Menge aller Vektoren ψ aus dem Bosonenfockraum $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ für die, die Abbildung 3.3 unendlich oft differenzierbar ist, dann gilt*

$$\mathcal{D}_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(\Phi(f)^n).$$

Weiter gilt für alle Vektoren ψ aus $\mathcal{D}_f$:

$$\frac{d^N}{d\lambda^N}\psi(\lambda f) = \sum_{k=o}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{d^{N-k}}{d\lambda^{N-k}} e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right) i^k W(\lambda f)\Phi(f)^k\psi. \tag{3.4}$$

b) *i^{-N}-mal der N-ten Ableitung der Abbildung 3.3 an der Stelle Null ergibt gerade die normalgeordnete N-te Potenz des Feldoperators, d.h. für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\psi \in \mathcal{D}_0$ gilt*

$$i^{-N} \frac{d^N}{d\lambda^N} \psi(\lambda f) \restriction_{\lambda=0} =: \Phi(f)^N : \psi.$$

Beweis: Zunächst wird ein Lemma bewiesen.

Lemma 3.1.1
a) *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \eta(\lambda) \in \mathcal{H}$ eine vektorwertige Abbildung und $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion mit $f \neq 0$. Dann ist die vektorwertige Abbildung $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto f(\lambda)\eta(\lambda)$ genau dann differenzierbar, wenn η differenzierbar ist. Es gilt dann*

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda)\eta(\lambda) = f'(\lambda)\eta(\lambda) + f(\lambda)\frac{d\eta}{d\lambda}(\lambda).$$

b) *Sei $W(f)$ der Weyloperator, ψ ist genau dann in der Menge $D(\Phi(f)^k)$, wenn $\frac{d^k}{d\lambda^k} W(\lambda f)\psi$ existiert, und es gilt dann*

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} W(\lambda f)\psi = i^k W(\lambda f)\Phi(f)^k \psi.$$

Beweis von Lemma 3.1.1:

$$\text{a)} \quad \frac{d}{d\lambda}\left(f(\lambda)\eta(\lambda)\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\lambda+\epsilon)\eta(\lambda+\epsilon) - f(\lambda)\eta(\lambda)}{\epsilon}$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\underbrace{f(\lambda+\epsilon)}_{c_\epsilon} \underbrace{\left(\frac{\eta(\lambda+\epsilon) - \eta(\lambda)}{\epsilon}\right)}_{\mu_\epsilon} + \left(\frac{f(\lambda+\epsilon) - f(\lambda)}{\epsilon}\right)\eta(\lambda) \right)$$

Da f differenzierbar ist, konvergiert c_ϵ sowie der zweite Term der Summe; demnach konvergiert der ganze Term genau dann, wenn μ_ϵ konvergiert.
b)Aus Theorem 5.1.5 folgt, daß $\frac{d}{dt} W(tf)\psi$ genau dann existiert, wenn $\psi \in D(\Phi(f))$ ist, und es gilt dann $\frac{d}{dt} W(tf)\psi = iW(tf)\Phi(f)\psi$. Durch Induktion zeigt man nun b). Die Induktionsannahme ergibt

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} W(tf)\psi = \frac{d}{dt}\left(i^n W(tf)\Phi(f)^n \psi\right) \tag{3.5}$$

und $\psi \in D(\Phi(f)^n)$. Eine erneute Anwendung von Theorem 5.1.5 liefert, daß die rechte Seite von (3.6) genau dann existiert, wenn $\Phi(f)^n\psi \in D(\Phi(f))$, d.h. $\psi \in D(\Phi(f)^{n+1})$; und daß $\frac{d}{dt}\left(i^n W(tf)\Phi(f)^n\psi\right) = i^{n+1} W(tf)\Phi(f)^{n+1}\psi$.

Beweis von Theorem 3.1.2: Durch vollständige Induktion zeigt man, daß $\frac{d^N}{d\lambda^N}\psi(\lambda f)$ genau dann existiert, wenn $\psi \in D(\Phi(f)^N)$; und es gilt

$$\frac{d^N}{d\lambda^N}\psi(\lambda f) = \sum_{k=o}^{N} \binom{N}{k} \left(\frac{d^{N-k}}{d\lambda^{N-k}} e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right) i^k W(\lambda f)\Phi(f)^k \psi.$$

Der Fall $N = 1$ folgt direkt aus Lemma 3.1.1. Die Induktionsannahme liefert

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^N}{d\lambda^N}\psi(\lambda f)\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{k=o}^{N} \binom{N}{k} \underbrace{\left(\frac{d^{N-k}}{d\lambda^{N-k}} e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right) i^k W(\lambda f)\Phi(f)^k \psi}_{\eta_k(\lambda)}\right) \tag{3.6}$$

Da $\psi \in D(\Phi(f)^N)$, folgt aus Teil a) und b) des Lemmas, daß $\frac{d}{d\lambda}\eta_k$ für alle $k < N$ existiert. Die rechte Seite von (3.6) existiert somit genau dann, wenn $\frac{d}{d\lambda}\eta_N$ existiert; dies ist aufgrund von Lemma 3.1.1a genau dann der Fall, wenn $\psi \in D(\Phi(f)^{N+1})$. Weiter gilt dann

$$\frac{d}{d\lambda}\eta_N = \left(\frac{d}{d\lambda}e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right) i^N W(\lambda f)\Phi(f)^N\psi + e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2} i^{N+1} W(\lambda f)\Phi(f)^{N+1}\psi,$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^N}{d\lambda^N}\psi(\lambda f)\right) &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{d^{N-k+1}}{d\lambda^{N-k+1}}e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right) i^k W(\lambda f)\Phi(f)^k\psi \\ &\quad +\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{d^{N-k}}{d\lambda^{N-k}}e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right) i^{k+1} W(\lambda f)\Phi(f)^{k+1}\psi\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Relation $\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} = \binom{N+1}{k}$ für alle $1 \le k \le N+1$ folgt

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^N}{d\lambda^N}\psi(\lambda f)\right) = \sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}\left(\frac{d^{N+1-k}}{d\lambda^{N+1-k}}e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right) i^k W(\lambda f)\Phi(f)^k\psi,$$

womit a) bewiesen ist. b) Sei ψ aus $\mathcal{D}_0$, dann folgt aus Gleichung (3.1)

$$:\Phi(f)^N:\psi = \sum_{k=0}^{[N/2]}\frac{N!}{k!(N-2k)!}\Phi(f)^{N-2k}\left(-\frac{\|f\|^2}{2}\right)^k\psi. \tag{3.7}$$

Aus (3.4) erhält man

$$\frac{d^N}{i^N d\lambda^N}:W(\lambda f):\psi\restriction_{\lambda=0} = \sum_{k=o}^{N}\binom{N}{k}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right)\restriction_{\lambda=0} i^{-k}\Phi(f)^{N-k}\psi. \tag{3.8}$$

Mittels Induktion zeigt man sofort, daß

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}\|f\|^2}\right)(0) = \begin{cases} 0 & \text{falls k ungerade} \\ \|f\|^k\frac{k!}{(\frac{k}{2})!2^{\frac{k}{2}}} & \text{falls k gerade}\end{cases}$$

Mit der Äquivalenz $\frac{(2m)!}{2^m m!}\binom{N}{2m} = \frac{N}{m!(N-2m)!}$ folgt dann, daß die rechten Seiten von (3.7) und (3.8) übereinstimmen, womit b) bewiesen ist.

■

Mit Hilfe dieses Theorems können die normalgeordneten Potenzen des Feldoperators auf einem grösseren Definitionsbereich definiert werden, nämlich auf dem Durchschnitt aller $\mathcal{D}_f$'s. Aufgrund einer Polarisationsidentität gilt: symmetrische n-lineare Abbildungen $T : X \times \cdots \times X \to Y$ sind vollständig durch ihre Werte auf der Menge $\{< x, \cdots, x > | x \in X\}$ bestimmt. Aufgrund dessen könnte vermutet werden, daß die normalgeordneten Produkte des Feldoperators bereits vollständig durch die normalgeordneten Potenzen bestimmt sind. Damit die Polarisationsidentität gilt, muß $\Phi(\cdot)\cdots\Phi(\cdot)\psi$ n-linear sein. Dies ist jedoch nicht garantiert. Angenommen $\Phi(\cdot)\cdots\Phi(\cdot)\psi$ wäre n-linear und symmetrisch, dann würde im Fall $n = 2$ folgen

$$:\Phi(f+g)^2:\psi =: \Phi(f)^2:\psi + 2:\Phi(f)\Phi(g):\psi + :\Phi(g)^2:\psi.$$

Die linke Seite ist auf jeden Fall wohldefiniert. Da

$$\bigcap_{f\in\mathcal{H}} \mathcal{D}_f = \bigcap_{f\in\mathcal{H}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(\Phi(f)^n) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{f_1,f_2,\cdots,f_n\in\mathcal{H}} D(\Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n)),$$

ist nicht klar, ob die rechte Seite wohldefiniert ist. Dieses Problem läßt sich lösen, indem man die N-te Gâteaux-Ableitung der nichtlinearen Abbildung

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto e^{\frac{1}{2}\|f\|^2} W(f)\psi$$

betrachtet. Es wird sich herausstellen, daß mit Hilfe der oberen Abbildung die normalgeordneten Produkte von Feldoperatoren auf einem grösseren Definitionsbereich als $\mathcal{D}_0$ konstruiert werden können. Der Begriff der Gâteaux-Ableitung befindet sich im Kapitel mathematische Ergänzungen. Da das folgende Theorem kombinatorisch sehr aufwendig ist, wird der Beweis in den Anhang verlegt. Man definiert zunächst

$$\mathcal{D}_\Pi \equiv \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{f_1,f_2,\cdots,f_N\in\mathcal{H}} D(\Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N)).$$

Satz 3.1.3 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ der Bosonenfockraum, $f \in \mathcal{H}$, $\psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ und $W(f)$ der zugehörige Weyloperator. Ferner definiert man den nicht linearen Operator $\psi(\cdot)$ als Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ durch*

$$f \mapsto e^{\frac{1}{2}\|f\|^2} W(f)\psi.$$

Die Abbildung $\psi(\cdot)$ ist genau dann im Punkt f unendlich oft Gâteaux-differenzierbar, wenn $\psi \in \mathcal{D}_\Pi$. Weiter gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} i^{-N} d_G^N \psi(0) < f_N, \cdots, f_1 > &= \sum_{n=0}^{[N/2]} (-1)^n \sum_{A_n(N)} [f_{i_1}, \cdots, f_{i_{2n}}] \Phi(f_{j_1}) \cdots \Phi(f_{j_{N-2n}})\psi \\ &\equiv \; : \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N) : \psi. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Beweis: siehe Anhang.

Im folgenden wird als Definitionsbereich der normalgeordneten Produkte von Feldoperatoren stets $\mathcal{D}_\Pi$ verwendet. Definiert werden sie mittels Gleichung 3.9.

Satz 3.1.4 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ der Bosonenfockraum, dann gilt für die normalgeordneten Produkte:*
a) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\psi \in \mathcal{D}_\Pi$ ist die Abbildung*

$$\mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H} \ni < f_1, \cdots, f_n > \mapsto : \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n) : \psi$$

reell n-linear und symmetrisch.
b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{H}$ ist $\mathcal{D}_0$ ein Core für den Abschluß des Operators $: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n) :$. Sei $\mathcal{D}$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{D}_\Pi \supset \mathcal{D} \supset \mathcal{D}_0$, dann ist $\mathcal{D}_0$ ein Core für den Abschluß des Operators $: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n) :$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}$.*

Beweis:
a) Sei $\psi \in \mathcal{D}_\Pi$ und θ_m die Folge aus Theorem 5.2.1, die gegen ψ konvergiert. Da $:\Phi(\cdot)\cdots\Phi(\cdot):\psi$ für alle ψ aus $\mathcal{D}_0$ symmetrisch ist, folgt

$$\begin{aligned} :\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):\psi &= \lim_{m\to\infty} :\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):\theta_m \\ &= \lim_{m\to\infty} :\Phi(f_{\pi(1)})\cdots\Phi(f_{\pi(n)}):\theta_m \\ &= :\Phi(f_{\pi(1)})\cdots\Phi(f_{\pi(n)}):\psi \end{aligned}$$

für alle Permutationen π der Menge $\{1,\cdots,n\}$. Die reelle n-Linearität ergibt sich aus der reellen n-Linearität von $:\Phi(\cdot)\cdots\Phi(\cdot):\psi$ für Vektoren $\psi \in \mathcal{D}_0$.
b) Für alle $f_1,\cdots,f_n \in \mathcal{H}$ ist $:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):$ als Operator in dem Fockraum ein symmetrischer Operator, denn sei $\psi,\varphi \in \mathcal{D}_\Pi$, dann gilt

$$\begin{aligned} \left(:\prod_{m=1}^{n}\Phi(f_m):\varphi,\psi\right) &= \sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l \sum_{A_{2l}(n)} \overline{[f_{i_1},\cdots,f_{i_{2l}}]}\left(\Phi(f_{j_1})\cdots\Phi(f_{j_{N-2l}})\varphi,\psi\right) \\ &= \sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l \sum_{A_{2l}(n)} \overline{[f_{i_1},\cdots,f_{i_{2l}}]}\left(\varphi,\Phi(f_{j_{N-2l}})\cdots\Phi(f_{j_1}):\psi\right) \\ &= \left(\varphi,:\prod_{m=1}^{n}\Phi(f_m):\psi\right). \end{aligned}$$

Der Abschluß existiert, da symmetrische Operatoren stets abschließbar sind. Da $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_\Pi$ bleibt zu zeigen, daß

$$\overline{:\prod_{m=1}^{n}\Phi(f_m):\restriction_{\mathcal{D}_0}} \supset :\prod_{m=1}^{n}\Phi(f_m):.$$

Dazu sei $\psi \in \mathcal{D}_\Pi$ beliebig. Zu zeigen ist die Existenz einer Folge ψ_n mit Elementen aus $\mathcal{D}_0$, die bzg. der Graphennorm von $:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):$ gegen ψ konvergiert. Man wählt die Folge θ_k aus Theorem 5.2.1, dann folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} :\prod_{m=1}^{n}\Phi(f_m):\theta_k &= \lim_{k\to\infty}\sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l \sum_{A_{2l}(n)} [f_{i_1},\cdots,f_{i_{2l}}]\Phi(f_{j_1})\cdots\Phi(f_{j_{N-2l}})\theta_n \\ &= \sum_{l=0}^{[n/2]}(-1)^l \sum_{A_{2l}(n)} [f_{i_1},\cdots,f_{i_{2l}}]\Phi(f_{j_1})\cdots\Phi(f_{j_{N-2l}})\psi. \end{aligned}$$

In völlig analoger Weise wird die andere Aussage gezeigt.

■

3.2 Prä-Wickprodukte des Klein-Gordon-Feldes

Das Skalarprodukt in $\mathcal{H}_m$ wird zunächst umgeschrieben. Sei $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ dann gilt

$$\begin{aligned}(\hat{f},\hat{g}) &= \int_{H_m} \overline{\hat{f}}(p)\hat{g}(p)d\Omega(p) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\tilde{f}}(\mu(\underline{p}),\underline{p})\tilde{g}(-\mu(\underline{p}),-\underline{p})\frac{d^3\underline{p}}{\mu(\underline{p})} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\underline{p}}{(2\pi)^4\mu(\underline{p})}\int_{\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4} dxdye^{-i(\widetilde{\mu(\underline{p}),\underline{p}})\cdot(x-y)}\overline{f}(x)g(y) \qquad (3.10) \\ &= w_2(\overline{f}\otimes g),\end{aligned}$$

mit $w_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4)$ und

$$w_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\underline{p}}{(2\pi)^4\mu(\underline{p})}e^{-i(\widetilde{\mu(\underline{p}),\underline{p}})\cdot(x-y)}.$$

Das letzte Integral ist als formaler Integralkern der Distributionen w_2 zu verstehen. w_2 definiert auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ mittels 3.10 ein semidefinites Skalarprodukt, d.h. $w_2(\cdot\otimes\cdot)$ erfüllt alle Eigenschaften eines Skalarproduktes, bis auf die Eigenschaft, daß $w_2(\overline{f}\otimes f)$ genau dann Null ist, wenn $f=0$. Es gilt:

$$\mathcal{S}_0 \equiv \{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)|w_2(\overline{f}\otimes f)=0\} = \{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)|w_2(\overline{f}\otimes g)=0 \quad \forall g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)\}.$$

Der Quotientenraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)/\mathcal{S}_0$ ist somit ein Prähilbertraum, und die Vervollständigung ergibt gerade $\mathcal{H}_m$. Als nächstes werden die Ergebnisse von Abschnitt 3.1 übertragen.

