

Das magnetische Moment des Elektrons in  
gekrümmter Raumzeit

von

Klaus-Heinrich Peters

Diplomarbeit

II.Institut für theoretische Physik  
Universität Hamburg

Oktober 1997

**Gutachter der Diplomarbeit :**  
Prof. Dr. K. Fredenhagen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1	Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit . . . . .	4
1.2	Aufgabe und Struktur der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Das magnetische Moment im Minkowskiraum</b>	<b>7</b>
2.1	Der nichtrelativistische Grenzfall der Zweipunktdistribution . . . . .	7
2.2	Berechnung des magnetischen Momentes des Elektrons im Minkowskiraum mit der Zweipunktfunktion . . . . .	10
2.3	Zusammenfassung . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Das magnetische Moment auf gekrümmter Raumzeit</b>	<b>17</b>
3.1	Spinoren auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	17
3.1.1	Spin-Strukturen und -Zusammenhänge . . . . .	17
3.1.2	Die Krümmung des Spinzusammenhanges . . . . .	20
3.1.3	Der Dirac- und der spinorielle Klein-Gordon- Operator . . . . .	24
3.1.4	Regeln für die partielle Integration von Spinoren . . . . .	24
3.2	Dirac- und Klein-Gordonfelder auf Robertson-Walker-Raumzeiten . . . . .	26
3.2.1	Die Robertson-Walker-Raumzeit . . . . .	26
3.2.2	Berechnung der Zusammenhänge und Krümmungen für die flache Robertson-Walker-Raumzeit . . . . .	27
3.2.3	Der Dirac- und der Klein-Gordon-Operator . . . . .	31
3.3	Lösungen der Klein-Gordon- und der Dirac-Gleichung in einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit und Berechnung der Zweipunktfunktion . . . . .	33
3.3.1	Die adiabatische Näherungslösung der Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	33
3.3.2	Vakuumzustände des skalaren Klein-Gordon-Feldes für eine flache Robertson-Walker-Raumzeit in 0-ter adiabatischer Näherung . . . . .	35
3.3.3	Die Dirac-Gleichung in der flachen Robertson-Walker-Raumzeit . . . . .	36
3.3.4	Quantisierung der Dirac-Gleichung und Berechnung der Zweipunktfunktion in erster Näherung . . . . .	39
3.4	Das magnetische Moment in der flachen Robertson-Walker-Raumzeit . . . . .	42
3.4.1	Die erste Näherung . . . . .	43
3.4.2	Die nächste Näherung . . . . .	46
3.5	Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Ausblick</b>	<b>51</b>
<b>A</b>		<b>52</b>
A.1	Notationen und Konventionen . . . . .	52
A.2	$\gamma$ -Matrizen . . . . .	52

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit

Die Quantentheorie wird seit etwa 70 Jahren als der fundamentale Rahmen jeder physikalischen Theorie angesehen. In ihrer Ausformung als Quantenfeldtheorie (im folgenden als QFT abgekürzt) sind inzwischen mit Ausnahme der Gravitation alle klassischen Felder mit überwältigendem experimentellem Erfolg beschrieben worden. So ist durch die Vorhersagen der Quantenelektrodynamik (QED) das gyromagnetische Verhältnis des Elektrons bis zu einer Größenordnung  $10^{-12}$  berechnet und bis zu  $10^{-11}$  experimentell bestätigt worden<sup>1</sup>.

Das Gravitationsfeld widersteht allerdings bisher erfolgreich allen Versuchen einer quantentheoretischen Beschreibung. Mit der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) existiert eine klassische Theorie der Gravitation, die anscheinend inzwischen sogar besser experimentell bestätigt ist als die QFT<sup>2</sup>. Daher mehren sich die Stimmen, die fordern, nicht mehr zu versuchen die ART zu quantisieren, sondern umgekehrt die QFT aus der ART zu verstehen.<sup>3</sup>

*Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit* vereinigt das Beste beider Welten. Die Gravitation wird als klassischer, durch die ART beschriebener Hintergrund für die Durchführung der QFT der anderen Felder aufgefaßt. Dadurch wird ein weiterer Bereich sinnvoller Forschung erschlossen, der unabhängig von der Beantwortung der obigen prinzipiellen Fragen vernünftige Ergebnisse liefern kann. Etwaige Quanteneffekte der Gravitation wären erst bei Messungen im Bereich der Planck'schen Länge von  $\sim 10^{-33} \text{ cm}$  wirklich sichtbar, während für die herkömmliche QFT gerade Größenordnungen bis  $\sim 10^{-17} \text{ cm}$  beachtet werden müssen. Falls also eine Quantentheorie der Gravitation gefunden werden sollte, so hätte die Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten den Status einer in weiten Bereichen sinnvollen semiklassischen Approximation. Das prominenteste Beispiel eines so berechneten Effektes ist die Vorhersage von Strahlungsemission aus klassisch schwarzen Löchern durch S.Hawking.

Die QFT im Minkowskiraum macht ausgiebigen Gebrauch von dessen speziellen Symmetrien. Insbesondere liegt die Auswahl der physikalisch richtigen Theorie aus der Vielzahl der mathematisch möglichen in der Struktur des Minkowskiraumes vorgezeichnet (man denke etwa an den für die Fockraum-konstruktion und jede Teilcheninterpretation so essentiellen Begriff des Vakuums, das definiert ist als der

---

<sup>1</sup>siehe etwa [Sch95], auch für Literaturangaben

<sup>2</sup>aus [HP96], S.61

<sup>3</sup>etwa R.Penrose in [HP96]. Ein neuerer Versuch zB. in [Has96], und besonders eigenwillig [Had96]

Poincare-invariante Zustand).<sup>4</sup>

Als Auswahlkriterium physikalischer Zustände auf allgemeinen Raumzeiten wird inszwischen die sogenannte Hadamard-Bedingung<sup>5</sup> allgemein akzeptiert. Diese fixiert die Singularitätsstruktur der Zweipunktfunktion derart, daß ein vernünftiger (also renormierbarer) Energie-Impulstensor definiert werden kann, und darüberhinaus den richtigen Grenzwert im Minkowskiraum besitzt. Durch die Arbeit [BFK96] und Vorgänger<sup>6</sup> zeichnet sich derzeit ein noch besseres Argument für die Benutzung gerade der Hadamard-Bedingung ab, denn diese entpuppt sich als Spezialfall einer Verallgemeinerung der Spektrumsbedingung auf gekrümmte Raumzeiten.

Konkrete Konstruktionen von Quantenfeldtheorien sind bisher vor allem für die kosmologisch interessanten homogenen und isotropen „Robertson-Walker“-Raumzeiten durchgeführt worden. Da sich diese nur relativ geringfügig vom Minkowskiraum unterscheiden, ist hier eine Orientierung an den herkömmlichen Methoden am ehesten möglich und fruchtbar. So gelingt dort die Definition sogenannter adiabatischer Vakua und die entsprechende Konstruktion des Fockraumes.<sup>7</sup> In [Jun95] wird gezeigt, daß die so definierten Zustände ebenfalls von der Hadamard-Form und damit physikalisch akzeptabel sind.

Mit [BF97] gelingt schließlich zum erstenmal die systematische Behandlung wechselwirkender Theorien. Dort wird die S-Matrix für die skalare Theorie als Potenzreihe definiert und die Renormierbarkeit in allen Ordnungen gezeigt.

Damit ist im wesentlichen der Rahmen für die folgende Untersuchung abgesteckt .

## 1.2 Aufgabe und Struktur der Arbeit

Die eigentliche Zielvorgabe dieser Arbeit war die Berechnung von u.U. meßbaren gravitativen Korrekturen an bestimmten Feynman-Diagrammen. Dies sollte nach [BF97] *prinzipiell* für beliebig hohe Ordnungen möglich sein. Mit dem vorher gesagten ergibt sich ein Mehrfaches:

1. Falls solche auftreten, werden die Korrekturen in der 1.Ordnung Störungstheorie (also auf Baumgraphen Niveau) die größten sein. Daher soll allein auf diesem Niveau gerechnet werden. Die rechentechnischen Probleme verringern sich durch das Ausklammern der Renormierung höherer Graphen beträchtlich. Darüberhinaus ist die Behandlung 1.Ordnung auch für alle weiteren Ordnungen maßgebend, da die gleiche Rechnung bei der Auswertung von Matrixelementen in jeder Ordnung (mit leicht verändertem Wechselwirkungsterm) wieder durchgeführt werden muß.
2. Das zentrale Objekt der QFT auf gekrümmter Raumzeit ist die Zweipunktfunktion. An diese wird die fundamentale Hadamard-Bedingung gestellt und sie ist das Objekt, aus dem die S-Matrix berechnet wird. Es ist also wünschenswert, die in Betracht stehenden physikalischen Größen direkt aus dieser zu berechnen.

Zwar wird die Zweipunktfunktion später de facto mit der bekannten Quantisierungsprozedur aus den Vakuumerwartungswerten der Feldoperatoren gewonnen werden (was möglich ist, weil die verwendete Beispielraumzeit hinreichend einfach ist und eine vernünftige Vakuumdefinition erlaubt), doch dies ist nur ein technischer Aspekt. Denkbar wäre es zum Beispiel am Leitfaden des hier Vorgestellten zumindest qualitative Aussagen über physikalische Größen direkt aus dem Hadamard-Algorithmus herzuleiten.

---

<sup>4</sup>siehe hierzu [Wal94], auch als Einführung in die QFT auf gekrümmten Raumzeiten insgesamt

<sup>5</sup>zum erstenmal in [DB60] als solche definiert, in [KW91] präzisiert

<sup>6</sup>zuerst in [Rad92]

<sup>7</sup>Dies wird später (Kapitel 3) etwas ausführlicher dargestellt werden. Allgemeine Literaturangaben finden sich dort.

3. Es soll ein konkreter Effekt *berechnet* werden. Fast alle Rechnungen der QFT werden bisher im Impulsraum durchgeführt, mit gutem Grund, denn die rechnerischen Vereinfachungen sind beträchtlich. Da der Impulsraum i.a. aber nicht (global) für Mannigfaltigkeiten zur Verfügung steht, können Rechnungen im Minkowskiraum nur sehr eingeschränkt als Modell für allgemeinere Fälle benutzt werden. Die Suche nach einer reinen Ortsraumbeschreibung ist daher ein im Hintergrund mitschwingendes Thema. Wie schon beim vorigen Punkt müssen aber auch hier aus technischen Gründen Kompromisse eingegangen werden.
4. Es sollen *meßbare* Korrekturen berechnet werden. Da bis heute noch kein Feld gefunden wurde, daß sich durch die  $\phi^4$ -Theorie beschreiben läßt, wurde für die Untersuchung notwendigerweise ein Beispiel aus der QED gewählt. Es ergibt sich also insbesondere die Aufgabe, die aus der skalaren Theorie bekannten Ergebnisse auf Spinorfelder zu übertragen.
5. Da die zu erwartenden Korrekturen klein sind, wurde mit dem magnetischen Moment des Elektrons eine der am genauesten gemessenen Größen der Physik benutzt. Das magnetische Moment wiederum wird aber im Grenzfall ruhender Teilchen definiert. Die vernünftige Durchführung dieses limes ist daher ein weiteres Anliegen dieser Arbeit.
6. Es ist a priori erstmal unklar, wie die aus der flachen Raumzeit bekannten physikalischen Größen auf gekrümmten Räumen überhaupt definiert werden müssen. Daher soll für das magnetische Moment eine tragfähige Definition aus der S-Matrix angegeben werden.