Definition 3.2.1 *Sei $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}_m)$ der Bosonenfockraum des Klein-Gordon-Feldes.*

- $D_\Pi \equiv \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)} D(\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^4)} D(\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n))$
- $D_p \equiv \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)} D(\Phi(f)^n)$
- *Sei $N\in\mathbb{N}$, $f_1,\cdots,f_N\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ und $\psi\in\mathcal{D}_\Pi$, **normalgeordnete Produkte des Klein-Gordon-Feldes** werden definiert durch*

  $$:\Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N):\psi \equiv \sum_{n=0}^{[N/2]}(-1)^n\sum_{A_n(N)}[f_{i_1},\cdots,f_{i_{2n}}]\Phi(f_{j_1})\cdots\Phi(f_{j_{N-2n}})\psi.$$

  Die Koeffizienten $[f_{i_1},\cdots,f_{i_{2n}}]$ sind durch (3.2) gegeben, wobei jedoch die Skalarprodukte (f_i,f_j) durch $w_2(\overline{f_i}\otimes f_j)$ ersetzt werden.
- *Sei $\mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^4)$ der Raum der reellwertigen Schwartzfunktionen, dann ist der Feldoperator des Klein-Gordon-Feldes selbstadjungiert, und die Weyloperatoren wohldefiniert. Sei $\psi\in\mathcal{F}_+(\mathcal{H}_m)$, dann definiert man eine vektorwertige Abbildung $\psi(\cdot)$ durch*

  $$\mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^4)\ni f\mapsto\psi(f)\equiv e^{\frac{w_2}{2}(f,f)}W(f)\psi. \qquad (3.11)$$

Satz 3.2.1
a)_Für alle_ $N \in \mathbb{N}$ _und_ $\psi \in \mathcal{D}_\Pi$ _ist die Abbildung_

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \cdots \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \ni < f_1, \cdots, f_N > \mapsto : \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N) : \psi$$

N-linear und symmetrisch.
b)_Sei_ $f \in \mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^4)$. _Die Abbildung_ $\psi(\cdot)$ _ist genau dann im Punkt_ f _unendlich oft Gâteaux-differenzierbar, wenn_ $\psi \in \mathcal{D}_\Pi$. _Weiter gilt für alle_ $N \in \mathbb{N}$

$$i^{-N} d_G^N \psi(0) < f_N, \cdots, f_1 > =: \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N) : \psi,$$

mit $f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^4)$.
c)_Sei_ $f \in \mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^4)$, _die vektorwertige Funktion_ $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \psi(\lambda f)$ _ist genau dann unendlich oft differenzierbar, wenn_ $\psi \in \mathcal{D}_p$ _und_ i^{-N}_-mal der N-Ableitung der Abbildung ergibt wieder die N-te Potenz des normalgeordneten Klein-Gordon-Feldes angewandt auf den Vektor_ ψ.
d)_Für alle_ $N \in \mathbb{N}$ _und_ $f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ _ist_ $\mathcal{D}_0$ _ein Core für den Abschluß des Operators_ $: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N) :$. _Sei_ $\mathcal{D}$ _ein linearer Teilraum von_ $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}_m)$ _mit_ $\mathcal{D}_\Pi \supset \mathcal{D} \supset \mathcal{D}_0$, _dann ist_ $\mathcal{D}_0$ _ein Core für den Abschluß des Operators_ $: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N) :$ _mit Definitionsbereich_ $\mathcal{D}$.
e) _Sei_ $\mathcal{D}_{gw}$ _die Gårding-Wightman-Domäne, d.h._ $\mathcal{D}_{gw} = \{\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)\Omega | f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4), n \in \mathbb{N}\}$. _Für alle_ $N \in \mathbb{N}$ _und_ $f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ _ist_ $\mathcal{D}_0$ _ein Core für den Abschluß des Operators_ $: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N) :$ _mit Definitionsbereich_ $\mathcal{D}_{gw}$.

Beweis: Aussage a) folgt aus der Definition des Klein-Gordon-Feldes (Gl. 2.12) und Theorem 3.14a. Der Beweis von Theorem 3.1.3 läßt sich in trivialer Weise auf den Fall des Klein-Gordon-Feldes übertragen, womit b) gezeigt ist. Analog folgt Aussage c) mit Hilfe von Theorem 3.1.2. Bei Punkt d) muss man beachten, daß der Operator $: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N) :$ nicht mehr symmetrisch ist. Die Existenz des Abschlusses folgt aus Theorem 5.1.3 und der Identität

$$(: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N) :)^* =: \Phi(\overline{f_1})\cdots\Phi(\overline{f_N}) :$$

auf $\mathcal{D}_0$. Die Aussage läßt sich dann wiederum aus Theorem 3.1.4b ableiten. Für Aussage e) ist es hinreichend zu zeigen, daß

$$: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N) : \restriction_{\mathcal{D}_0} \supset \overline{: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N) :} \restriction_{\mathcal{D}_{gw}}$$

Da $\mathcal{D}_{gw}$ dicht in $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}_m)$ und $\mathcal{D}_0$ der endliche Teilchenzahlraum ist, folgt dies sofort.

■

Man weiß nun, daß die Abbildung

$$< f_1, \cdots, f_N > \mapsto : \Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N) : \psi$$

für alle ψ aus $\mathcal{D}_\Pi$ N-linear und symmetrisch ist. Um das Wickprodukt zu definieren, ist es jedoch notwendig, daß diese Abbildung in den einzelnen Argumenten stetig ist, und somit eine vektorwertige Distribution bildet. Auf dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_\Pi$ ist das nicht garantiert(im Gegensatz zu $\mathcal{D}_0$).

Eine Alternative bietet der zuvor erwähnte zweite Ableitungsbegriff. Hier wird eine etwas “ stärkere “ Definition der Ableitung verwendet, um die Eindeutigkeit der dazugehörigen Differentiale zu garantieren.

Definition 3.2.2 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \to \mathcal{H}$ eine Abbildung. F heißt **unendlich oft differenzierbar** an der Stelle Null, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ symmetrische vektorwertige Distributionen $d^n F$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ und Seminormen ρ_n auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ existieren, so daß D1 und D2 erfüllt wird.*

D1: *Es gilt $\rho_{n+1} \geq \rho_n$.*

D2: *Für alle $N \in \mathbb{N}_+$ gibt es eine Umgebung U_N von Null, so daß*

$$\left\| F(h) - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} d^n F(h^{\otimes^n}) \right\| = o\left(\rho_N(h)^N\right) \quad \forall h \in U_N. \tag{3.12}$$

Dabei ist o eine Funktion in $\mathbb{R}$ mit $o(0) = 0$ und

$$\lim_{0 \neq \epsilon \to 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0.$$

Damit dieser Differenzierbarkeitsbegriff Sinn macht, sollten die vektorwertigen Distributionen $d^n F$ eindeutig sein. Dies ist auch der Fall, wie nun gezeigt wird. Seien $d^n F$ und $\widetilde{d^n F}$ vektorwertige Distributionen im Sinne der obigen Definition. Aufgrund von Theorem 4.3.2 ist es hinreichend zu zeigen, daß für alle f aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ $\quad d^n F(f^{\otimes^n}) = \widetilde{d^n F}(f^{\otimes^n})$ gilt.
Sei zunächst $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ mit $\rho_1(h) = 0$, dann folgt aus D2

$$\begin{aligned} \|dF(h) - \widetilde{dF}(h)\| &= \|dF(h) - F(0) + F(0) + F(h) - F(h) - \widetilde{dF}(h)\| \\ &\leq 2o(\rho_1(h)) = 0 \end{aligned}$$

Durch Induktion leicht sich leicht zeigen, daß für alle $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ mit $\rho_N(h) = 0$ für irgend ein $N \in \mathbb{N}_+$, stets $d^n F(h^{\otimes^n}) = \widetilde{d^n F}(h^{\otimes^n})$ für alle $n \leq N$ folgt. Sei h_k eine Folge von Testfunktionen, die gegen Null konvergiert und $\rho_1(h_k) \neq 0$ erfüllt, dann folgt aus D2

$$\begin{aligned} \frac{\|dF(h_k) - \widetilde{dF}(h_k)\|}{\rho_1(h_k)} &= \frac{\|dF(h_k) - \widetilde{dF}(h_k) + F(h_k) - F(h_k) + F(0) - F(0)\|}{\rho_1(h_k)} \\ &\leq \underbrace{\frac{\|dF(h_k) + F(0) - F(h_k)\|}{\rho_1(h_k)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\|-\widetilde{dF}(h_k) - F(0) + F(h_k)\|}{\rho_1(h_k)}}_{\to 0} \end{aligned}$$

Sei $t_k \neq 0$ eine reelle Nullfolge, und angenommen es gibt ein f mit $\|dF(f) - \widetilde{dF}(f)\| \neq 0$ und $\rho_1(f) \neq 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} \lim_{k \mapsto \infty} \frac{\|dF(t_k f) - \widetilde{dF}(t_k f)\|}{\rho_1(t_k f)} &= \lim_{k \mapsto \infty} \frac{|t_k| \|dF(f) - \widetilde{dF}(f)\|}{|t_k| \rho_1(f)} \\ &= \frac{\|dF(f) - \widetilde{dF}(f)\|}{\rho_1(f)} \neq 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, demnach kann es kein solches f geben. Durch Induktion kann man jetzt zeigen, daß $d^n F(h^{\otimes^n}) = \widetilde{d^n F}(h^{\otimes^n})$ gilt, womit die Behauptung folgt.

Als nächstes wird ein Zusammenhang zwischen dem obigen Differentiationsbegriff und den normalgeordneten Produkten des Klein-Gordon-Feldes hergestellt. Dazu wird definiert:

Definition 3.2.3 *Sei $\psi(\cdot)$ die in 3.2 definierte Abbildung und*

$$\mathcal{D}_\infty \equiv \{\psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}_m) | \psi(\cdot) \quad \textit{ist unendlich oft differenzierbar bei Null}\}.$$

Satz 3.2.2 *Sei ψ aus $\mathcal{D}_\Pi$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ eine positive reelle Konstante $C_{n,\psi}$ existiert, mit der Eigenschaft*

$$\|\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)\psi\| \leq C_{n,\psi} \prod_{k=1}^{n} \sqrt{w_2(f_k, f_k)} \qquad \forall \quad f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4). \quad (3.13)$$

Dann ist die vektorwertige Abbildung $\psi(\cdot)$ unendlich oft differenzierbar, d.h. $\psi \in \mathcal{D}_\infty$, und es gilt

$$d^n\psi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = i^n : \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n) : \psi.$$

Beweis: Sei ψ ein Element aus $\mathcal{D}_\Pi$, das die Voraussetzungen von Satz 3.2.2 erfüllt. Ferner definiert man für alle $n \in \mathbb{N}_+$ eine Abbildung

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \times \cdots \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \ni < f_1, \cdots, f_n > \mapsto i^n : \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n) : \psi.$$

Diese ist wohldefiniert und wegen Satz 3.2.1a n-linear und symmetrisch bzgl. der Permutation der n Argumente. Bedingung 3.13 garantiert, daß diese n-lineare Abbildung in den einzelnen Argumenten stetig ist. Satz 4.3.2 liefert dann die eindeutige Existenz einer symmetrischen vektorwertigen Distribution T^n, die

$$T^n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = i^n : \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n) : \psi$$

erfüllt. Als Seminormen ρ_n auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ wird gewählt:

$$\rho_n(f) = \sqrt{w_2(f,f)}^n.$$

Sei $f \in \mathcal{S}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^4)$ mit $w_2(f,f) = 0$. Dies sind genau diejenigen Testfunktionen, deren Fouriertransformierte auf der Massenschale H_m verschwindet. Aus der Definition des Klein-Gordon-Feldes folgt für solche Testfunktionen $\Phi(f) = 0$. Zu zeigen bleibt damit Bedingung D2 im Fall $\rho_n(f) \neq 0$. Dazu wählt man eine Folge reellwertiger Testfunktionen f_k, die $w_2(f_k, f_k) \neq 0$ erfüllen. Da $\mathcal{D}_\Pi \subset \mathcal{D}_p$, ist das Spektraltheorem [14] anwendbar und man erhält:

$$\begin{aligned} &\left\| e^{i\Phi(f_k)} e^{\frac{w(f_k,f_k)}{2}} \psi - \sum_{n=0}^{N} \frac{i^n}{n!} : \Phi(f_k)^n : \psi \right\|^2 \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x) \left| e^{ix + \frac{w_2(f_k,f_k)}{2}} - \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{i^{n-2m} x^{n-2m} \left(\frac{w_2(f_k,f_k)}{2}\right)^{2m}}{m!(n-2m)!} \right|^2}_{\equiv o(f_k)}. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Damit D2 erfüllt wird, muss gezeigt werden, daß $o(f_k)/w_2(f_k, f_k)^N$ für $k \to \infty$ gegen Null konvergiert. Dazu führt man eine Taylorentwicklung von e^{ix} und $e^{\frac{w_2(f,f)}{2}}$ durch und zeigt, daß die verbleibenden Terme in 3.14 nach Integration im Limes $k \to \infty$ schnell genug gegen Null konvergieren. Diese Rechnung ist nicht besonders kompliziert, jedoch umfangreich. Aufgrund dessen wird sie in den Anhang verlegt(Kap. 5.3).

■

Satz 3.2.3 *Es gilt $\mathcal{D}_p \supset \mathcal{D}_\infty \supset \mathcal{D}_0$.*

Beweis: Vektoren aus $\mathcal{D}_0$ erfüllen die Vorraussetzungen von Satz 3.2.2 und damit ist $\mathcal{D}_\infty \supset \mathcal{D}_0$. Die andere Inklusion zeigt man mit Hilfe von Satz 3.2.1.c. Dabei wird folgende Charakterisierung von differenzierbaren Abbildungen benutzt.

Satz 3.2.4 *Sei $\delta \in \mathbb{R}^+\backslash 0$, $I = (-\delta, \delta)$ und $f : I \to \mathcal{B}$ eine Abbildung von I in einen Banachraum $\mathcal{B}$, so daß für alle $t, \epsilon \in I$ mit $t + \epsilon \in I$*

$$f(t+\epsilon) = f(t) + \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\frac{\epsilon^j}{j!} + o_t^N(\epsilon)$$

gilt. Dabei ist $a_j(\cdot) : I \to \mathcal{B}$ eine stetige Abbildung, und der Term $o_t^N/(\epsilon^N)$ konvergiert gleichmäßig bzgl. t gegen Null, wenn $0 \neq \epsilon \to 0$. Dann ist die Abbildung f N-mal stetig differenzierbar.

Beweis von Satz 3.2.4[12] S.198

Beweis von Satz 3.2.3: Sei $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ und o.B.d.A. sei $w_2(h,h) \neq 0$. Ferner sei

$$R_N(h) \equiv \psi(h) - \sum_{l=0}^{N} \frac{1}{l!} d^l \psi(h^{\otimes^l})$$

und $f(\cdot)$ die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto \psi(th)$. Aus den Weylrelationen folgt dann

$$f(t+\epsilon) = e^{\frac{(t+\epsilon)^2}{2} w_2(h,h)} W(th)W(\epsilon h)\psi = e^{t\epsilon w_2(h,h)} e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th)\psi(\epsilon h). \tag{3.15}$$

Eine Reihenentwicklung von $e^{t\epsilon w_2(h,h)}$ ergibt

$$e^{t\epsilon w_2(h,h)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\epsilon w_2(h,h))^k}{k!} + r_n(t,\epsilon), \tag{3.16}$$

mit einer Abschätzung des Restgliedes r_n durch

$$|r_n(t,\epsilon)| \leq 2\frac{|t\epsilon w_2(h,h)|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall \quad |t\epsilon| w_2(h,h) \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

Sei $t, \epsilon \in (-1,1)$ und $n = 2w_2(h,h) + 1$, dies garantiert, daß die letzte Abschätzung erfüllt wird. Weiter setzt man $N' \equiv max\{n, N\}$ und es folgt dann für das Restglied: $r_{N'}(t,0) = 0$ und $r_{N'}(t,\epsilon)/(\epsilon^N)$ konvergiert gleichmäßig bzgl. t gegen Null, wenn $0 \neq \epsilon \to 0$. Einsetzen von 3.16 in 3.15 liefert schließlich

$$\begin{aligned}
f(t+\epsilon) \quad = \quad & \sum_{k,l=0}^{N'} t^k w_2(h,h)^k e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th) d^l \psi(h^{\otimes^l}) \frac{\epsilon^{k+l}}{k!l!} \\
& + \left(\sum_{k=0}^{N'} \frac{(t\epsilon w_2(h,h))^k}{k!} \right) e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th) R_{N'}(\epsilon h) \\
& + r_{N'}(t,\epsilon) \left(\sum_{l=0}^{N'} e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th) d^l \psi(h^{\otimes^l}) \frac{\epsilon^l}{l!} \right) \\
& + r_{N'}(t,\epsilon) e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th) R_{N'}(\epsilon h).
\end{aligned}$$

Definiert man

$$a_j(t) \equiv \sum_{\substack{k,l \in \{0,\cdots,N'\} \\ k+l=j}} \binom{j}{k} t^k w_2(h,h)^k e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th) d^l \psi(h^{\otimes^l}),$$

dann folgt aus 2.2.2d $a_j(t_n) \to a_j(t)$, falls $t_n \to t$, und

$$\lim_{0 \neq \epsilon \to 0} \frac{\| \sum_{j=N'+1}^{2N'} a_j(t) \frac{\epsilon^j}{j!} \|}{\epsilon^{N'}} \to 0.$$

gleichmäßig bzgl. t,wenn $0 \neq \epsilon \to 0$. Insgesammt folgt

$$\begin{aligned} f(t+\epsilon) &= f(t) + \sum_{j=1}^{N'} a_j(t) \frac{\epsilon^j}{j!} + O_t^{N'}(\epsilon), \quad \text{mit} \\ O_t^{N'}(\epsilon) &= \sum_{j=N'+1}^{2N'} a_j(t) \frac{\epsilon^j}{j!} + \left(\sum_{k=0}^{N'} \frac{(t\epsilon w_2(h,h))^k}{k!} \right) e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th) R_{N'}(\epsilon h) \\ &\quad + r_{N'}(t,\epsilon) \left(\sum_{l=0}^{N'} e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th) d^l \psi(h^{\otimes^l}) \frac{\epsilon^l}{l!} \right) \\ &\quad + r_{N'}(t,\epsilon) e^{\frac{t^2}{2} w_2(h,h)} W(th) R_{N'}(\epsilon h). \end{aligned}$$

Bis auf den zweiten Term der letzten Gleichung, werden alle Voraussetzungen von Satz 3.2.4 erfüllt. Aus D2 folgt jedoch $\lim_{0 \neq \epsilon \to 0} \frac{\|R_{N'}(\epsilon h)\|}{\epsilon^{N'}} = 0$, da

$$\frac{\|R_{N'}(\epsilon h)\|}{\epsilon^{N'}} = \frac{\|R_{N'}(\epsilon h)\| \rho_{N'}^{N'}(h)}{\rho_{N'}^{N'}(|\epsilon| h)}.$$

Nutzt man noch die Unitarität der Weylopratoren, dann sind alle Voraussetzungen von Satz 3.2.4 erfüllt.

■

Mit Hilfe der Weylrelationen sollte es auch möglich sein, zu zeigen, daß die Abbildung $\psi(\cdot)$ für Vektoren $\psi \in \mathcal{D}_\infty$ in einer Umgebung von Null im Sinne von Definition 3.2.2 differenzierbar ist. Mit einer entsprechend modifizierten Version von Satz 3.2.3 dürfte dann die unendlich-fache Gâteaux-Ableitung folgen, d.h. dann $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_\Pi$. Dies sollte der analoge Fall zur Beziehung zwischen Fréchet- und Gâteaux-Ableitung in Banachräumen sein[12].
Als nächstes werden die vektorwertigen Distributionen $d^l \psi(\cdot) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4l}) \to \mathcal{F}_+(\mathcal{H}_m)$ für Vektoren ψ aus dem endlichen Teilchenzahlraum $\mathcal{D}_0$ explizit angegeben.

Satz 3.2.5 *Sei $\psi = (\psi^0, \psi^1, \cdots, \psi^N, 0 \cdots) \in \mathcal{D}_0$ und $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4l})$, dann ist*

$$\begin{aligned} \left(d^l \psi(F)\right)^n (p_1, \cdots, p_n) &= i^l \pi^{l/2} \sum_{\substack{j \in \{0, \cdots, l\} \\ n+2j \geq l}} \tfrac{1}{j!} \sqrt{\tfrac{(n-l+2j)!}{n!}} \int_{H_m} \cdots \int_{H_m} \Bigg(d\Omega(\nu_1) \cdots d\Omega(\nu_j) \\ &\quad \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_{l-j} = 1}^{n} \left(\sum_P \tilde{F}(\nu_1, \cdots, \nu_j, -p_{i_1}, \cdots, -p_{i_{l-j}}) \right) \\ &\quad \psi^{n-l+2j}(\nu_1, \cdots, \nu_j, p_1, \cdots, \hat{p}_{i_1}, \cdots, \hat{p}_{i_{l-j}}, \cdots, p_n) \Bigg). \end{aligned}$$

Das $\hat{}$-Symbol bedeutet, daß dieses Argument weggelassen wird. Summiert wird in der dritten Summe über alle Permutation der Variabeln $\nu_1, \cdots, \nu_j, -p_{i_1}, \cdots, -p_{i_{l-j}}$.

Beweis: Sei $F = f_1 \otimes \cdots \otimes f_l$. Aufgrund von Satz 3.2.2 gilt, daß

$$d^l\psi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_l) = i^l : \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_l) : \psi.$$

Nutzt man die Darstellung von normalgeordneten Produkten des Feldes mittels Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren(Gl. 2.5 und 2.6), dann folgt die Behauptung in diesem Spezialfall. Im allgemeinen Fall wird die Tatsache benutzt, daß ein $F(x_1, \cdots, x_l)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4l})$ gleichförmig in $x_1, \cdots, x_l$ durch Linearkombinationen von Produkten $f_1(x_1) \cdots f_l(x_l)$ approximiert werden kann, und daß ψ ein Element aus dem endlichen Teilchenzahlraum $\mathcal{D}_0$ ist.

■

Beispiele 1: Sei ψ das Vakuum $\Omega = (1, 0, \cdots)$ und $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^8)$, dann erhält man

- $\left(d^2\Omega(F)\right)^n(p_1, \cdots, p_n) = 0 \qquad \forall \quad n \neq 2$
- $\left(d^2\Omega(F)\right)^2(p_1, p_2) = \frac{-\pi}{\sqrt{2}} \left(\tilde{F}(-p_1, -p_2) + \tilde{F}(-p_2, -p_1)\right)$

Beispiel 2: Sei $\psi = (0, \psi^1, 0 \cdots)$.

- $\left(d^2\psi(F)\right)^0 = 0$
- $\left(d^2\psi(F)\right)^1(p_1) = -\pi \int\limits_{H_m} d\Omega(\nu) \left(\tilde{F}(\nu, -p_1) + \tilde{F}(-p_1, \nu)\right)$
- $\left(d^2\psi(F)\right)^2(p_1, p_2) = 0$
- $$\begin{aligned}\left(d^2\psi(F)\right)^3(p_1, p_2, p_3) = -\pi\sqrt{\tfrac{1}{3!}}\Big(&\left(\tilde{F}(-p_1, -p_2) + \tilde{F}(-p_2, -p_1)\right)\psi^1(p_3) \\ &+ \left(\tilde{F}(-p_1, -p_3) + \tilde{F}(-p_3, -p_1)\right)\psi^1(p_2) \\ &+ \left(\tilde{F}(-p_2, -p_3) + \tilde{F}(-p_3, -p_2)\right)\psi^1(p_1)\Big)\end{aligned}$$
- $\left(d^2\psi(F)\right)^n(p_1, \cdots, p_n) = 0 \qquad \forall \quad n > 3$

Sei ψ von der Form $\psi = (0, \cdots, 0, \psi^n, 0, \cdots)$ und $l \in \mathbb{N}$, dann folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung die Existenz einer positiven reellen Konstante $C_{n,l}$, so daß für alle $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4l})$ gilt:

$$\|d\psi^l(F)\| \leq C_{n,l}\|\psi^n\| \int_{H_m} \cdots \int_{H_m} d\Omega(\nu_1) \cdots d\Omega(\nu_l) \left|F(\nu_1, \cdots, \nu_l)\right|^2. \quad (3.17)$$

Lemma 3.2.1 *Sei ψ_1 und ψ_2 aus $\mathcal{D}_\infty$, dann ist $\psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{D}_\infty$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ ist die Abbildung $\mathcal{D}_\infty \ni \psi \mapsto d\psi^n(F)$ linear.*

Beweis: Aufgrund von Satz 3.2.3 und 3.2.1c gilt

$$d^n(\psi_1 + \psi_2)(f^{\otimes^n}) = d^n(\psi_1)(f^{\otimes^n}) + d^n(\psi_2)(f^{\otimes^n}).$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz 4.3.3.

■

Definition 3.2.4 *Sei $N \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N})$. Unter dem* ***N-ten Prä-Wickprodukt*** *versteht man den linearen Operator $\mathcal{D}_\infty \ni \psi \mapsto i^{-N} d^N \psi(F)$. Dieser Operator wird im folgenden auch durch $:\Phi(F)^N:$ symbolisiert.*

Wegen der Eigenschaften von Vektoren ψ aus $\mathcal{D}_\infty$, ist die Abbildung

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N}) \ni F \mapsto :\Phi(F)^N:$$

sogar eine operatorwertige Distribution. D.h. für alle $\psi \in \mathcal{D}_\infty$ ist $:\Phi(F)^N:\psi$ eine vektorwertige Distribution. Deshalb schreibt man auch formal

$$:\Phi(F)^N: := \int dx_1 \cdots dx_N :\Phi(x_1, \cdots, x_N)^N: F(x_1, \cdots, x_N).$$

Unter der Annahme, daß $\mathcal{D}_\infty \subset \mathcal{D}_\Pi$, folgt, daß der Gårding-Wightman-Domain ein Core für den Abschluß des Prä-Wickproduktes ist. Dazu muß nur Satz 5.2.1 entsprechend angepaßt werden. Aufgrund von Satz 3.2.5 und Gleichung 3.17 ist dies leicht durchführbar. Daraus folgt dann eine dem Satz 3.2.2d und e entsprechende Aussage für das Prä-Wickprodukt.

3.3 Wickprodukte des Klein-Gordon-Feldes

Um das Wickprodukt zu definieren, muss dem formalen Limes

$$\lim_{x_1, \cdots, x_n \to x} :\Phi(x_1 \cdots \phi x_n)^n:$$

ein streng mathematischer Sinn gegeben werden. Angenommen $:\Phi(x_1, \cdots, x_n)^n:$ wäre eine Distribution, dann ergäbe sich das Problem, unter welchen Umständen sich aus einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{4n})$, eine solche auf dem Teilraum $\Delta_n = \{(x, \cdots, x) | x \in \mathbb{R}^4\} \cong \mathbb{R}^4$ konstruieren liesse. Äquivalent dazu kann man das folgende Problem betrachten. Sei $\pi_n : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4n}$ die Abbildung

$$x \mapsto \underbrace{(x, \cdots, x)}_{n-mal},$$

und $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n})$, dann ist die Komposition $u \circ \pi$ natürlich ein Element aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$. Das Problem ist dann: läßt sich diese Operation auf Distributionen, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{4n})$ ausdehnen. Eine Antwort hierzu liefert die mikrolokale Analysis ([10]).
Die mikrolokale Analysis behandelt die Untersuchung von Distributionen und ihren Singularitäten, insbesondere im Hinblick auf Anwendungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Ein elementares Werkzeug zur Charakterisierung von Singularitäten ist die Wellenfrontmenge. Die wesentliche Stärke des Konzepts liegt in der Übertragbarkeit auf glatte Mannigfaltigkeiten. Dort ist die Wellenfrontmenge eine invariant definierte Teilmenge des Kotangentialbündels. Es hat sich herausgestellt, daß die mikrolokale Analysis besonders geeignet ist, um Quantenfeldtheorien auf gekrümmter Raumzeit zu behandeln [3][4].
Um das Restriktions Problem von Distributionen auf Teilräume zu lösen sind nur zwei Informationen nötig:

- Die Wellenfrontmenge der Distribution
- Die Normalenmenge des Teilraumes

Ist der Durchschnitt beider Mengen leer, dann läßt sich die Distribution auf den Teilraum einschränken. Alle nötigen technischen Details zu dieser Aussage sind in Kapitel 4.4 zu finden.

Für die Normalenmenge der Menge Δ_n findet man mit Hilfe der Abbildung π_n

$$N_{\pi_n} = \Delta_n \times \left\{ (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^{4n} | \quad \sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \right\}$$

Da jedoch das Prä-Wickprodukt $: \Phi(\cdot)^n :$ eine operatorwertige Distribution ist, muss zunächst geklärt werden, was unter der Wellenfrontmenge eines solchen Objektes zu verstehen ist. Da das Prä-Wickprodukt ein unbeschränkter Operator ist, wird das zentrale Objekt die vektorwertige Distribution $: \Phi(\cdot) :^n \psi$ sein. Dies führt zu folgender Begriffsbildung.

Definition 3.3.1 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $X \subset \mathbb{R}^n$ und $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}$ eine vektorwertige Distribution. Ein Punkt $< x, k > \in X \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ heißt regulär gerichteter Punkt von T, wenn sowohl eine Funktion $\chi \in \mathcal{D}(U)$, die nicht bei x verschwindet, als auch eine konische Umgebung $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ existieren, so daß es für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante C_N gibt mit*

$$\left\| T \left(e^{-i(k,\cdot)} \chi \right) \right\| \leq C_N (1 + |k|)^{-N} \qquad \forall k \in \Gamma \tag{3.18}$$

*Die **Wellenfrontmenge der vektorwertigen Distribution** T ist das Komplement in $X \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ der Menge aller regulär gerichteter Punkte von T. Mit $(\cdot, \cdot)$ ist das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ gemeint.*

Es ist nun klar, daß die Definierbarkeit des Wickproduktes sehr stark von den Vektoren aus dem Definitionsbereich des Prä-Wickproduktes abhängen. Deshalb definiert man, analog zu [3]

Definition 3.3.2

$$\mathcal{D}_{ml} \equiv \Big\{ \psi \in \mathcal{D}_\infty | \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist die Wellenfrontmenge von } : \phi(F)^n : \psi$$
$$\text{enthalten in } \left\{ (x_1, k_1, \cdots, x_n, k_n) \in \mathbb{R}^{8n} | \quad k_i \in \overline{V}_-, \, i = 1, \cdots, n \right\} \Big\}$$

Es ist sofort ersichtlich, daß für Vektoren $\psi \in \mathcal{D}_{ml}$ und $n \in \mathbb{N}$ der Durchschnitt von $N_{\pi,n}$ und $WF(: \Phi(\cdot)^n : \psi)$ leer ist und somit Satz 5.4.2 anwendbar ist. Konkret heißt das zunächst, daß für alle $\nu \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}_m)$ die Distribution $(\nu| : \Phi(\cdot)^n : \psi)$ in eindeutiger Weise auf Δ_n einschränkbar ist.

Jetzt wird kontrolliert, ob $\mathcal{D}_{ml}$ nicht leer ist. Dazu sei:

Definition 3.3.3

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S},0} \equiv \left\{ \psi \in \mathcal{D}_0 | \quad \psi^n = F^n \restriction_{H_m^n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}_+ \text{ und } F^n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N}) \right\}$$

Im folgenden wird das Komplement der Wellenfrontmenge $WF(:\Phi(\cdot):^n \psi)$, mit $\psi \in \mathcal{D}_{\mathcal{S},0}$ bestimmt. Dazu sei $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{4n}$,$\mathbf{k} = (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^{4n}$ und F eine Testfunktion aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n})$ mit einem Träger in einer Umgebung von $\mathbf{x}$. Zu zeigen ist, daß im Fall, daß mindestens ein k_i aus $\mathbf{k}$ nicht aus dem Rückwertslichkegels ist, es eine konische Umgebung Γ von $\mathbf{k}$ gibt, so daß

$$\left\|: \Phi(e^{i(\mathbf{k},\cdot)}F)^n : \psi\right\|^2$$

für alle $\mathbf{k} \in \Gamma$ 3.18 erfüllt. Wird ausgenutzt, daß

$$\widetilde{F(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k})}}(p_1, \cdots, p_n) = \tilde{F}(p_{1,0} - k_{1,0}, \underline{p}_1 + \underline{k}_1, \cdots, p_{n,0} - k_{n,0}, \underline{p}_n + \underline{k}_n),$$

und setzt dieses in Satz 3.2.5 ein, dann ergibt sich mit Hilfe des folgenden Satzs, daß, solange kein k_i aus $\partial\overline{V}_-$ ist, $< \mathbf{x}, \mathbf{k} >$ ein regulär gerichteter Punkt ist. Der andere Fall, daß mindestens ein k_i aus $\mathbf{k}$ nicht in $\partial\overline{V}_-$ liegt, sollte mit einer entsprechend modifizierten Version von Satz 3.3.1 möglich sein.