Die Arbeit ist daher wie folgt strukturiert:

In **Kapitel 2** soll zunächst die Berechnung des magnetischen Momentes im Minkowskiraum durchgeführt werden, und zwar derart, daß alle Schritte auf gekrümmte Raumzeiten zu übertragen sind. Es wird zuerst in 2.1 der nichtrelativistische bzw. Impuls-0 Grenzfall der Zweipunktfunktion definiert. Es zeigt sich, daß die sich ergebende Zweipunktfunktion hinreichend einfach ist, um eine reine Ortsraumrechnung auch rechentechisch akzeptabel zu machen. In Kapitel 2.2 wird so die Impuls-0 S-Matrix definiert und berechnet. Es wird eine allgemeine Definition des magnetischen Momentes angegeben, die auch für allgemeine Raumzeiten vernünftig ist.

**Kapitel 3** widmet sich der Berechnung des magnetischen Momentes in einer ausgewählten Beispielraumzeit. In 3.1 werden die Grundlagen für das Rechnen mit Spinoren auf Mannigfaltigkeiten angegeben. Danach wird in 3.2 die als Beispiel dienende Robertson-Walker-Raumzeit vorgestellt, und deren in 3.1 abstrakt definierten Kenngrößen explizit berechnet. Es ergeben sich die Dirac- und die Klein-Gordon-Gleichung für die flache Robertson-Walker-Raumzeit, die in 3.3 (näherungsweise) gelöst und anschließend quantisiert werden. An dieser Stelle werden bisher nur für die skalare Theorie wirklich bewiesene Ergebnisse in der QED benutzt werden. Die Zweipunktfunktion und die S-Matrix werden danach wie vorher im Minkowskiraum berechnet (3.4), und das magnetische Moment erklärt.

## Kapitel 2

# Das magnetische Moment im Minkowskiraum

Wie angekündigt, soll nun die Berechnung des magnetischen Momentes im Minkowskiraum wiederholt werden, so daß sie unter dem Horizont des in der Einleitung gesagten exemplarischen Charakter auch

- für gekrümmte Raumzeiten und
- höhere Ordnungen Störungstheorie

bekommt.

Das bedeutet vor allem

- Verwendung der Zweipunktfunktion und der S-Matrix
- Benutzung der Ortsraumdarstellung derselben bei der Berechnung des magnetischen Momentes

Die S-Matrix wird zur Berechnung physikalischer Effekte immer im Niederenergielimes ausgewertet, d.h. daß Ausdrücke, die quadratisch in den Impulsen der externen Linien sind, vernachlässigt werden. Diese Vorgehensweise soll zunächst unter konsequenter Beachtung des Distributionscharakters der Zweipunktfunktion definiert werden. Dieses soll vorweg geschehen, um eine rechnerisch zu handhabende Form der Zweipunktfunktion zu erhalten.

Die S-Matrix selbst kann hier im Minkowskiraum noch durch Standardverfahren, die jedem Lehrbuch über QFT zu entnehmen sind, konstruiert werden, und ihre Form wird hier vorausgesetzt. Für die Verallgemeinerung auf gekrümmte Räume ist allerdings die sogenannte kausale Konstruktion nach Epstein und Glaser die ideale Form. Dies wird allerdings erst für die Definition und Berechnung höherer Ordnungen relevant. Da in dieser Arbeit nur der „triviale“ Fall 1.Ordnung explizit behandelt wird, (also Renormierungsprobleme ausgeklammert bleiben), genüge hier ein Hinweis auf die Literatur, vor allem auf [Sch95], für einen kurzen Überblick auch [Pra97].

### 2.1 Der nichtrelativistische Grenzfall der Zweipunkt-distribution

Die Zweipunktfunktion kann auf verschiedenen Wegen definiert und berechnet werden. In der QFT erscheint sie meistens als Vakuumerwartungswert des Produktes von zwei Feldoperatoren. Für eine Übersicht

über die verschiedenen „Propagatorfunktionen“ siehe [Sch95]. Der Zusammenhang mit den klassischen Greensfunktionen wird besonders eindringlich in [Ful89] dargestellt.

Es soll nun kurz dargestellt werden, wie man die nichtrelativistische Näherung bei Distributionen erklären kann. Im wesentlichen soll gezeigt werden, daß die Zweipunktdistribution auf dem Bereich der um  $k=0$  lokalisierten Impulsraum-Testfunktionen durch eine einfachere Distribution ersetzt werden kann.

Man betrachte die Zweipunktfunktion des Klein-Gordon-Feldes (entnommen [Sch95])

$$\Delta^+(f) = i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x d^4k \Theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) e^{-ikx} f(x) \quad (2.1)$$

$$= i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \Theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) \hat{f}(k) \quad (2.2)$$

$$= i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \frac{1}{2E(\vec{k})} \delta(k^0 - E(\vec{k})) \hat{f}(k) \quad , E(\vec{k}) > 0 \quad (2.3)$$

$$= i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2E(\vec{k})} \hat{f}(E(\vec{k}), \vec{k}) \quad . \quad (2.4)$$

Die Testfunktion  $f(x)$  sei so gewählt, daß sie in ein direktes Produkt aus Zeit- und Raumanteil zerfalle,

$$f(x) = h(x^0) f(\vec{x}) \quad (2.5)$$

$$\hat{f}(k) = \hat{h}(k^0) \hat{f}(\vec{k}) \quad . \quad (2.6)$$

(Die doppelte Benutzung des Symbols  $f$  sollte zu keiner Verwirrung führen, da das Argument immer mitgeschrieben wird.)