Satz 3.3.1 *Sei $N \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_N), k_1, \cdots, k_N \notin \partial\overline{V_-}$ und $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4N})$, dann existiert eine konische Umgebung Γ von $\boldsymbol{k}$, so daß für alle $n, l \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N$ und $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-n+l})$ das Integral*

$$\begin{aligned} I(k_1, \cdots, k_N) \quad \equiv \quad & \int_{\mathbb{R}^{3(n+l)}} \frac{d\underline{x}_1 \cdots d\underline{x}_n d\underline{y}_1 \cdots d\underline{y}_l}{\mu(\underline{x}_1) \cdots \mu(\underline{x}_n)\mu(\underline{y}_1) \cdots \mu(\underline{y}_l)} \Bigg| \int_{\mathbb{R}^{3(N-n)}} \frac{d\underline{x}_{n+1} \cdots d\underline{x}_N}{\mu(\underline{x}_{n+1}) \cdots \mu(\underline{x}_N)} \\ & F\Big(-\mu(\underline{x}_1) - k_{1,0}, \underline{k}_1 - \underline{x}_1, \cdots, -\mu(\underline{x}_n) - k_{n,0}, \underline{k}_n - \underline{x}_n, \\ & \quad \mu(\underline{x}_{n+1}) - k_{n+1,0}, \underline{x}_{n+1} + \underline{k}_{n+1}, \cdots, \mu(\underline{x}_N) - \underline{k}_{N,0}, \underline{x}_N + \underline{k}_N\Big) \\ & \times\psi\Big(\mu(\underline{x}_{n+1}), \underline{x}_{n+1}, \cdots, \mu(\underline{x}_N), \underline{x}_N, \mu(\underline{y}_1), \underline{y}_1, \cdots \mu(\underline{y}_l), \underline{y}_l\Big)\Bigg|^2 \end{aligned}$$

in der konischen Umgebung Γ schnell abfallend ist. D.h. für alle $M \in \mathbb{N}$ existiert eine reelle positive Konstante C_M, so daß

$$\Big| I(k_1, \cdots, k_N) \Big| \leq \frac{C_M}{(1 + |\boldsymbol{k}|)^M} \quad \forall \boldsymbol{k} \in \Gamma. \tag{3.19}$$

Beweis: Die Strategie ist folgende: Man schätzt die Funktionen F und ψ so ab, daß das Integral I in Produkte zerfällt, die aus Integralen bestehen, deren Integraden nur von einer räumliche Variable, beispielsweise $\underline{x}$, abhängen. Dann untersucht man das asymptotische Verhalten dieser einfacheren Integrale in geeigneten konischen Umgebungen. Dazu wird zunächst Bedingung 3.19 entsprechend angepaßt. Aufgrund der Ungleichung $\sqrt{|x| + |y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$ ist es für Bedingung 3.19 hinreichend zu zeigen, daß

$$\Big| I(k_1, \cdots, k_N) \Big| \leq \frac{C_M}{\prod_{i=1}^{N} \left((1 + |\underline{k}_i|)(1 + |k_{i,0}|)\right)^M} \quad \forall \mathbf{k} \in \Gamma. \tag{3.20}$$

Da F und ψ Funktionen aus dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ bzw. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-n+l})$ sind, gibt es für alle $M \in \mathbb{N}$ reelle positive Konstanten A_M und B_M, so daß

- $$F\Big(-\mu(\underline{x}_1) - k_{1,0}, \underline{k}_1 - \underline{x}_1, \cdots, -\mu(\underline{x}_n) - k_{n,0}, \underline{k}_n - \underline{x}_n, \mu(\underline{x}_{n+1}) - k_{n+1,0}, \underline{x}_{n+1} + \underline{k}_{n+1}, \cdots, \mu(\underline{x}_N) - \underline{k}_{N,0}, \underline{x}_N + \underline{k}_N\Big)$$
$$\le \frac{A_M}{\prod\limits_{i=1}^{n} (|\mu(\underline{x}_i) + k_{i,0}| + |\underline{k}_i - \underline{x}_i| + m + 1)^{M+2} \prod\limits_{j=n+1}^{N} \big(|\mu(\underline{x}_j) - k_{j,0}| + |\underline{x}_j + \underline{k}_j| + 1\big)^M}$$

- $$\psi\Big(\mu(\underline{x}_{n+1}), \underline{x}_{n+1}, \cdots, \mu(\underline{x}_N), \underline{x}_N, \mu(\underline{y}_1), \underline{y}_1, \cdots \mu(\underline{y}_l), \underline{y}_l\Big)$$
$$\le \frac{B_M}{\prod\limits_{i=n+1}^{N} \mu(\underline{x}_i)^3 \prod\limits_{j=1}^{l} \mu(\underline{y}_j)^2 \prod\limits_{i=n+1}^{N} (|\mu(\underline{x}_i)| + |\underline{x}_i| + 1)^M}$$

Einsetzen der beiden Abschätzungen liefert dann die gewünschte Faktorisierung:

$$I(\mathbf{k}) \le (A_M B_M)^2 \quad \underbrace{\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{y}}{\mu(\underline{y})^5}\Big)}_{\equiv I_1}{}^l \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})} \frac{1}{(|\mu(\underline{x}) + k_{i,0}| + |\underline{k}_i - \underline{x}| + m + 1)^{2(M+2)}}}_{\equiv I_2(k_i)}$$
$$\prod_{i=n+1}^{N} \underbrace{\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})^4} \frac{1}{(|\mu(\underline{x}) - k_{i,0}| + |\underline{x} + \underline{k}_i| + 1)^M \, (\mu(\underline{x}) + |\underline{x}| + 1)^M}\Big)^2}_{\equiv I_3(k_i)}$$

Das Integral I_1 läßt sich am einfachsten abschätzen, indem man eine Transformation in Kugelkoordinaten durchführt und ausnutzt, daß $|\underline{x}| \le \mu(\underline{x})$. Man erhält

$$I_1 \le \frac{1}{m} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{y}}{\mu(\underline{y})^4} = \frac{4\pi}{m} \int\limits_0^\infty dr \frac{r^2}{\mu(r)^4} \le \frac{4\pi}{m} \int\limits_0^\infty dr \frac{1}{r^2 + m^2} = \frac{2\pi^2}{m^2}.$$

Um das Integral $I_3(k)$ abzuschätzen, wird ausgenutzt, daß für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$

$$(|\mu(\underline{x}) - k_0| + |\underline{x} + \underline{k}| + 1)\,(\mu(\underline{x}) + |\underline{x}| + 1) \ge \sqrt{(|k_0| + 1)(|\underline{k}| + 1)}$$

gilt. Einsetzen dieser Ungleichung und analoge Integration wie im Fall I_1 liefert:

$$\begin{aligned} I_3(k)^2 &= \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})^4} \frac{1}{(|\mu(\underline{x}) - k_0| + |\underline{x} + \underline{k}| + 1)^M \, (\mu(\underline{x}) + |\underline{x}| + 1)^M}\Big)^2 \\ &\le \frac{4\pi^4}{m^2(|k_0| + 1)^M (|\underline{k}| + 1)^M} \end{aligned}$$

Wählt man als konische Umgebung $\mathbb{R}^4$, dann besitzt $I_3(\cdot)$ bereits das richtige asymptotische Verhalten in dieser Umgebung. Um eine konische Umgebung zu finden in der das Integral $I_2(\cdot)$ schnell abfallend ist, teilt man jetzt $\mathbb{R}^4 \backslash \partial\overline{V}_-$ in drei Mengen auf:

- $M_1 = \{k \in \mathbb{R}^4 | \quad k_0 > 0\}$
- $M_2 = \{k \in \mathbb{R}^4 | \quad |k_0| < |\underline{k}|\}$
- $M_3 = \{k \in \mathbb{R}^4 | \quad |k_0| > |\underline{k}|\}$

Im folgenden werden für Vektoren k aus einer dieser Mengen konische Umgebungen Γ_i konstruiert, so daß $I_2(\cdot)$ in Γ_i schnell abfällt.

- Sei k ein Vierervektor aus M_1 und Γ_1 die konische Umgebung M_1. Wird ausgenutzt, daß Vektoren $\underline{x}$ aus $\mathbb{R}^3$ $\mu(\underline{x}) + k_0 + |\underline{x} - \underline{k}| + 1 \geq k_0 + |\underline{k}| + 1$ erfüllen, dann folgt:

$$\begin{aligned}
I_2(k) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})} \frac{1}{(\mu(\underline{x}) + k_0 + |\underline{k} - \underline{x}| + 1 + m)^{2M+4}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})^4} \frac{1}{(\mu(\underline{x}) + k_0 + |\underline{k} - \underline{x}| + 1)^{2M}} \\
&\leq \frac{1}{(k_0 + |\underline{k}| + 1)^{2M}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})^4} \leq \frac{2\pi^2}{(k_0 + 1)^M (|\underline{k}| + 1)^M m}.
\end{aligned}$$

- Sei $\tilde{k} \in M_2$, dann wählt man ein $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \backslash 0$ und $\epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\epsilon_2 > 1 + \epsilon_1$, so daß $\tilde{k}$ in der konischen Umgebung

$$\Gamma_2 \equiv \{x \in \mathbb{R}^4 | \quad \epsilon_2 |x_0| > |\underline{x}| > (1 + \epsilon_1)|x_0|\}$$

enthalten ist. Sei nun k aus Γ_2, dann folgt $|\underline{k}| - |k_0| > \epsilon_1 |k_0|$, und für alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$

$$|\mu(\underline{x}) - |k_0|| + |\underline{k} - \underline{x}| + m + 1 > \epsilon_1 |k_0| + 1.$$

Setzt man diese Abschätzung in das Integral $I_2(k)$ ein und transformiert in Kugelkoordinaten, dann folgt:

$$\begin{aligned}
I_2(k) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})} \frac{1}{(|\mu(\underline{x}) + k_0| + |\underline{k} - \underline{x}| + 1 + m)^{2M+4}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})} \frac{1}{(|\mu(\underline{x}) - |k_0|| + |\underline{k} - \underline{x}| + 1 + m)^{2M+4}} \\
&< \frac{1}{(\epsilon_1 |k_0| + 1)^{2M+1}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})} \frac{1}{(||\underline{k}| - |\underline{x}|| + 1)^3} \\
&\leq \frac{4\pi}{(\epsilon_1 |k_0| + 1)^{2M}} \frac{1 + |\underline{k}|}{\epsilon_1 |k_0| + 1} \leq \frac{4\pi D_{\epsilon_{1,2}}}{(|k_0| + 1)^M (|\underline{k}| + 1)^M}.
\end{aligned}$$

Dabei ist die Konstante $D_{\epsilon_{1,2}}$ im Fall $\epsilon_1 < 1$ gleich $\epsilon_1 (\epsilon_2/\epsilon_1^2)^{M+1}$, ansonsten ϵ_2^{M+1}.

- Sei nun $\tilde{k}$ ein Element aus M_3. Man wählt wieder ein $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \backslash 0$ und $\epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\epsilon_2 > 1 + \epsilon_1$, so daß $\tilde{k}$ in der konischen Umgebung

$$\Gamma_3 \equiv \{x \in \mathbb{R}^4 | \quad \epsilon_2 |\underline{x}| > |x_0| > (1 + \epsilon_1)|\underline{x}|\}$$

enthalten ist. Sei k ein Element aus Γ_3, dann gilt $|k_0| > (1 + \epsilon_1)|\underline{k}|$. Als nächstes zeigt man , daß

$$|\mu(\underline{x}) - |k_0|| + |\underline{k} - \underline{x}| + m + 1 > \epsilon_1 |\underline{k}| + 1 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$$

gilt. Um diese Ungleichung zu beweisen teilt man $\mathbb{R}^3$ in die drei disjunkten Mengen $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 | \quad \mu(\underline{x}) < |\underline{k}|\}$, $X_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 | \quad |\underline{k}| \leq \mu(\underline{x}) \leq |k_0|\}$ und $X_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 | \quad \mu(\underline{x}) > |k_0|\}$ auf und zeigt die Behauptung auf diesen Mengen. Der Fall $\underline{x} \in X_1$ ist trivial. Im Fall $\underline{x} \in X_2$ muß man ausnutzen, daß $|\mu(\underline{x}) - |k_0|| > (1 + \epsilon_1)|\underline{k}| - \mu(\underline{x})$ und $\mu(\underline{x}) \leq |\underline{x}| + m$. Den letzten Fall zeigt man ähnlich. Einsetzen der Ungleichung in das Integral I_2 ergibt dann:

$$I_2(k) < \frac{1}{(\epsilon_1|\underline{k}|+1)^{2M+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{d\underline{x}}{\mu(\underline{x})} \frac{1}{(||\underline{k}|-|\underline{x}||+1)^3} \leq \frac{4\pi E_{\epsilon_{1,2}}}{(|k_0|+1)^M(|\underline{k}|+1)^M}$$

Die Konstante $E_{\epsilon_{1,2}}$ ist dabei im Fall $\epsilon_1 < 1$ gleich $(\epsilon_2/\epsilon_1^2)^M/\epsilon_1$, ansonsten ϵ_2^M. Damit ist die Behauptung bewiesen, denn solange kein k_i aus dem Rand des Rückwärtslichtkegels ist, läßt sich eine konische Umgebung finden, so daß 3.23 erfüllt wird.

■

Definition 3.3.4 (Wickprodukt) *Unter dem n-ten Wickprodukt versteht man eine operatorwertige Distribution auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, symbolisiert durch $:\Phi^n(\cdot):$, mit einem maximalem Definitionsbereich $\mathcal{D}_W \subset \mathcal{D}_{ml}$, so daß*

$$(\nu, :\Phi(\cdot)^n : \psi) \restriction_{\Delta_n} = (\nu, :\Phi^n(\cdot):\psi) \quad \forall \nu \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}_m) \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.21}$$

Man beachte, daß das Wickprodukt durch $:\Phi^n(\cdot):$ gekennzeichnet wird, im Gegensatz zum Prä-Wickprodukt $:\Phi(\cdot)^n:$.

Satz 3.3.2 *Sei $\psi = (\psi^0, \psi^1, \cdots, \psi^N, 0\cdots) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S},0}$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, dann ist*

$$\begin{aligned}\left(:\phi^l(f):\psi\right)^n(p_1,\cdots,p_n) \quad = \quad & i^l \pi^{l/2} \sum_{\substack{j\in\{0,\cdots,l\}\\ n+2j\geq l}} \frac{1}{j!}\sqrt{\frac{(n-l+2j)!}{n!}} \int\limits_{H_m}\cdots\int\limits_{H_m}\Bigg(d\Omega(\nu_1)\cdots d\Omega(\nu_j)\\ & \sum_{i_1<i_2\cdots<i_{l-j}=1}^{n}\Big(\sum_P \tilde{f}\big(\sum_{r=1}^{j}\nu_r - \sum_{r=1}^{l-j}p_{k_r}\big)\Big)\\ & \psi^{n-l+2j}(\nu_1,\cdots,\nu_j,p_1,\cdots,\hat{p}_{i_1},\cdots,\hat{p}_{i_{l-j}},\cdots,p_n)\Bigg).\end{aligned}$$

Das $\hat{}$-Symbol bedeutet, daß dieses Argument weggelassen wird. Summiert wird in der dritten Summe über alle Permutation der Variabeln $\nu_1, \cdots, \nu_j, -p_{i_1}, \cdots, -p_{i_{l-j}}$.

Beweis: Daß dieser Operator $:\Phi^n(\cdot):$ für Vektoren aus $\mathcal{D}_{\mathcal{S},0}$ eine operatorwertige Distribution ist, wurde bereits von Gårding und Wightman [19] bewiesen. Das er auch Bedingung (3.26) erfüllt, sieht man anhand des Beweises von Satz 4.4 in [10].

■

3.4 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammengefaßt lassen sich die aufgeführten Ergebnisse wie folgt zuordnen:

Mit Hilfe der Gâteaux-Ableitung und der nichtlinearen Abbildung

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) \ni f \mapsto e^{\frac{w_2}{2}(f,f)} W(f)\psi \tag{3.22}$$

liessen sich die normalgeordneten Produkte des Feldes darstellen. Allerdings führt dies für den Fall des Klein-Gordon-Feldes dazu, daß die normalgeordneten Produkte des Feldes keine operatorwertigen Distributionen mehr ergeben.

Dies Eigenschaft ist jedoch eine wesentliche Voraussetzung zur Konstruktion des Wickproduktes.

Zur möglichen Beseitigung dieses Problems wurde ein anderer Ableitungsbegriff, analog zu [3], eingeführt. Über diese Ableitung und der Abbildung (3.22) wurde dann das Prä-Wickprodukt definiert. Mittels Lemma 3.2.1 konnte gezeigt werden, daß diese Objekte tatsächlich operatorwertige Distributionen sind. Auf dem endlichen Teilchenzahlraum $\mathcal{D}_0$, der wiederum eine Teilmenge des Definitionsbereiches der Prä-Wickprodukte ist, reproduzieren sie die normalgeordneten Produkte des Klein-Gordon-Feldes durch:

$$: \Phi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)^n : \psi =: \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_n) : \psi$$

Weiter liefert Satz 3.2.3, daß der Definitionsbereich der Prä-Wickprodukte eine Teilmenge von $\mathcal{D}_p$ ist. Dabei ist $\mathcal{D}_p$ der Durchschnitt aller Definitionsbereiche aller Feldpotenzen des Klein-Gordon-Feldes. Es gilt weiter, daß sich beliebige normalgeordnete Potenzen des Klein-Gordn-Feldes wieder mittel Prä-Wickprodukten durch

$$: \Phi(f^{\otimes^n})^n : \psi =: \Phi(f)^n : \psi \quad \forall \psi \mathcal{D}_\infty \text{ und } \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$$

konstruieren lassen. Allerdings sind diese beiden Aussagen nicht hinreichend, daß die Prä-Wickprodukte auf dem gesammten Definitionsbereich $\mathcal{D}_\infty$ normalgeordnete Produkte des Feldes liefern. Aufgrund der Bemerkung nach Satz 3.2.3 gibt es jedoch starke Hinweise, daß dies doch zutrifft. Mit der Gültigkeit dieser Hypothese würde folgen, daß der Gårding-Wightman-Domain ein Core für den Abschluß des Prä-Wickproduktes ist.

Die bis hier erreichten Ergebnisse für den Minkowskiraum lassen sich problemlos auf den Fall einer gekrümmten Raumzeit übertragen. Dazu wird die 2-Punkt-Distribution w_2 entsprechend ersetzt.

Für den Minkowskiraum wurden aus den Prä-Wickprodukten, basierend auf Techniken der mikrolokalen Analysis nach einer Idee von Brunetti und Fredenhagen, im weiteren Vorgehen schließlich die Wickprodukte definiert. Es zeigte sich für den endlichen Teilchenzahlraum $\mathcal{D}_0$, daß die dort definierten Wickprodukte exakt mit der von Gårding und Wightman angegebenen Definition übereinstimmen.

Um die ursprünglich Frage zu beantworten ob die beiden in der Einleitung erwähnten Konstrukionen der Wickprodukte äquivalent sind, ist aufgrund der unzureichenden Kenntnis der Eigenschaften der Prä-Wickprodukte keine weiterreichende Aussage möglich.

Kapitel 4

Mathematische Ergänzungen

4.1 Unbeschränkte Operatoren in Hilberträumen

Die wichtigen Operatoren, die in dieser Arbeit auftreten, wie der Feldoperator $\Phi(f)$, normalgeordnete Produkte des Feldes und Wickprodukte, sind unbeschränkt. Deshalb werden in diesem Abschnitt die grundlegenden Definitionen und einige wichtige Satze bereitgestellt, um unbeschränkte Operatoren in Hilberträumen zu behandeln. Die Beweise der Satze, eine ausführlichere Motivation und zusätzliche Beispiele sind in [14] zu finden.

Definition 4.1.1 *Sei D_A ein linearer Teilraum eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Unter einem **Operator** versteht man eine lineare Abbildung von D_A nach $\mathcal{H}$:*

$$A : D_A \to \mathcal{H}$$

Ein Operator A auf D_A ist beschränkt auf D_A, falls

$$\|A\| \equiv \sup_{0 \neq \psi \in D_A} \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|} < \infty. \tag{4.1}$$

Es gilt folgendes Fortsetzungstheorem für beschränkte Operatoren.

Satz 4.1.1 (BLT-Satz) *Sei T eine linear beschränkte Abbildung eines normierten linearen Raumes $< X_1, \| \quad \|_1 >$ in einen vollständigen normierten linearen Raum $< X_2, \| \quad \|_2 >$. Dann läßt sich T in eindeutiger Weise zu einer linearen beschränkten Abbildung mit gleicher Norm von der Vervollständigung von X_1 nach X_2 erweitern.*

Also sind dicht definierte Operatoren, die (4.1) erfüllen, in eindeutiger Weise auf den ganzen Hilbertraum $\mathcal{H}$ erweiterbar. Für unbeschränkte Operatoren gilt diese Fortsetzung nicht, und die Angabe ihres Definitionsbereiches ist wesentlich. Beschränkte Operatoren sind überall stetig.Umgekehrt sind überall stetige Operatoren beschränkt. Demnach sind unbeschränkte Operatoren nicht überall stetig.

Beisipiel 1: Der Ortsoperator

Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ und $D_A = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}, dx)| \quad \int_{\mathbb{R}} x^2|\psi(x)|^2 dx < \infty\}$. Der Ortsoperator ist auf D_A definiert durch:

$$(A\psi)(x) = x\psi(x).$$

Sei ψ_n die Folge

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+1}} & x \in [n, n+1] \\ 0 & x \notin [n, n+1] \end{cases}$$

Es gilt $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ und ψ_n konvergiert in $\mathcal{H}$ gegen Null. Jedoch

$$\|A\psi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \psi_n(x)^2 dx = \frac{1}{(n+1)} \int_n^{n+1} x^2 dx = \frac{(n+1)^3 - n^3}{3(n+1)} \to \infty,$$

d.h. A ist bei Null nicht stetig und damit unbeschränkt.

Beispiel 2: Der Feldoperator

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ der Bosonenfockraum, $\Phi(f)$ der Feldoperator. Als Definitionsbereich wird der endliche Teilchenzahlraum $\mathcal{D}_0$ gewählt. Sei ψ_n die Folge

$$\psi_n = \frac{1}{\|f\|^n n^{\frac{1}{4}}}(0, \cdots, 0, \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n \quad mal}, 0, \cdots),$$

dann gilt $\psi_n \to 0$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} \|\phi(f)\psi_n\|^2 &= \left\| \left(a^+(f) + a^-(f)\right) \psi_n \right\|^2 \\ &= \frac{1}{\|f\|^{2n}\sqrt{n}} \left\| \left(0, \cdots, \sqrt{n}(f,f) \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n-1 \quad mal}, 0, \sqrt{n+1} \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n+1 \quad mal}, 0, \cdots\right) \right\|^2 \\ &= \sqrt{n} + \|f\|^2 \frac{n+1}{\sqrt{n}} \to \infty \end{aligned}$$

D.h. der Feldoperator ist bei Null nicht stetig.

Der Begriff des Graphen eines Operators, eingeführt von von Neumann, ist sehr hilfreich bei der Untersuchung von unbeschränkten Operatoren.

Definition 4.1.2 *Der **Graph** eines Operators A ist die Menge*

$$\Gamma(A) \equiv \{< \psi, A\psi > \quad | \quad \psi \in D_A\}.$$

Der Graph ist eine Teilmenge des Hilbertraumes $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ (siehe Kapitel 2.1 bzg. direkten Summen von Hilberträumen). Ein Operator heißt **abgeschlossen** falls $\Gamma(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ist.

Definition 4.1.3 *Seien A und B Operatoren auf $\mathcal{H}$. Falls $\Gamma(B) \subset \Gamma(A)$, dann nennt man A eine Erweiterung von B, und schreibt dafür $B \subset A$. Dies ist natürlich äquivalent zu $D_B \subset D_A$ und $A\psi = B\psi$ für alle $\psi \in D_B$.*

Definition 4.1.4 *Ein Operator A heißt* ***abschließbar*** *wenn er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt. Jeder abschließbare Operator besitzt eine kleinste abgeschlossene Erweiterung, die man* ***Abschluß von A*** *nennt, und mit* $\overline{A}$ *kennzeichnet.*

Eine Möglichkeit um eine abgeschlossene Erweiterung eines Operators A zu erhalten, wäre, seinen Graph in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ abzuschließen. Jedoch ist der Abschluß des Graphen eines Operators nicht unbedingt der Graph eines Operators. Falls Operatoren abschließbar sind, dann erhält man den Abschluß durch den topologischen Abschluß des Graphen. Dieses Ergebnis wird im folgenden Theorem festgehalten.

Satz 4.1.2 *Sei der Operator A abschließbar, dann gilt* $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.

Eine zentrale Rolle spielt weiterhin der Begriff des zu A adjungierten Operators A^*. Bei beschränkten Operatoren läßt sich der adjungierte Operator mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes linear stetiger Funktionale definieren. Die Fragestellung ist nun, wie dieser Sachverhalt auf unbeschränkte Operatoren übertragen wird. Dazu wird definiert:

Definition 4.1.5 *Sei A ein dicht definierter Operator auf einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$. *Sei* D_{A^*} *die Menge der* $\psi \in \mathcal{H}$, *für die es ein* $\nu \in \mathcal{H}$ *gibt mit*

$$(A\psi, \phi) = (\psi, \nu) \quad \forall \psi \in D_A.$$

Für jedes solche $\phi \in D_{A^*}$ *definiert man weiter* $A^*\phi = \nu$. A^* *ist der* ***adjungierte*** *Operator von A.*

Man erkennt, daß D_A dicht sein muß, damit ν eindeutig definiert ist. Im Gegensatz zu beschränkten Operatoren ist der Definitionsbereich des adjungierten Operators im ungünstigsten Fall nur das Nullelement. Es gibt einen Zusammenhang zwischen Adjungation und Abschluß.

Satz 4.1.3 *Sei A ein dicht definierter Operator auf einem Hilbertraum, dann gilt:*
1) A^* *ist abgeschlossen.*
2) *A ist genau dann abschließbar wenn* D_{A^*} *dicht ist; in dem Fall gilt* $\overline{A} = A^{**}$.
3) *Falls A abschließbar, dann ist* $(\overline{A})^* = A^*$.

Definition 4.1.6 *Ein dicht definierter Operator A auf einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *heißt* ***symmetrisch*** *falls* $A \subset A^*$, *d.h. falls* $D(A) \subset D(A^*)$ *und* $A\psi = A^*\psi$ *für alle* $\psi \in D(A)$. *Äquivalent dazu ist, A ist dann und nur dann symmetrisch falls*

$$(A\psi, \phi) = (\psi, A\phi) \quad \forall \psi, \phi \in D(A).$$

Definition 4.1.7 *A heißt* ***selbstadjungiert*** *falls* $A = A^*$, *d.h. dann und nur dann wenn A symmetrisch und* $D(A) = D(A^*)$.

Ein symmetrischer Operator ist stets abschließbar, da $D(A^*)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist. Falls A symmetrisch, dann ist A^* eine abgeschlossene Erweiterung von A, und die kleinste abgeschlossene Erweiterung A^{**} muß in A^* enthalten sein. Für symmetrische Operatoren gilt

$$A \subset A^{**} \subset A^*.$$

Für abgeschlossene symmetrische Operatoren gilt

$$A = A^{**} \subset A^*$$

und für selbstadjungierte Operatoren

$$A = A^{**} = A^*.$$

Die Unterscheidung zwischen abgeschlossenen symmetrischen Operatoren und selbstadjungierten Operatoren ist wesentlich. Denn nur selbstadjungierte Operatoren lassen sich exponieren, und ergeben dann eine einparametrige unitäre Gruppe, die z.B. die Dynamik eines quantenmechanischen Systems beschreibt.

Definition 4.1.8 *Ein symmetrischer Operator A heißt* ***wesentlich selbstadjungiert*** *falls sein Abschluß $\overline{A}$ selbstadjungiert ist. Sei A abgeschlossen, dann heißt eine Teilmenge $D \subset D_A$* ***Core*** *von A, falls $\overline{A \upharpoonright_{D_A}} = A$.*

Satz 4.1.4 (Kriterium für Selbstadjungiertheit) *Sei A ein symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.*
1) *A ist selbstadjungiert.*
2) *A ist abgeschlossen und $Ker(A^* \pm i) = \{0\}$.*
3) *$Ran(A \pm i) = \mathcal{H}$.*

Um Mißverständnissen vorzubeugen: ein symmetrischer Operator muß keine selbstadjungierte Erweiterung besitzen. In dem letzten Teil wird das Stone'sche Theorem bereitgestellt, welches für die Quantenmechanik fundamental ist. Falls A beschränkt ist, dann läßt sich A exponieren und zwar durch

$$e^{itA}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n A^n}{n!}\psi.$$

Die Reihe konvergiert für alle Vektoren ψ aus dem Hilbertraum. Diesem Ausdruck läßt sich auch für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren einen Sinn geben. Dazu ist das Spektral Theorem nötig, dieses wird jedoch nicht weiter erläutert [14].

Satz 4.1.5 *Sei A ein selbstadjungierter Operator und man definiere $U(t) = e^{itA}$. Dann gilt:*

1) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $U(t)$ ein unitärer Operator und*

$$U(t+s) = U(t)U(s) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

2) *Falls $\psi \in \mathcal{H}$ und $t \to t_0$, dann gilt $U(t)\psi \to U(t_0)\psi$.*
3) *Für $\psi \in D_A$, $\frac{U(t)\psi - \psi}{t} \to iA\psi$ falls $t \to 0$.*
4) *Falls $\lim_{t \to 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t}$ existiert, dann ist $\psi \in D_A$.*

Definition 4.1.9 *Eine operatorwertige Funktion $U(t)$, die (1) und (2) erfüllt heißt* ***stark stetige einparametrige unitäre Gruppe*** *.*

Das folgende Theorem zeigt umgekehrt, daß jede stark stetige einparametrige unitäre Gruppe aus der Exponierung eines selbstadjungierten Operators hervorgeht.

Satz 4.1.6 (Stone'sches Theorem) *Sei $U(t)$ eine stark stetige einparametrische unitäre Gruppe auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es einen selbstadjungierten Operator A auf $\mathcal{H}$, so daß $U(t) = e^{itA}$.*

4.2 Die Gâteaux-Ableitung

Sei X ein Vektorraum und Y ein normierter Raum. Mit $M(X,Y)$ wird im folgenden die Menge aller Abbildungen von X nach Y bezeichnet. Analog zum R^n läßt sich für eine Abbildung aus $M(X,Y)$ eine Richtungsableitung definieren. Diese wird Gâteaux-Ableitung genannt.

Definition 4.2.1 *$f \in M(X,Y)$ heißt **Gâteaux-differenzierbar** in x_0, falls es einen Operator $d_G f(x_0, \cdot) \in M(X,Y)$ gibt, so daß für alle $h \in X$*

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} - df(x_0,h) \right\| = 0$$

Man schreibt auch

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + th) \restriction_{t=0} = d_G f(x_0, h) = d_G f(x_0)(h).$$

Die eindeutige Abbildung $d_G(x,\cdot)$ heißt **Gâteaux-Differential** oder abgekürzt **G-Differential**. Die Definition ist auch noch dann sinnvoll, wenn Y durch einen topologischen Vektorraum ersetzt wird. Eine nützlich Referenz zur Problematik von Differenzierbarkeitsbegriffen in abstrakten Räumen ist [12].

Durch Induktion läßt sich das N-te G-Differential von f definieren:

$$\begin{aligned} d_G^N f(x, h_1, h_2, \cdots, h_N) &= d_G[d_G^{N-1} f(x, h_1, \cdots, h_{N-1}), h_N] \\ &= \frac{d}{dt_N}[d_G^{N-1} f(x + t_N h_N, h_1, h_2, \cdots, h_{N-1})] \restriction_{t_N=0} \\ &= \frac{\partial^N}{\partial t_N \partial t_{N-1} \cdots \partial t_1} f\left(x + \sum_{i=1}^N t_i h_i\right) \restriction_{t_1=t_2=\cdots=t_N=0} . \end{aligned}$$

Da die Operatoren $\partial/\partial t_i$ und $\partial/\partial t_j$ kommutativ sind ist $d_G^N f(x, h_1, h_2, \cdots, h_N)$ symmetrisch, falls es existiert. Das N-te G-Differential soll auch durch $d_G^N f(x) < h_1, h_2, \cdots, h_N >$ notiert werden.