Eine Distribution im nichtrelativistischen limes  $|\vec{k}|^2 \ll m^2$  betrachten heißt jetzt, sie nur auf Testfunktionen  $\hat{f}(\vec{k})$  mit  $\text{supp}(\hat{f}) \subset B(0, \vec{k}); |\vec{k}|^2 \ll m^2$  auszuwerten.

Es sei also  $\hat{f}(\vec{k}) \in \mathcal{C}_0^\infty$  eine normierte Testfunktion, d.h.  $\int d^3k \hat{f}(\vec{k}) \hat{f}(\vec{k}) = 1^1$ . Für  $\lambda > 0$  sei

$$\hat{f}_\lambda(\vec{k}) := \frac{1}{\lambda^{3/2}} \hat{f}(\lambda^{-1} \vec{k}) \quad ,$$

so daß  $\text{supp} \hat{f}_\lambda$  mit kleiner werdendem  $\lambda$  entsprechend einschrumpft und  $\hat{f}(\vec{k})$  für  $\lambda \rightarrow 0$  nur noch am Nullpunkt lokalisiert ist.<sup>2</sup>

Entsprechend sei eine Folge von Distributionen

$$\Delta_\lambda^+(\hat{f}) := \Delta^+(\hat{f}_\lambda)$$

definiert.

Alternativ dazu kann auch der Integralkern  $\Delta^+(k)$  skaliert werden. Man erhält diesen aus

$$\Delta_\lambda^+(\hat{f}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \frac{1}{\lambda^{3/2}} \Delta^+(k) \hat{f}\left(\frac{\vec{k}}{\lambda}\right) \hat{h}(k^0) \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \lambda^{3/2} \Delta^+(k^0, \lambda \vec{k}) \hat{f}(\vec{k}) \hat{h}(k^0) \quad , \quad (2.8)$$

so daß sich eine Folge von Impulsraumintegralkernen definieren läßt:

$$\Delta_\lambda^+(k^0, \vec{k}) := \lambda^{3/2} \Delta^+(k^0, \lambda \vec{k}) \quad (2.9)$$

<sup>1</sup>Die Normierungsbedingung wurde hier von vornherein so gewählt, daß sie sich direkt auf die Berechnung von Matrixelementen überträgt.

<sup>2</sup>Als Beispiel diene etwa die Funktion  $e^{-\frac{1}{1-|\vec{k}|^2}}$  für  $|\vec{k}|^2 < 1$  und 0 sonst



Durch Fouriertransformation ergibt sich

$$\Delta_\lambda^+(x^0, \vec{x}) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{ikx} \Delta_\lambda^+(k^0, \vec{k}) \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{ikx} \lambda^{3/2} \Delta^+(k^0, \lambda \vec{k}) \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk^0 d^3k \frac{1}{\lambda^{3/2}} e^{i\vec{k} \frac{\vec{x}}{\lambda}} e^{ik^0 x^0} \Delta^+(k^0, \vec{k}) \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{\lambda^{3/2}} \Delta^+(x^0, \frac{\vec{x}}{\lambda}) \quad (2.13)$$

als Ortsraumfolge von Integralkernen.

Aus (2.1) ergibt sich

$$\Delta^+(x) = i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2E(\vec{k})} e^{-iE(\vec{k})x^0} e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

und damit

$$\Delta_\lambda^+(x) = i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\lambda^{3/2}} \frac{1}{2E(\vec{k})} e^{-iE(\vec{k})x^0} e^{i\vec{k} \frac{\vec{x}}{\lambda}} \quad (2.14)$$

$$= i \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\lambda^{3/2}}{2E(\lambda \vec{k})} e^{-iE(\lambda \vec{k})x^0} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad , \quad (2.15)$$

und mit  $E(\lambda \vec{k}) = \sqrt{\lambda^2 |\vec{k}|^2 + m^2} = m + O(\lambda^2)$  bekommt man

$$= i \lambda^{3/2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1 - O(\lambda^2)}{2m} e^{-im(1+O(\lambda^2))x^0} e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (2.16)$$

$$= i \lambda^{3/2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2m} e^{-imx^0} e^{i\vec{k}\vec{x}} (1 - O(\lambda^2))(1 - O(\lambda^2)) \quad , \quad (2.17)$$

so daß

$$\Delta_\lambda^+(x) = \frac{i\lambda^{3/2}}{2m} e^{-imx^0} \delta(\vec{x}) + O(\lambda^{7/2}) \quad (2.18)$$

und schließlich

$$\Delta_\lambda^+(f) = \frac{i\lambda^{3/2}}{2m} \hat{h}(m) f(0) + O(\lambda^{7/2}) \quad . \quad (2.19)$$

**Definition 1.** *Der führende Anteil in  $\lambda$  der Distribution  $\Delta_\lambda^+(x)$  heiße die nicht-relativistische Zweipunktfunktion des Klein-Gordon-Feldes und werde durch  $\Delta_{nr}^+$  symbolisiert*

*Bemerkung:* Das Vernachlässigen von Termen  $\sim |\vec{k}|^2$  erscheint in der klassischen Literatur als der Niederenergielimes. Dem entspricht hier natürlich die Vernachlässigung der Beiträge  $\sim \lambda^2$ . Das Auftreten des zusätzlichen Faktors  $\lambda^{3/2}$  stammt einzig und allein aus der verwendeten Normierungsbedingung, die schon auf das kommende Problem der Bildung von Erwartungswerten zugeschnitten ist.