4.3 Vektorwertige Distributionen

Seien X und Y lokalkonvexe Räume und $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ und $\{d_\alpha\}_{\alpha\in A}$ Familien von Seminormen, die die jeweiligen Topologien erzeugen. Eine lineare Abbildung $T: X \to Y$ ist genau dann stetig, falls es für alle $\alpha \in A$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ gibt und eine Konstante $C > 0$, so daß

$$d_\alpha(Tx) \leq C\left(\rho_{\lambda_1}(x) + \cdots + \rho_{\lambda_n}(x)\right).$$

Definition 4.3.1 *Eine* ***vektorwertige Distribution*** *T ist eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$.*

Satz 4.3.1 *Sei $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung und $\mathcal{D}$ ein dichter linearer Teilraum von $\mathcal{H}$. Für alle $\psi \in \mathcal{D}$ sei die Abbildung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto (\psi, T(f))$ stetig, dann ist die Abbildung T eine vektorwertige Distribution.*

Beweis:[5]

Satz 4.3.2 *Sei $N \in \mathbb{N}$,$\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}$ eine N-lineare Abbildung, die seperat stetig ist. Dann existiert eine eindeutige vektorwertige Distribution $\tilde{T}$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{Nn})$ mit $\tilde{T}(f_1\otimes\cdots\otimes f_N) = T(f_1, f_2, \cdots, f_N)$; wobei*

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_N(x_1, \cdots, x_{nN}) = f_1(x_1, \cdots, x_n)f_2(x_{n+1}, \cdots, x_{2n})\cdots f_N(x_{(N-1)n}, \cdots, x_{Nn}).$$

Beweis: Sei $\mathcal{P} \equiv \{\sum_{i_1\cdots i_N}^m c_{i_1\cdots i_N} f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_N} | c_{i_1\cdots i_N} \in \mathbb{C}, f_{i_1}, \cdots, f_{i_N} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{und} \quad m \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge ist dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{nN})$. Sei nun $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{nN})$, dann gibt es eine Folge P_k mit Elementen aus $\mathcal{P}$, so daß $\lim_{k\mapsto\infty} P_k = F$. Man definiert eine N-lineare Abbildung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\otimes\cdots\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, durch $\tilde{T}(f_1\otimes\cdots\otimes f_N) = T(f_1, f_2, \cdots, f_N)$, und erweitert diese auf $\mathcal{P}$. Aus dem Nukleartheorem(siehe [14]) folgt einerseits die eindeutige Existenz einer Distribution $D_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{nN})$, so daß für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\lim_{k\mapsto\infty} \left(\psi, \tilde{T}(P_k)\right) = \lim_{k\mapsto\infty} D_1(P_k) = D_1(F).$$

D.h. $\tilde{T}(P_k)$ konvergiert schwach (im Sinne der Hilbertraumtopologie). Somit existiert ein eindeutiger Vektor $\chi \in \mathcal{H}$ mit

$$\lim_{k\mapsto\infty} (\psi, \tilde{T}(P_k)) = (\psi, \chi) \quad \forall\psi \in \mathcal{H}. \tag{4.2}$$

Andererseits folgt aus dem Nukleartheorem die eindeutige Existenz einer Distribution $D_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2Nn})$ mit

$$\lim_{k\mapsto\infty} \|\tilde{T}(P_k)\|^2 = \lim_{k\mapsto\infty} D_2(\overline{P_k} \otimes P_k) = D_2(\overline{F} \otimes F). \tag{4.3}$$

D.h. die Norm von $\tilde{T}(P_k)$ konvergiert. Es gilt

$$\|\chi - \tilde{T}(P_k)\|^2 = (\chi, \chi) - (\chi, \tilde{T}(P_k)) + (\tilde{T}(P_k), \tilde{T}(P_k) - \chi).$$

Aufgrund von Gleichung 5.2 folgt, daß $\lim_{k\mapsto\infty}\left((\chi, \chi) - (\chi, \tilde{T}(P_k))\right) = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
|(\tilde{T}(P_k)|\tilde{T}(P_k) - \chi)|^2 &= \lim_{m\mapsto\infty} |(\tilde{T}(P_k)|T(P_k) - \tilde{T}(P_m))|^2 \\
&\leq \|\tilde{T}(P_k)\|^2 \lim_{m\mapsto\infty} \|\tilde{T}(P_k - P_m)\|^2 \\
&= \|\tilde{T}(P_k)\|^2 \lim_{m\mapsto\infty} D_2\left((\overline{P_k - P_m}) \otimes (P_k - P_m)\right) \\
&= \|\tilde{T}(P_k)\|^2 D_2\left((\overline{P_k - F}) \otimes (P_k - F)\right),
\end{aligned}$$

und somit $\lim_{k\mapsto\infty} \|\chi - \tilde{T}(P_k)\| = 0$. Man definiert $\tilde{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{nN}) \to \mathcal{H}$ durch $\tilde{T}(F) = \lim_{k\mapsto\infty} T(P_k)$. Die Linearität ist offensichtlich. Um zu zeigen, daß die Abbildung $\tilde{T}$ eine vektorwertige Distribution ist verwendet man Theorem 5.3.2. Sei $\psi \in \mathcal{H}$ und $F_n \to F$, dann folgt aus Gleichung 5.2

$$(\psi, \tilde{T}(F) - \tilde{T}(F_n)) = D_1(F - F_n) \to 0.$$

■

Satz 4.3.3 *Sei $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n\cdot N}) \to \mathcal{H}$ eine symmetrische vektorwertige Distribution in dem Sinne, daß für alle Permutation π von N Elementen $T(F) = T(f_\pi \circ F) \quad \forall F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n\cdot N})$ gilt; wobei $f_\pi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n\cdot N}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n\cdot N})$ durch*

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_N) \mapsto F(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(N)})$$

definiert ist. Dann ist die vektorwertige Distribution T bereits vollständig durch die Werte auf der Menge $\{\underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{N-mal} | f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$ bestimmt.

Beweis: Folgt aus Theorem 5.3.2 und der Identität

$$T(f_1 \otimes \cdots \otimes f_N) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial t_1 \cdots \partial t_N} T \left(\sum_{i=1}^N t_i f_i \otimes \cdots \otimes \sum_{i=1}^N t_i f_i \right) \restriction_{t_1 = \cdots = t_N = 0} .$$

■

4.4 Wellenfrontmengen

Der singuläre Träger einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^n)$, *sing supp*$(u)$, ist definiert als die Menge aller Punkte, die keine Umgebung besitzen in der die Distribution durch eine $\mathcal{C}^\infty$ Funktion darstellbar ist. Die Fouriertransformation übersetzt singuläres Verhalten in Abfallverhalten im Unendlichen. Denn wenn eine Funktion mit kompakten Träger $\mathcal{C}^\infty$ ist, sprich eine Distribution ohne Singularitäten, dann folgt

$$|\tilde{u}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Umgekehrt ist jede Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ regulär, falls für alle $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertranformierte von χu

$$|\widetilde{u\chi}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N} \tag{4.5}$$

erfüllt.

Für eine Distribution mit kompaktem Träger $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ definiert man , analog zur Definition des singulären Trägers, die Menge $\Sigma(u)$ aller $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$ die keine konische Umgebung V besitzen in der (4.4) erfüllt ist. Dabei heißt eine Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ konisch wenn mit $\xi \in V$ auch $\lambda\xi \in V$ gilt, für alle $\lambda > 0$. Man kann jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ so eine Menge zuordnen, indem man definiert

$$\Sigma_x(u) \equiv \bigcap_\chi \Sigma(\chi u), \quad \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\, \chi(x) \neq 0$$

Diese Definition ist für beliebige Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sinnvoll, und natürlich ist $\Sigma_x(u)$ genau dann nicht leer wenn $x \in$ *sing supp*(u). Während *sing supp*(u) nur die Lage der Singularität angibt, beschreibt $\Sigma_x(u)$ die Richtung der höchsten Frequenz in der Fouriertransformation die durch die Singularitäten verursacht werden. In der Wellenfrontmenge werden diese beiden Informationen zusammengefaßt.

Definition 4.4.1 *Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $X \supset \mathbb{R}^n$, dann heißt die abgeschlossene Teilmenge von $X \times \mathbb{R}^n \backslash 0$*

$$WF(u) \equiv \left\{(x,\xi)|x \in X, \xi \in \mathbb{R}^n\backslash 0, \xi \in \Sigma_x(u)\right\}$$

*die **Wellenfrontmenge** von u.*

Aus der Definition folgt unmittelbar das $Wf(u)$ konisch im zweiten Argument ist. Solche Mengen sollen auch der kürze halber als konisch bezeichnet werden.

Es ist häufig einfacher das Komplement der Wellenfrontmenge zu bestimmen. Ein Punkt (x,ξ) ist nicht in $WF(u)$ wenn es ein $\chi \in C_0^\infty(X)$ mit $\chi(x) \neq 0$ und eine konische Umgebung Γ von ξ gibt, so daß für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \Gamma$

$$\left|\widetilde{fu}(\chi)\right| \leq C_N(1+|\chi|)^{-N}$$

gilt. Ein Punkt aus dieser Menge nennt man auch **regulär gerichteter Punkt**.

Sei X eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, Γ ein abgeschlossener Kegel in $X \times (\mathbb{R}^n\backslash 0)$ und

$$\mathcal{D}'_\Gamma(X) = \{u \in \mathcal{D}'(X)|WF(u) \subset \Gamma\}.$$

Definition 4.4.2 *Sei $u_n \in \mathcal{D}'_\Gamma(X)$ eine Folge und $u \in \mathcal{D}'_\Gamma(X)$. u_n konvergiert in $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$ gegen u, wenn*

- $u_n \to u$ *in* $\mathcal{D}'(X)$
- $\sup\limits_V |\xi|^N|\widetilde{\phi u}(\xi) - \widetilde{\phi u_n}(\xi)| \to 0, \quad n \to \infty$

für $N \in \mathbb{N}_+$, falls $\phi \in C_0^\infty(X)$ und V ein abgeschlossener Kegel in $\mathbb{R}^n$ ist, mit

$$\Gamma \cap (supp\,\phi \times V) = \emptyset).$$

Satz 4.4.1 *Für jedes $u \in \mathcal{D}'_\Gamma(x)$ gibt es eine Folge $u_n \in C_0^\infty(X)$, so daß $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'_\Gamma(X)$.*

Satz 4.4.2 *Seien X und Y offene Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$, und $f: X \to Y$ eine C^∞ Funktion. Man bezeichne die Normalenmenge der Abbildung f mit*

$$N_f = \left\{(f(x),\nu) \in Y \times \mathbb{R}^n| \quad {}^t f'(x)\nu = 0\right\}.$$

Für alle Distributionen $u \in \mathcal{D}'(Y)$ mit

$$N_f \cap WF(u) = \emptyset, \tag{4.6}$$

läßt sich das Zurückziehen f^*u eindeutig definieren, so daß $f^*u = u \circ f$ wenn $u \in C^\infty$. Und für jede abgeschlossene konische Teilmenge Γ von $Y \times (\mathbb{R}^n\backslash 0)$ mit $\Gamma \cap N_f = \emptyset$ ist die Abbildung $f^*: \mathcal{D}'_\Gamma(Y) \to \mathcal{D}'_{f^*\Gamma}(X)$ mit

$$f^*\Gamma = \{(x, {}^t f'(x)\nu)| \quad (f(x),\nu)\}$$

stetig. Speziell gilt für alle $u \in \mathcal{D}'(Y)$, die (4.6) erfüllen

$$WF(f^*u) \subset f^*WF(u).$$

Beweis: [10]

Anhang A

A.1 Beweis von Theorem 3.1.3

Satz A.1.1 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ der Bosonenfockraum, $f \in \mathcal{H}$, $\psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ und $W(f)$ der zugehörige Weyloperator. Ferner definiert man den nicht linearen Operator $\psi(\cdot)$ als Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ durch*

$$f \mapsto \psi(f) \equiv e^{\frac{1}{2}\|f\|^2} W(f)\psi =: W(f) : \psi, \tag{A.1}$$

dann gilt:

a) *Die N-te Gâteaux Ableitung von $\psi(\cdot)$ im Punkt f existiert genau dann, wenn $\psi \in \bigcap_{f_1, f_2, \cdots, f_N \in \mathcal{H}} D(\Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_N))$, und es gilt*

$$d_G^N \psi(f) < h_1, h_2, \cdots, h_N >= \sum_{m=0}^{N} i^{N-m} \sum_{A_m(N)} [h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) : W(f) : \Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi.$$

Summiert wird in der zweiten Summe über alle Aufteilungen der natürlichen Zahlen $1, \cdots, N$ in zwei disjunkte Mengen $\{i_1, \cdots, i_m\}$ und $\{j_1, \cdots, i_{N-m}\}$, die $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_m$ und $j_1 < j_2 < \cdots < j_{N-m}$ erfüllen. Die Koeffizienten $[h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f)$ sind definiert durch:

$$[h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) \equiv \sum_{p=0}^{[m/2]} \sum_{P_p\{i_1, \cdots, i_m\}} (f, h_{k'_1}) \cdots (f, h_{k'_{m-2p}}) \prod_{l=1}^{p} (h_{k_{2l}}, h_{k_{2l-1}}),$$

falls $\{i_1, \cdots, i_N\}$ nicht leer ist, ansonsten ist $[h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) = 1$. $[m/2]$ ist die größte ganze Zahl die kleiner gleich $m/2$ ist. Summiert wird in der zweiten Summe über alle Partitionen der ganzen Zahlen $i_1, \cdots, i_m$ in zwei disjunkte Mengen $\{k_1, \cdots, k_{2p}\}$ und $\{k'_1, \cdots, k'_{m-2p}\}$, die $k_1 < k_2,\ k_3 < k_4, \cdots,\ k_{2p-1} < k_{2p}$ und $k'_1 < k'_2 < \cdots < k'_{m-2p}$ erfüllen.
b) *Sei $\psi \in \mathcal{D}_0$, dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$*

$$i^{-N} d_G^N \psi(0) < h_1, h_2, \cdots, h_N >=: \Phi(h_N)\Phi(h_{N-1}) \cdots \Phi(h_1) : \psi.$$

Beweis: Die Aussage a) wird mittels vollständiger Induktion bewiesen. Im Fall $N = 1$ muß untersucht werden, wann der Grenzwert

$$\lim_{t \mapsto 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\|f+th\|^2} W(f+th)\psi - e^{\frac{1}{2}\|f\|^2} W(f)\psi}{t}$$

für alle $h \in \mathcal{H}$ existiert. Mit Hilfe der Weylrelationen (Gleichung 2.11) und der Tatsache, daß die Weyloperatoren unitär sind, folgt

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t \mapsto 0} e^{\frac{1}{2}\|f\|^2} W(f) \left(\frac{e^{t(f,h)+\frac{t^2}{2}\|f\|^2} W(th)\psi - \psi}{t} \right) \\
&= e^{\frac{1}{2}\|f\|^2} W(f) \lim_{t \mapsto 0} \left(\frac{e^{t(f,h)+\frac{t^2}{2}\|f\|^2} W(th)\psi - \psi}{t} \right) \\
&= e^{\frac{1}{2}\|f\|^2} W(f) \lim_{t \mapsto 0} \left(\underbrace{e^{t(f,h)+\frac{t^2}{2}\|f\|^2} \frac{(W(th)-1)}{t}\psi}_{\mu(t)} + \underbrace{\frac{(e^{t(f,h)+\frac{t^2}{2}\|f\|^2}-1)\psi}{t}}_{\nu(t)} \right).
\end{aligned}
$$

Der Limes von $\nu(t)$ existiert für alle $h \in \mathcal{H}$ und ist gleich $(f,h)\psi$. Aus Theorem 5.1.5 folgt, daß der Limes von $\mu(t)$ genau dann existiert, wenn $\psi \in D(\Phi(h))$, und daß $\lim_{t\to 0} \mu(t) = i\Phi(h)\psi$. Demnach existiert die Summe der beiden Limiten dann und nur dann, wenn $\psi \in D(\Phi(h))$. Da der Limes für alle $h \in \mathcal{H}$ existieren soll, muß ψ aus dem Durchschnitt aller $D(\Phi(h))$ sein. Das G-Differential des Operators $\psi(f)$ existiert also nur für solche ψ's und es gilt

$$d_G\psi(f)(h) = (f,h)\psi(f) + i : W(f) : \Phi(h)\psi.$$

Für den Induktionsbeweis wird zunächst ein Hilfslemma bewiesen.