Die sich aus dem obigen ergebenden Eigenschaften des nichtrelativistischen Propagators sollen nun in einem Satz zusammengestellt werden:

**Satz 1.** *Es gilt*

$$\Delta_{nr.}^+(f) = \frac{i\lambda^{3/2}}{2m} \hat{h}(m)f(0) \quad .$$

*Für den Kern gilt entsprechend*

$$\Delta_{nr.}^+(x) = \frac{i\lambda^{3/2}}{2m} e^{-imx^0} \delta(\vec{x}) \quad .$$

*Die nächsthöheren Ausdrücke sind um zwei Ordnungen in  $\lambda$  kleiner.*

Dieser Ausdruck ist nun der Startpunkt zur Berechnung von Matrixelementen zwischen nichtrelativistischen Elektronen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Skalierung natürlich auch rein im Ortsraum hätte durchgeführt werden können. Der Ortsraumausdruck für  $\Delta^+$  (siehe etwa [Sch95]) ist allerdings kompliziert genug, um hier auf eine Darstellung zu verzichten.

## 2.2 Berechnung des magnetischen Momentes des Elektrons im Minkowskiraum mit der Zweipunktfunktion

Die Form der S-Matrix 1.Ordnung als normalgeordneter Wechselwirkungshamiltonian wird in jedem Lehrbuch über QFT hergeleitet. Das Folgende schließt in der Notation an an die Darstellung in [Sch95].

Es soll nun direkt zu ihrer Auswertung zwischen nichtrelativistischen Teilchen übergegangen werden.

Die S-Matrix 1.Ordnung lautet zwischen den ein- bzw. auslaufenden Zuständen  $\Psi|0\rangle$

$$\begin{aligned} S_{in/out}^{(1)} &= ie \int d^4y \langle 0|\Psi(f) : \bar{\Psi}(y)\gamma^\mu\Psi(y) : A_\mu(y)\Psi^\dagger(f)|0\rangle \quad (2.20) \\ &= ie \int d^4x d^4y d^4z \langle 0|f^\dagger(x)\Psi(x) : \bar{\Psi}(y)\gamma^\mu\Psi(y) : A_\mu(y)\Psi^\dagger(z)f(z)|0\rangle \quad . \end{aligned}$$

Dabei wurden die Standardbezeichnungen  $\Psi$  für die Feldoperatoren (hier als Distributionen verstanden) und  $|0\rangle$  für den Vakuumzustand verwendet.  $f$  bezeichnet den Testspinor, dessen explizite Gestalt später (auf Seite 12 und weiter in (2.57)) angegeben werden wird.

Mit  $\bar{\Psi} = \Psi^+ + \Psi^-$  ergeben sich die Kontraktionen

$$\{\Psi^-(x), \bar{\Psi}^+(y)\} = -iS^+(x-y) \quad \text{und} \quad \{\Psi^-(y), \bar{\Psi}^+(z)\} = -iS^+(y-z)$$

$$\implies S_{in/out}^{(1)} = -ie \int d^4x d^4y d^4z f^\dagger(x)S^+(x-y)\gamma^\mu A_\mu(y)S^+(y-z)\gamma^0 f(z) \quad . \quad (2.21)$$

Die S-Matrix soll nun zwischen niederenergetischen Teilchen ausgewertet werden. Dies wird wieder durch Skalierung der Testfunktionen, oder, wie wir im vorigen Abschnitt gelernt haben, durch entsprechende Skalierung der Zweipunktfunktion erreicht. Daher schreibt sich die *nichtrelativistische S-Matrix* als

$$S_{nr.(in/out)}^{(1)} = -ie \int d^4x d^4y d^4z f^\dagger(x)S_{nr.}^+(x-y)\gamma^\mu A_\mu(y)S_{nr.}^+(y-z)\gamma^0 f(z) \quad . \quad (2.22)$$

Dabei ist  $S_{nr}^+$  wieder der führende Anteil von  $S_\lambda^+$ . Unter Beachtung von

$$S^+(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta^+(x)$$

erhalten wir für  $S_\lambda^+$

$$S_\lambda^+ = (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m) \frac{1}{\lambda^{3/2}} \Delta^+(x^0, \vec{x}) \quad (2.23)$$

$$= (i\gamma^0 \partial_0 + i\lambda\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m) \frac{1}{\lambda^{3/2}} \Delta^+(x^0, \vec{x}) \quad (2.24)$$

$$= (i\gamma^0 \partial_0 + i\lambda\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m) \left( \frac{i\lambda^{3/2}}{2m} e^{-imx^0} \delta(\vec{x}) + O(\lambda^{7/2}) \right) \quad (2.25)$$

Da die Zweipunktfunktion hier von zwei Variablen abhängt, müssen noch zwei weitere Punkte beachtet werden. Erstens wird  $\Delta^+(x-y)$  nur über  $x$  verschmiert (entsprechend  $\Delta^+(y-z)$  nur über  $z$ ). Deshalb darf auch nur die  $x$ -Variable (oder eben  $z$ ) skaliert werden, und es gilt dann

$$\Delta_\lambda^+(x-y) = \frac{1}{\lambda^{3/2}} \Delta^+(x^0 - y^0, \vec{x} - \vec{y}) = \frac{i\lambda^{3/2}}{2m} e^{-im(x^0 - y^0)} \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) + O(\lambda^{7/2})$$

und entsprechendes für  $\Delta_\lambda^+(y-z)$ .

Zweitens soll die Ableitung in  $\gamma^\mu \partial_\mu \Delta^+(x-y)$  bzw.  $\Delta^+(y-z)$  auf eine einzige Variable (nämlich die der jeweiligen Testfunktion) umgeschrieben werden, so daß

$$S^+(x-y) = (i\gamma^\mu \partial_{\mu,x} + m)\Delta^+(x-y) \quad \text{und} \quad S^+(y-z) = (-i\gamma^\mu \partial_{\mu,z} + m)\Delta^+(y-z) \quad .$$

Jetzt können die zur Berechnung der S-Matrix (2.22) notwendigen Größen  $S_\lambda^+$  aus (2.25) berechnet werden.

$$\begin{aligned} S_\lambda^+(x-y) &= (i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + i\lambda\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m) \left( \frac{i\lambda^{3/2}}{2m} e^{-im(x^0 - y^0)} \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) + O(\lambda^{7/2}) \right) \\ &= i \frac{\lambda^{3/2}}{2} \gamma^0 \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) e^{-im(x^0 - y^0)} \\ &\quad + i \frac{\lambda^{3/2}}{2} \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) e^{-im(x^0 - y^0)} \\ &\quad - \frac{\lambda^{5/2}}{2m} \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) e^{-im(x^0 - y^0)} \\ &\quad + O(\lambda^{7/2}) \\ &= i \frac{\lambda^{3/2}}{2} (1 + \gamma^0) \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) e^{-im(x^0 - y^0)} \\ &\quad - \frac{\lambda^{5/2}}{2m} \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) e^{-im(x^0 - y^0)} \\ &\quad + O(\lambda^{7/2}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Genauso ergibt sich

$$\begin{aligned} S_\lambda^+(y-z) &= i \frac{\lambda^{3/2}}{2} (1 + \gamma^0) \delta(\lambda\vec{y} - \vec{z}) e^{-im(y^0 - z^0)} \\ &\quad + \frac{\lambda^{5/2}}{2m} \gamma^i \frac{\partial}{\partial z^i} \delta(\lambda\vec{y} - \vec{z}) e^{-im(y^0 - z^0)} \\ &\quad + O(\lambda^{7/2}) \quad . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Unter sofortiger Annahme, daß  $A^0 = 0$ , also  $\gamma^\mu A_\mu \rightarrow \gamma^j A_j$  ergibt Einsetzen in die S-Matrix (2.22) für die untersten Ordnungen in  $\lambda$

$$S_{\lambda(in/out)}^{(1)} = -ie \int d^4x d^4y d^4z f^\dagger(x) (\Xi^j + \Lambda^j + O(\lambda^5)) A_j(y) e^{-im(x^0 - z^0)} \gamma^0 f(z) \quad (2.28)$$

mit

$$\Xi^j := -\frac{\lambda^3}{4} (1 + \gamma^0) \gamma^j (1 + \gamma^0) \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) \quad (2.29)$$

$$\Lambda^j := \frac{i\lambda^4}{4m} \left( - (1 + \gamma^0) \gamma^j \gamma^i \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \right. \quad (2.30)$$

$$\left. + \gamma^i \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \frac{\partial}{\partial z^i} \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) \gamma^j (1 + \gamma^0) \right) \quad (2.31)$$

Mit  $\gamma^0 \gamma^j = -\gamma^j \gamma^0$  und  $\gamma^0 \gamma^j \gamma^0 = -\gamma^j$  verschwindet der  $\lambda$ -unabhängige Beitrag  $\Xi$  im Falle  $A^0 = 0$ . Die führenden Beiträge von  $S_{\lambda(in/out)}^{(1)}$  schreiben sich dann mit  $(1 + \gamma^0) \gamma^j \gamma^i = \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0)$  als

$$S_{\lambda(in/out)}^{(1)} = \frac{\lambda^4 e}{4m} \int d^4x d^4y d^4z f^\dagger(x) \left( \gamma^i \gamma^j \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \frac{\partial}{\partial z^i} \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) \right. \\ \left. - \gamma^j \gamma^i \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \right) A_j(y) (1 + \gamma^0) e^{-im(x^0 - z^0)} \gamma^0 f(z) \\ + O(\lambda^2) \quad , \quad (2.32)$$

und nach Antivertauschung von  $\gamma^i \gamma^j$

$$S_{\lambda(in/out)}^{(1)} = \frac{\lambda^4 e}{4m} \int d^4x d^4y d^4z f^\dagger(x) \left( \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \frac{\partial}{\partial z^i} \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) \right. \quad (2.33)$$

$$\left. + \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \right) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) e^{-im(x^0 - z^0)} \gamma^0 f(z) \quad (2.34)$$

$$- \frac{\lambda^4}{2m} \int d^4x d^4y d^4z f^\dagger(x) \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \frac{\partial}{\partial z^j} \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) A_j(y) (1 + \gamma^0) e^{-im(x^0 - z^0)} \gamma^0 f(z) \quad (2.35)$$

$$+ O(\lambda^2) \quad . \quad (2.36)$$

Die komplette Testfunktion  $f(x)$  soll nun wie in (2.5) als Produkt von raum- und zeitabhängigem Anteil  $h(x^0) f(\vec{x})$  angesetzt werden, wobei  $f(\vec{x})$  den gesamten Spinorcharakter übernehmen soll und  $h(x^0)$  eine rein skalare Funktion ist. Beide Teile müssen nun einzeln für sich normiert werden: Es ist also  $\int dx^0 \bar{h}(x^0) h(x^0) = 1$ ,  $\int d^3x \bar{f}(\vec{x}) f(\vec{x}) = 1$  Mit