Lemma A.1.1
a) *Sei $f_1, \cdots, f_n \in M(X,Y)$ in $x \in X$ G-differenzierbar und $f \in M(X,Y)$. $F \equiv \sum_{i=1}^n f_i + f$ ist genau dann in x G-differenzierbar, wenn f in x G-differenzierbar ist.*
b) *Seien $f \in M(X,Y)$ und $g \in M(X,\mathbb{C})$ in $x \in X$ G-differenzierbar. Dann ist die Abbildung $gf : X \to Y, \quad x \mapsto g(x)f(x)$ in x G-differenzierbar und $d_G fg(x,h) = d_G g(x,h)f(x) + g(x)d_G f(x,h)$.*

Beweis von Lemma 5.1.1:
a) Sei f in x G-differenzierbar, dann ist F in x G-differenzierbar. Umgekehrt sei F in x G-differenzierbar, dann ist $F - \sum_{i=1}^n f_i$ in x G-differenzierbar, d.h. f ist in x G-differenzierbar.
b)Für alle $h \in \mathcal{H}$ ist g als Abbildungen $\mathbb{R} \ni t \mapsto g(x+th)$ stetig. Aus der folgenden Äquivalenz ergibt sich dann die Aussage.

$$\frac{g(x+th)f(x+th) - g(x)f(x)}{t} = g(x+th)\left(\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\right) + f(x)\left(\frac{g(x+th)-g(x)}{t}\right)$$

Die Induktionsannahme liefert nun

$$
\begin{aligned}
&d_G^{N+1}\psi(f) < h_1, h_2, \cdots, h_{N+1} >= d_G\Big(d_G^N\psi(f) < h_1, h_2, \cdots, h_N >, h_{N+1}\Big) \\
&= d_G \left(\sum_{m=0}^{N} i^{N-m} \sum_{A_m(N)} [h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) : W(f) : \Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi, h_{N+1} \right),
\end{aligned}
$$

wobei $\psi \in \bigcap_{h_1, h_2, \cdots, h_N \in \mathcal{H}} D\big(\Phi(h_1)\Phi(h_2)\cdots\Phi(h_N)\big)$.
Aus Lemma 5.1.1b folgt, daß bis auf $i^N : W(f) : \Phi(h_N)\cdots\Phi(h_1)\psi$ alle Terme in der oberen Gleichung in f G-differenzierbar sind. Aus dem Fall $N = 1$ ist bekannt, daß $: W(f) : \Phi(h_N)\cdots\Phi(h_1)\psi$ genau dann in f G-differenzierbar ist, wenn $\Phi(h_N)\cdots\Phi(h_1)\psi \in D(\Phi(h_{N+1}))$ für alle $h_{N+1} \in \mathcal{H}$. Dies ist äquivalent zu

$$\psi \in \bigcap_{h_{N+1}, h_N, \cdots, h_1 \in \mathcal{H}} D(\Phi(h_{N+1})\Phi(h_N)\cdots\Phi(h_1)).$$

Aus Teil a des Lemmas folgt dann, daß $d_G^{N+1}\psi(f) < h_1, \cdots, h_{N+1} >$ genau dann existiert, wenn ψ in dieser Menge liegt. Damit ergibt die obere Gleichung

$$\begin{aligned}
= \quad & \sum_{m=0}^{N} i^{N-m} \Bigg(\sum_{A_m(N)} d_G\Big([h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f), h_{N+1}\Big) : W(f) : \Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi \\
& + \sum_{A_m(N)} [h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) d_G\Big(: W(f) : \Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi, h_{N+1}\Big)\Bigg) \\
= \quad & \sum_{m=0}^{N} i^{N-m} \Bigg(\sum_{A_m(N)} d_G\Big([h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f), h_{N+1}\Big) : W(f) : \Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi \\
& + \sum_{A_m(N)} (f, h_{N+1})[h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) : W(f) : \Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi \\
& + i \sum_{A_m(N)} [h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) : W(f) : \Phi(h_{N+1})\Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi \Bigg) \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Äquivalenz

$$\begin{aligned}
& d_G\Big([h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f), h_{N+1}\Big) + (f, h_{N+1})[h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) \\
= \quad & \sum_{p=0}^{[m/2]} \sum_{P_p\{i_1,\cdots,i_m\}} \prod_{l=1}^{p} (h_{k_{2l}}, h_{k_{2l-1}}) \sum_{i=1}^{m-2p} (h_{N+1}, h_{k_i})(f, h_{k'_1}) \cdots (f, h_{k'_{i-1}})(f, h_{k'_{i+1}}) \cdots (f, h_{k'_{m-2p}}) \\
& + (f, h_{N+1})[h_{i_N}, \cdots, h_{i_1}](f) \\
= \quad & \sum_{p=0}^{[(m+1)/2]} \sum_{P_p\{i_1,\cdots,i_m,N+1\}} (f, h_{k_1}) \cdots (f, h_{k_{m-2p}}) \prod_{l=1}^{p} (h_{k_{2l}}, h_{k_{2l-1}}) \\
= \quad & [h_{N+1}, h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f)
\end{aligned}$$

ergibt 5.2

$$\begin{aligned}
= \quad & \sum_{m=0}^{N} i^{N-m} \Bigg(\sum_{A_m(N)} [h_{N+1}, h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) : W(f) : \Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi \\
& + i \sum_{A_m(N)} [h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) : W(f) : \Phi(h_{N+1})\Phi(h_{j_{N-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi \Bigg) \\
= \quad & \sum_{m=0}^{N+1} i^{N+1-m} \sum_{A_m(N+1)} [h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](f) : W(f) : \Phi(h_{j_{N+1-m}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi;
\end{aligned}$$

womit (a) bewiesen ist. Weiter gilt

$$[h_{i_m}, \cdots, h_{i_1}](0) = \begin{cases} 0 & \text{falls m ungerade} \\ \sum_{P_{[m/2]}\{i_1,\cdots,i_m\}} \prod_{l=1}^{[m/2]} (h_{k_{2l}}, h_{k_{2l-1}}) & \text{falls m gerade} \end{cases}$$

Daraus folgt, daß

$$i^{-N} d_G^N \psi(f) < h_1, h_2, \cdots, h_N >= \sum_{l=0}^{[N/2]} (-1)^l \sum_{A_{2l}(N)} [h_{i_{2l}}, \cdots, h_{i_1}](0)\Phi(h_{j_{N-2l}}) \cdots \Phi(h_{j_1})\psi.$$

Ein Vergleich mit Theorem 3.1.1a liefert dann die Aussage b.

■

A.2 Ein technisches Theorem

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ der Bosonenfockraum und $\Phi(f)$ der dazugehörige Feldoperator. Auf dem dichten linearen Teilraum

$$\mathcal{D} \equiv \bigcap_{n=1}^{N} \bigcap_{f_1,\cdots,f_n \in \mathcal{H}} D(\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n))$$

kann man für alle $n \leq N$ und $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{H}$ durch

$$\rho_{f_1,\cdots,f_n}(\psi) \equiv \|\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)\psi\|$$

Seminormen definieren. Sei Λ_N die Familie all dieser Seminormen. Analog läßt sich auf

$$\tilde{\mathcal{D}} \equiv \bigcap_{n\in\{1,\cdots,N\}} D(\prod_{m=0}^{n} \sqrt{\mathcal{N}+m})$$

eine Familie von Seminormen $\tilde{\Lambda}_N$ definieren.

Satz A.2.1 *Für alle $\psi \in \mathcal{D}$ gibt es eine Folge θ_k von Vektoren aus $\mathcal{D}_0$ mit $\lim_{k\to\infty} \theta_k = \psi$, die auch bzgl. der Familie von Seminormen Λ_N konvergiert, d.h. für alle $n \leq N$ und $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{H}$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{f_1,\cdots,f_n}(\psi - \theta_k) = \lim_{k\to\infty} \|\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)(\psi - \theta_k)\| = 0.$$

Eine analoge Aussage gilt für Vektoren aus $\tilde{\mathcal{D}}$, mit den Seminormen $\tilde{\Lambda}_N$.

Beweis: Zunächst wird ein Lemma bewiesen:

Lemma A.2.1 *Sei $k, n \in \mathbb{N}$ und $A_n^k \equiv (\mathcal{N}+k+n)^{-\frac{k}{2}} n^{\frac{k}{2}}$, dann gilt*

a) *A_n^k ist ein beschränkter Operator mit einer Norm kleiner als Eins und für alle ψ aus $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^k \psi = \psi$.*

b) *$\prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) A_n^k$ und $\prod\limits_{m=1}^{k'} \sqrt{\mathcal{N}+m} A_n^k$ sind für alle $k' \leq k$ beschränkte Operatoren, mit Normen*

- $\left\| \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) A_n^k \right\| \leq n^{\frac{k'}{2}} 2^{k'} \|f_1\| \cdots \|f_{k'}\|$
- $\left\| \prod\limits_{m=1}^{k'} \sqrt{\mathcal{N}+m} A_n^k \right\| \leq n^{\frac{k'}{2}}$

c) *$A_n^k \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m)$ ist für alle $k' \leq k$ ein beschränkter Operatoren mit einer Norm*

$$\left\| A_n^k \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) \right\| \leq \left\| \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) A_n^k \right\| + \left\| A_n^k \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) - \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) A_n^k \right\|,$$

wobei

$$\left\| A_n^k \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) - \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) A_n^k \right\| \leq 4^{k'} \|f\|^{k'} \sqrt{\frac{(k(k+1))^k}{k+n}}.$$

Beweis von Lemma 6.2.1:
a) Sei $\psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H})$, dann gilt

$$\left\|A_n^k \psi\right\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{i+k}{n}+1\right)^{-k} \|\psi^i\|^2} \leq \|\psi\|$$

und somit $\|A_n^k\| \leq 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $S^m = \sum_{i=0}^m \|\psi^i\|^2$. $m \in \mathbb{N}$, läßt sich so wählen, daß $\sum_{i=0}^{\infty} \|\psi^i\|^2 - S^m < \epsilon/2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left\|(1-A_n^k)\psi\right\|^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(1-\left(\frac{i+k}{n}+1\right)^{-\frac{k}{2}}\right)^2 \|\psi^i\|^2 \\
&= \sum_{i=0}^{m} \left(1-\left(\frac{i+k}{n}+1\right)^{-\frac{k}{2}}\right)^2 \|\psi^i\|^2 + \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(1-\left(\frac{i+k}{n}+1\right)^{-\frac{k}{2}}\right)^2 \|\psi^i\|^2 \\
&\leq \left(1-\left(\frac{m+k}{n}+1\right)^{-\frac{k}{2}}\right)^2 S^m + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt natürlich sofort, daß $\lim_{n\to\infty} A_n^k \psi = \psi$.
b) Zunächst wird eine Notation eingeführt um Produkte von Feldoperatoren $\Phi(f_k)$ bequemer aufzuschreiben. Man definiert

$$\{+,-\}^k \equiv \{\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^k) \quad \text{mit} \quad \alpha^i \in \{+,-\}\}$$

Diese Menge enthält 2^k Elemente. α^- sei die Anzahl der Komponenten von α mit $\alpha^i = -$. k Produkte von Feldoperatoren werden dann in dieser Notation geschrieben als

$$\prod_{m=1}^{k} \Phi(f_m) = \sum_{\alpha\in\{+,-\}^k} a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_k}(f_k) = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\sum_{\substack{\alpha\in\{+,-\}^k \\ \alpha^-=j}} a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_k}(f_k)}_{\binom{k}{j} \quad \textit{Terme}}.$$

Sei $\psi \in \mathcal{D}_0$, dann folgt mit der neuen Notation

$$\left\|\prod_{m=1}^{k} \Phi(f_m)\psi\right\| \leq \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{\alpha\in\{+,-\}^k \\ \alpha^-=j}} \|a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_k}(f_k)\psi\|.$$

Mit Hilfe der Ungleichung (2.6) ergibt sich weiter

$$\|a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_k}(f_k)\psi\| \leq \|f_1\|\cdots\|f_k\| \left\|(\mathcal{N}+k)^{\frac{k}{2}}\psi\right\|.$$

Insgesammt folgt dann

$$\begin{aligned}
\left\|\prod_{m=1}^{k} \Phi(f_m)\psi\right\| &\leq \|f_1\|\cdots\|f_k\| \left\|(\mathcal{N}+k)^{\frac{k}{2}}\psi\right\| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \\
&\leq \|f_1\|\cdots\|f_k\| \left\|(\mathcal{N}+k)^{\frac{k}{2}}\psi\right\| 2^k.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der letzten Ungleichung erhält man jetzt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left\|\prod_{m=0}^{k'} \Phi(f_m) A_k^n \psi\right\| &\leq \|f_1\|\cdots\|f_{k'}\| 2^{k'} \left\|(\mathcal{N}+k')^{\frac{k'}{2}} (\mathcal{N}+k+n)^{-\frac{k}{2}} n^{\frac{k}{2}} \psi\right\| \\
&\leq \|f_1\|\cdots\|f_{k'}\| 2^{k'} n^{\frac{k'}{2}} \|\psi\|. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Ungleichung aus

$$\begin{aligned}
\left\|(\mathcal{N}+k')^{\frac{k'}{2}}(\mathcal{N}+k+n)^{-\frac{k}{2}}n^{\frac{k}{2}}\psi\right\| &= \sqrt{\sum_{i=0}^{N_\psi}\|(i+k')^{\frac{k'}{2}}(i+k+n)^{-\frac{k}{2}}n^{\frac{k}{2}}\psi^i\|^2} \\
&\leq n^{\frac{k}{2}}\sqrt{\sum_{i=0}^{N_\psi}\left(\frac{1}{i+k+n}\right)^{k-k'}\|\psi^i\|^2} \\
&\leq n^{\frac{k'}{2}}\|\psi\|.
\end{aligned}$$

Gleichung (5.3) zeigt, daß $\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_{k'})A_n^k$ auf dem dichten Unterraum $\mathcal{D}_0$ beschränkt ist. Aufgrund von Theorem 5.1.1 läßt sich $\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_{k'})A_n^k$ in eindeutiger Weise und unter Beibehaltung der Norm auf ganz $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ erweitern, womit die Behauptung b) für diesen Operator bewiesen ist. Die Aussage b) für den Operator $\sqrt{\mathcal{N}+k'}\cdots\sqrt{\mathcal{N}+1}$ zeigt man nach dem gleichen Schema .
c) Sei $\psi\in\mathcal{D}_0$, dann folgt mit Hilfe des letzten Abschnittes

$$\begin{aligned}
&\left\|\Big(A_n^k\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_{k'})-\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_{k'})A_n^k\Big)\psi\right\| \\
&=\left\|\sum_{j=0}^{k'}\sum_{\substack{\alpha\in\{+,-\}^{k'}\\ \alpha^-=j}}\Big(A_n^k a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_{k'}}(f_{k'})-a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_{k'}}(f_{k'})A_n^k\Big)\psi\right\| \\
&\leq\sum_{j=0}^{k'}\sum_{\substack{\alpha\in\{+,-\}^{k'}\\ \alpha^-=j}}\left\|\Big(A_n^k a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_{k'}}(f_{k'})-a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_{k'}}(f_{k'})A_n^k\Big)\psi\right\| \\
&\leq n^{\frac{k}{2}}\sum_{j=0}^{k'}\sum_{\substack{\alpha\in\{+,-\}^{k'}\\ \alpha^-=j}}\left\|a^{\alpha_1}(f_1)\cdots a^{\alpha_{k'}}(f_{k'})\left((\mathcal{N}+k+k'-2j+n)^{-\frac{k}{2}}-(\mathcal{N}+k+n)^{-\frac{k}{2}}\right)\psi\right\| \\
&\leq n^{\frac{k}{2}}2^{k'}\|f_1\|\cdots\|f_{k'}\|\sum_{j=0}^{k'}\sum_{\substack{\alpha\in\{+,-\}^{k'}\\ \alpha^-=j}}\left\|(\mathcal{N}+k')^{\frac{k'}{2}}\left((\mathcal{N}+k+k'-2j+n)^{-\frac{k}{2}}-(\mathcal{N}+k+n)^{-\frac{k}{2}}\right)\psi\right\| \\
&\leq n^{\frac{k}{2}}2^{k'}\|f_1\|\cdots\|f_{k'}\|\sum_{j=0}^{k'}\binom{k'}{j}\left\|(\mathcal{N}+k')^{\frac{k'}{2}}\left((\mathcal{N}+k+k'-2j+n)^{-\frac{k}{2}}-(\mathcal{N}+k+n)^{-\frac{k}{2}}\right)\psi\right\| \quad (A.4)
\end{aligned}$$