$$C := \int dx^0 dz^0 e^{-im(x^0 - z^0)} h(x^0) h(z^0) \quad (2.37)$$

ergibt sich für (2.33)

$$C \frac{\lambda^4 e}{4m} \int d^3x d^4y d^3z f^\dagger(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \frac{\partial}{\partial z^i} \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{z}) \quad (2.38)$$

$$= -C \frac{\lambda^4 e}{4m} \int d^3x d^4y d^3z f^\dagger(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \frac{\partial}{\partial z^i} \gamma^0 f(\vec{z}) \quad (2.39)$$

$$= -C \frac{\lambda^4 e}{4m} \int d^4y f^\dagger(\lambda \vec{y}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \frac{\partial}{\partial \lambda y^i} \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (2.40)$$

$$= -C \frac{\lambda^3 e}{4m} \int d^4y f^\dagger(\lambda \vec{y}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \frac{\partial}{\partial y^i} \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad , \quad (2.41)$$

für (2.34)

$$C \frac{\lambda^4 e}{4m} \int d^3 x d^4 y d^3 z f^\dagger(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{z}) \quad (2.42)$$

$$= -C \frac{\lambda^4 e}{4m} \int d^3 x d^4 y d^3 z \frac{\partial}{\partial x^i} f^\dagger(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{z}) \quad (2.43)$$

$$= -C \frac{\lambda^4 e}{4m} \int d^4 y \frac{\partial}{\partial \lambda y^i} f^\dagger(\lambda \vec{y}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (2.44)$$

$$= -C \frac{\lambda^3 e}{4m} \int d^4 y \frac{\partial}{\partial y^i} f^\dagger(\lambda \vec{y}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (2.45)$$

$$= C \frac{\lambda^3 e}{4m} \int d^4 y f^\dagger(\lambda \vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^i} A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (2.46)$$

$$+ C \frac{\lambda^3 e}{4m} \int d^4 y f^\dagger(\lambda \vec{y}) A_j(y) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \frac{\partial}{\partial y^i} \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad , \quad (2.47)$$

und für (2.35)

$$- C \frac{\lambda^4 e}{2m} \int d^3 x d^4 y d^3 z f^\dagger(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \lambda \vec{y}) \frac{\partial}{\partial z^j} \delta(\lambda \vec{y} - \vec{z}) A_j(y) (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(z) \quad (2.48)$$

$$= C \frac{\lambda^3 e}{2m} \int d^4 y f^\dagger(\lambda \vec{y}) A_j(y) (1 + \gamma^0) \frac{\partial}{\partial y^j} \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad . \quad (2.49)$$

Die Beiträge (2.41) und (2.47) kürzen sich nun heraus. Für (2.46) beachte man nun, daß  $\gamma^j \gamma^i = i \epsilon_{jik} \sigma^k \otimes \mathbf{1}_2 - \delta_{ji} \mathbf{1}_4$  (siehe Anhang A.2) und  $\epsilon_{jik} \partial_j A_i = -B_k$ , so daß

$$S_{\lambda in/out}^{(1)} = \frac{\lambda^3 C e}{4m} \left[ i \int d^4 y f^\dagger(\lambda \vec{y}) \sigma^k B_k \otimes \mathbf{1}_2 (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (2.50) \right.$$

$$+ \int d^4 y f^\dagger(\lambda \vec{y}) \partial_i A^i (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (2.51)$$

$$\left. - 2 \int d^4 y f^\dagger(\lambda \vec{y}) A^i \partial_i (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \right] \quad (2.52)$$

$$= \frac{C e}{4m} \left[ i \int d^4 y f^\dagger(\vec{y}) \sigma^k B_k \otimes \mathbf{1}_2 (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \quad (M.I)$$

$$+ \int d^4 y f^\dagger(\vec{y}) \partial_i A^i (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \quad (M.II)$$

$$\left. - 2 \lambda \int d^4 y f^\dagger(\vec{y}) A^i (y^0, \frac{\vec{y}}{\lambda}) \partial_i (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \right] \quad , \quad (M.III)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wieder durch Variablensubstitution entsteht.

Zur Veranschaulichung des Ergebnisses, und zum Vergleich mit dem durch herkömmliche Methoden gewonnenem<sup>3</sup> beachte man, daß in der Standarddarstellung der

$\gamma$ -Matrizen (Anhang A.2)  $\mathbf{1} + \gamma^0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Die aus der relativistischen Einteilchentheorie bekannte Reduktion der Wellenfunktion im n.r.Grenzfall

auf die oberen Komponenten erscheint in dieser Rechnung also durch die Matrix  $\mathbf{1} + \gamma^0$ , die die unteren beiden Komponenten der Testfunktion vernichtet.

Die Ausdrücke M.I-III sollen gleich zur Bestimmung des magnetischen Momentes

<sup>3</sup>z.B. [BD66]

in einem homogenen zeitunabhängigen B-Feld ausgewertet werden. In diesem Falle würde die  $y^0$ -Integration divergieren, da überhaupt keine zeitabhängigen Größen mehr im Intgranden auftauchen. Diese Divergenz ist natürlich unphysikalisch, da sie auf der idealisierten Annahme eines für alle Zeiten vollständig homogenen Feldes beruht. Sie wird dadurch beseitigt, indem man  $B(y)$  zu einem bestimmten Zeitpunkt ein- und danach wieder ausschaltet, wie es ja in Wirklichkeit auch geschehen würde. Im folgenden soll diese Art der Zeitabhängigkeit stillschweigend vorausgesetzt werden, wenn von einem homogenen Magnetfeld die Rede ist. Darüberhinaus soll bisweilen sogar angenommen werden, das Feld sei über einen Zeitraum der Länge 1 eingeschaltet, was einem Verzicht auf die Zeitintegration insgesamt hinausläuft.