Zunächst wird die folgende Ungleichung bewiesen

$$\sup_{j\in\{0,\cdots,k'\}}\left(\frac{1}{(i+k+k'-2j+n)^{\frac{k}{2}}}-\frac{1}{(i+k+n)^{\frac{k}{2}}}\right)^2\leq\frac{(k'+1)^k}{(i+k+n-k')^k(i+k+n)} \tag{A.5}$$

- $j\leq k'/2$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{(i+k+k'-2j+n)^{\frac{k}{2}}}-\frac{1}{(i+k+n)^{\frac{k}{2}}}\right)^2 &\leq \left(\frac{1}{(i+k+n)^{\frac{k}{2}}}-\frac{1}{(i+k+k'+n)^{\frac{k}{2}}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{(i+k+n+k')^k}-\sqrt{(i+k+n)^k}}{((i+k+n)(i+k+k'+n))^{\frac{k}{2}}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichung $\sqrt{x+y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$ ergibt die rechte Seite der letzten Gleichung

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} (i+k+n)^m {k'}^{k-m}}{((i+k+n)(i+k+k'+n))^k} \\
&\leq \frac{(i+k+n)^{k-1} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} {k'}^{k-m}}{((i+k+n)(i+k+k'+n))^k} \\
&= \frac{(k'+1)^k}{(i+k+n)(i+k+n+k')^k}.
\end{aligned}$$

- Aus der Ungleichung $\sqrt{x} - \sqrt{x-y} \leq \sqrt{y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$ mit $x \geq y$ erhält man analog für den Fall $k'/2 < j \leq k'$ die Abschätzung

$$\left(\frac{1}{(i+k+k'-2j+n)^{\frac{k}{2}}} - \frac{1}{(i+k+n)^{\frac{k}{2}}} \right)^2 \leq \frac{(k'+1)^k}{(i+k+n-k')^k (i+k+n)}.$$

Für die Summanden der rechten Seite von Gleichung 5.4 folgt mit Hilfe der Ungleichung 5.5

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\sum_{i=0}^{N_\psi} \left((i+k')^{\frac{k'}{2}} ((i+k+k'-2j+n)^{-\frac{k}{2}} - (i+k+n)^{-\frac{k}{2}}) \right)^2 \|\psi^i\|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=0}^{N_\psi} (i+k')^{k'} \frac{(k'+1)^k}{(i+k+n-k')^k (i+k+n)} \|\psi^i\|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=0}^{N_\psi} \frac{((k+1)(i+k))^k}{(i+n)^k (i+k+n)} \|\psi^i\|^2} \\
&\leq \sqrt{\frac{(k(k+1))^k}{(k+n)n^k}} \sqrt{\sum_{i=0}^{N_\Psi} \|\psi^i\|^2} = \sqrt{\frac{(k(k+1))^k}{(k+n)n^k}} \|\psi\|.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man dann die Abschätzung

$$\left\| \left(A_n^k \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) - \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) A_n^k \right) \psi \right\| \leq 4^{k'} \|f\|^{k'} \sqrt{\frac{(k(k+1))^k}{k+n}} \|\psi\|.$$

Weiter gilt

$$\left\| A_n^k \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) \psi \right\| \leq \left\| \left(A_n^k \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) - \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) A_n^k \right) \psi \right\| + \left\| \prod_{m=1}^{k'} \Phi(f_m) A_n^k \psi \right\|.$$

Aus Theorem 5.1.1 folgt dann die Behauptung.

■

Beweis von Theorem 6.2.1: Sei $\psi \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}), m \in \mathbb{N}$ und $P_m : \mathcal{F}_+ \to \mathcal{D}_0$ der orthogonal-Projector, definiert durch $(\psi^0, \psi^1, \cdots) \mapsto (\psi^0, \psi^1, \cdots, \psi^m, 0, \cdots)$. Aus der

Folge $\varphi_m \equiv P_m\psi$, für die $\lim_{m\to\infty}\varphi_m = \psi$ gilt, wählt man eine Teilfolge $\psi_n = \varphi_{m_n}$, so daß $\|\psi - \psi_n\| \leq 1/n^N$. Die Folge $A_n^N\psi_n$ konvergiert gegen ψ, da

$$\left\|\psi - A_n^N\psi_n\right\| = \left\|\psi - \psi_n + \psi_n - A_n^N\right\| \leq \left\|\psi_n - A_n^N\psi_n\right\| + \underbrace{\|\psi - \psi_n\|}_{\to 0}$$

und

$$\begin{aligned}\left\|\psi_n - A_n^N\psi_n\right\| &= \sqrt{\sum_{i=0}^{N_{\psi_n}}\left(1-(\frac{i+k}{n}+1)^{-\frac{k}{2}}\right)^2\|\psi^i\|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty}\left(1-(\frac{i+k}{n}+1)^{-\frac{k}{2}}\right)^2\|\psi^i\|^2} = \|(1-A_n^N)\psi\| \to 0.\end{aligned}$$

Sei $k \leq N$ und $\psi \in D\big(\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_N)\big)$, dann folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}&\left\|\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)\psi - \prod_{m=1}^k \Phi(f_m)A_n^N\psi_n\right\| \\ &\leq \left\|\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)\psi - A_n^N\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)\psi\right\| + \left\|A_n^N\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)\psi - \prod_{m=1}^k \Phi(f_m)A_n^N\psi_n\right\| \\ &\leq \left\|\left(1-A_n^N\right)\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)\psi\right\| + \left\|A_n^N\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)(\psi-\psi_n)\right\| + \left\|A_n^N\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)\psi_n - \prod_{m=1}^k \Phi(f_m)A_n^N\psi_n\right\| \\ &\leq \left\|\left(1-A_n^N\right)\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)\psi\right\| + \left\|A_n^N\prod_{m=1}^k \Phi(f_m)\right\|\|\psi-\psi_n\| + \left\|A_n^N\prod_{m=1}^k \Phi(f_m) - \prod_{m=1}^k \Phi(f_m)A_n^N\right\|\|\psi_n\|.\end{aligned}$$

Aus Lemma 5.2.1 und der Tatsache, daß $\|\psi - \psi_n\| \leq 1/n^N$, folgt, daß alle Terme gegen Null konvergieren. Die Folge θ_n mit den gewünschten Eigenschaften ist demnach $A_n^N\psi_n$. Die andere Aussage folgt aus

$$\begin{aligned}&\left\|\sqrt{\mathcal{N}+k}\cdots\sqrt{\mathcal{N}+1}\psi - \sqrt{\mathcal{N}+k}\cdots\sqrt{\mathcal{N}+1}A_n^N\psi_n\right\| \\ &\leq \left\|\sqrt{\mathcal{N}+k}\cdots\sqrt{\mathcal{N}+1}\psi - A_n^N\sqrt{\mathcal{N}+k}\cdots\sqrt{\mathcal{N}+1}\psi\right\| + \left\|A_n^N\sqrt{\mathcal{N}+k}\cdots\sqrt{\mathcal{N}+1}(\psi-\psi_n)\right\|.\end{aligned}$$

■

A.3 Anmerkung zu Theorem 3.2.2

Man definiert $t \equiv \sqrt{\frac{w_2(f_k,f_k)}{2}}$, und o.B.d.A. kann $t < 1$ gewählt werden. Zu zeigen ist, daß

$$\lim_{t\to 0}\frac{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)\left|e^{ix+t^2} - \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{i^{n-m}x^{n-2m}t^{2m}}{m!(n-2m)!}\right|^2}{t^{2N}2^N} = 0.$$

Eine Taylorentwicklung von e^{ix} und e^t um die Stelle Null liefert

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(ix)^n}{n!} + R_{N+1}(x), \text{und} \tag{A.6}$$

$$e^{t^2} = \sum_{m=0}^{[N/2]}\frac{t^{2m}}{m!} + r_{[N/2]+1}(t). \tag{A.7}$$

Die Restglieder erfüllen

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq \frac{1}{N!}|x^N| \\ |r_N(t)| &\leq \frac{e}{N!}t^{2N} \end{aligned}$$

Einsetzen von Gl. 5.6 und 5.7 in das obere Integral ergibt

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu(x) \Bigg| \underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{(ix)^n}{n!} + R_{N+1}(x)\Big)\Big(\sum_{m=0}^{[N/2]} \frac{t^{2m}}{m!} + r_{[N/2]+1}(t)\Big)}_{\equiv T_0} - \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{i^{n-2m}x^{n-2m}t^{2m}}{m!(n-2m)!}\Bigg|^2. \tag{A.8}$$

Weiter gilt für T_0

$$T_0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{[N/2]} \frac{(ix)^n t^{2m}}{m!n!}}_{\equiv T_1} + \underbrace{r_{[N/2]+1}(t)\sum_{n=0}^{N}\frac{(ix)^n}{n!}}_{\equiv T_2} + \underbrace{R_{N+1}(x)\sum_{m=0}^{[N/2]}\frac{t^{2m}}{m!}}_{\equiv T_3} + \underbrace{r_{[N/2]+1}(t)R_{N+1}(x)}_{\equiv T_4},$$

und

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{k=0}^{N+2[N/2]} \sum_{\substack{n\in\{0,\cdots,N\}\\ m\in\{0,\cdots,[N/2]\}\\ n+2m=k}} \frac{(ix)^n t^{2m}}{m!n!} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{n\in\{0,\cdots,N\}\\ m\in\{0,\cdots,[N/2]\}\\ n+2m=k}} \frac{(ix)^n t^{2m}}{m!n!} + \sum_{k=N+1}^{N+2[N/2]} \sum_{\substack{n\in\{0,\cdots,N\}\\ m\in\{0,\cdots,[N/2]\}\\ n+2m=k}} \frac{(ix)^n t^{2m}}{m!n!} \\ &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(ix)^{k-2m}t^{2m}}{m!(k-2m)!} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{N+2[N/2]} \sum_{\substack{n\in\{1,\cdots,N\}\\ m\in\{1,\cdots,[N/2]\}\\ n+2m=k}} \frac{(ix)^n t^{2m}}{m!n!}}_{\equiv T_5} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen und der Hölderschen Ungleichung [14], folgt für 5.8 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \leq\ & \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)\left(|T_2|^2+|T_3|^2+|T_4|^2+|T_5|^2\right) \\ &+2\Bigg(\sqrt{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_2|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_3|^2} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_4|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_5|^2} \\ &+\sqrt{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_2|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_4|^2} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_2|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_5|^2} \\ &+\sqrt{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_3|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_4|^2} + \sqrt{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_3|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_5|^2}\ \Bigg) \end{aligned} \tag{A.9}$$

Aus den Vorraussetzungen von Theorem 3.2.2, sprich Gleichung 3.13 ergibt sich

- Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, dann folgt

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|x|^n = \|\Phi(f_k)^{\frac{n}{2}}\psi\|^2 \leq t^n 2^{\frac{n}{2}} C_{\frac{n}{2}}^2.$$

- Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, dann folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und letzten Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|x|^n &= \int d\mu(x)|x|^{n-1}|x| \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|x|^{2n-2} \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|x|^2} \\ &\leq t^n 2^{\frac{n}{2}} C_1 C_{n-1}.\end{aligned}$$

Im Fall $n = 1$ muss man beachten, daß das Spektralmaß μ endlich ist.

Mit den beiden Ungleichungenn lassen sich jetzt alle Terme in 5.9 abschätzen.

- T_2 Term:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_2|^2 &= |r_{[n/2]+1}(t)|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(ix)^n}{n!}\right|^2 \\ &\leq t^{4[N/2]+4} \frac{e^2}{([N/2]+1)!^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} d\mu(x) \left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(ix)^n}{n!}\right|^2}_{<\infty}\end{aligned}$$

- T_3 Term:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_3|^2 &= \left|\sum_{m=0}^{[N/2]} \frac{t^{2m}}{m!}\right|^2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|R_{N+1}|^2 \\ &\leq t^{2N+2} \frac{2^{N+1} C_{N+1}^2}{(N+1)!^2} \left(\sum_{m=0}^{[N/2]} \frac{t^{2m}}{m!}\right)^2\end{aligned}$$

- T_4 Term:

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_3|^2 \leq t^{2N+4[N/2]+6} \frac{e^2 2^{N+1} C_{N+1}^2}{\left(([N/2]+1)!(N+1)\right)^2}$$

- T_5 Term:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|T_5|^2 &\leq \sum_{k,k'=N+1}^{N+2[N/2]} \sum_{\substack{n,n' \in \{1,\cdots,N\} \\ m,m' \in \{1,\cdots,[N/2]\} \\ n+2m=k \\ n'+2m'=k'}} \frac{t^{2m+2m'}}{n!n'!m!m'!} \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)|x|^{n+n'} \\ &\leq \sum_{k,k'=N+1}^{N+2[N/2]} \sum_{\substack{n,n' \in \{1,\cdots,N\} \\ m,m' \in \{1,\cdots,[N/2]\} \\ n+2m=k \\ n'+2m'=k'}} \frac{t^{2m+2m'} A_{n+n'}}{n!n'!m!m'!} \\ &= t^{2N+2} \left(\sum_{l,l'=N+1}^{2[N/2]+1} \sum_{\substack{n,n' \in \{1,\cdots,N\} \\ m,m' \in \{1,\cdots,[N/2]\} \\ n+2m=l+N+1 \\ n'+2m'=l'+N+1}} \frac{t^{l+l'} A_{n+n'}}{n!n'!m!m'!} \right)\end{aligned}$$

Dabei ist die Konstante $A_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} C_{\frac{n}{2}}^2 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2^{\frac{n}{2}} C_1 C_{n-1} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Mit Hilfe dieser vier Abschätzungen folgt dann die Behauptung.

∎

Literaturverzeichnis

[1] Baez J.C., *Wick Products of the Free Bose Field*, J. Funct. Anal. **86** (1989) 211

[2] Bratelli O. und Robinson D.W. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics*,2.Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1996).

[3] Brunetti R. und Fredenhagen K. *Microlocal analysis and interacting quantum fields: renormalisation on physikal backgrounds* ,Preprint hep-math-ph/9903028.

[4] Brunetti R., Fredenhagen K. und Köhler M. *The microlocal spektrum condition and the Wick's polynomials of the free field*,Commun. Math. Physics **180** (1996) 312

[5] Bogolubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., und Todorov I.T. *General Principles of Quantum Field Theorie*, Kluwer 1990.

[6] Fredenhagen K. *Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit*, Skript, http://i02aix1.desy.de/ lqp/notes.html

[7] Fredenhagen K. *On the general theory of quantized fields*, in K.Schmüdgen(Ed.), Mathematical Physics X, S. 136-152, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[8] Großmann, S: *Funktionalanalysis im Hinblick auf Anwendungen in der Physik* ,AULA-Verlag, Wiesbaden 1988.

[9] Hepp K. *Théorie de la renormalisation*, Lect. Notes in Phys. **2.**,Springer-Verlag 1969.

[10] Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, 2.Aufl., Springer-Verlag 1990.

[11] Kristensen P., Mejlbo L. und Thue Poulsen E. *Tempered Distributions in Infiniteley Many Dimensions*,Commun. Math. Physics **1** (1965) 175

[12] Nashed, M.Z.: *Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis*, in Rall, L.B. (Ed.): Nonlinear functional analysis and applications, S. 103-309, Acadamic Press, New York-London 1971.

[13] Pesenti, D. *Produit de Wick des formes sesquilinear*, in Séminaire de théorie du Potentiel, M.Brent, G. Choquet und J. Deny (Ed.), S. 120-143, Lecture Notes in Mathematics, Vol 518, Springer-Verlag, New York.

[14] Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis* , Academic Press, New York-London 1972.

[15] Reed M., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness* , Academic Press, New York-London 1975.

[16] Streater R.F., Wightman A.S. *PCT, Spin and Statistics and all that*, Benjamin, New York, 1964.

[17] Verch, R.: *Local definiteness, primarity and quasiequivalence of quasifree Hadamard quantum states in curved spacetime*, Commun. Math. Phys. **160** (1994) 507.

[18] Wick G.C.: *The evaluation of the collision matrix*, Phy. Rev. **80** (1950) 267.

[19] Wightman A.S. und Gårding L. *Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum Theorie*, Arkiv Fys. **28** (1964) 129.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Fredenhagen für die Betreuung dieser Arbeit und für die Zeit, die er sich immer für Nachfragen aller Art genommen hat.
Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Eltern für die langjährige finanzielle Unterstützung bedanken.

Erklärung gemäß Diplomprüfungsordnung

Ich versichere hiermit, diese Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der aufgeführten Hilfsmittel verfaßt zu haben.

Hamburg, den 15.2.2000