Um den Ausdruck nun in eine leichter interpretierbare Form zu bringen, soll ein schwaches, homogenes Magnetfeld angenommen werden, so daß

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

Damit ergibt sich

$$\partial_i A^i = \frac{1}{2} \partial_i (\epsilon_{ijk} B_j r_k) \quad (2.53)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\partial_i B_j) r_k}_{=0, da B \text{ homogen}} + \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_j (\partial_i r_k)}_{=0, da \partial_i r_k = \delta_{ik}} \quad (2.54)$$

wogegen

$$2A^i \partial_i = \epsilon_{ijk} B_j r_k \partial_i = \epsilon_{kij} B_j r_k \partial_i \quad (2.55)$$

$$= -i \vec{B} \times \vec{L} \quad (2.56)$$

Hierbei ist  $\vec{L} = \vec{r} \times i\vec{\nabla}$  die gewohnte quantenmechanische Drehimpulsobservable.

Beachtet man noch, daß der Spin  $\vec{S}$  mit den Matrizen  $\vec{\sigma}$  durch  $\vec{\sigma} = 2\vec{S}$  verknüpft ist, so erhalten wir

$$S_{in/out}^{(1)} = iC \int d^4 y f^\dagger(\vec{y}) \left[ \frac{e}{4m} \vec{L} + \frac{e}{2m} \vec{S} \right] \vec{B} (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \quad .$$

In dieser Schreibweise ist das gyromagnetische Verhältnis  $g=2$  als Quotient der Koeffizienten von Spin und Drehimpuls leicht abzulesen.

Zur Definition des magnetischen Momentes  $\mu$  soll jetzt das Matrixelement zwischen ruhenden Teilchen ausgewertet werden.

Zunächst einige Bemerkungen zu der Konstanten C (2.37). Man erkennt sofort, daß C nur aus dem Quadrat der Fouriertransformierten am Punkte m besteht. Mit der unproblematischen Zusatzannahme  $\hat{h}(m) = 1$  reduziert sich C auf  $C=1$ .

Weiterhin braucht der Anteil M.II wegen der bestehenden Eichfreiheit nicht mitbeachtet zu werden. Die Anteile M.I und M.III sind aber schon vorbereitet zum Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 0$  ruhender ein- und auslaufender Elektronen:

M.I ist insgesamt wegen der Bedingung  $B =$  räumlich konstant von  $\lambda$  unabhängig. Da das Vektorpotential in M.III höchstens linear in  $\vec{y}$  ist, die Testfunktionen aber  $C_0^\infty$  ist M.III insgesamt linear in  $\lambda$  und verschwindet im limes. Es gilt somit:

**Satz 2 (Das Matrixelement zwischen ruhenden Teilchen).** *Es sei  $f \in C_0^\infty$  eine normierte Testfunktion mit  $\int dk \hat{f} \hat{f} = 1$  und  $f_\lambda(\vec{y}) := \lambda^{\frac{3}{2}} f(\lambda \vec{y})$  eine Folge. Das Vektorpotential  $A$  sei so gewählt, daß  $\vec{B}(y)$  konstant sei und über einen Zeitraum der Länge 1 eingeschaltet werde. Dann gilt für das S-Matrixelement 1. Ordnung:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S^{(1)}(f_\lambda, \vec{B}) = \frac{ie}{4m} \int d^3 y f^\dagger(\vec{y}) \sigma^k B_k \otimes \mathbf{1}_2 (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \quad .$$

Der Spinorcharakter der Testfunktionen sei nun folgendermaßen spezifiziert: Es sei

$$f^A(\vec{y}) = f(\vec{y})u_s^A \quad \text{mit} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{usw.} \quad , \quad (2.57)$$

wobei  $f$  eine normale Testfunktion mit  $\int dk \bar{f} \hat{f} = 1$  sei, wie sie in Kapitel 2.2 schon vorkam. Nach Einsetzen

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S^{(1)}(f_\lambda, \vec{B}) = \frac{ie}{4m} \int d^3y \bar{f}(\vec{y}) u_s^\dagger \sigma^k B_k \otimes \mathbf{1}_2 (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 u_s f(\vec{y}) \quad (2.58)$$

erkennt man sofort, daß

1. nur für  $s=1,2$  ein Beitrag zu  $S$  entsteht (nur von den „oberen Komponenten“), und
2. nur  $\sigma_3$  einen Beitrag liefert, da diese als einzige von den Pauli-Matrizen Diagonalelemente besitzt<sup>4</sup>.

Es soll also im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß  $\vec{B}$  in  $z$ -Richtung orientiert ist, so daß  $B := |B| = B_3$ . Damit folgt :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_{in/out}^{(1)} = \frac{ie}{2m} B \int d^3y \bar{f} f = \frac{ie}{2m} B_3 \quad \text{für } s=1 \quad (2.59)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_{in/out}^{(1)} = -\frac{ie}{2m} B \int d^3y \bar{f} f = -\frac{ie}{2m} B_3 \quad \text{für } s=2 \quad (2.60)$$

Von diesem Ausdruck startend, läßt sich nun eine allgemeine Definition des magnetischen Momentes herleiten.

**Definition 2 (magnetisches Moment).** Die Größe

$$\mu := \frac{2}{i} \left. \frac{\delta S^{(1)}(f_\lambda, B)}{\delta B} \right|_{\lambda \rightarrow 0} ,$$

gemessen in einem schwachen homogenen Magnetfeld  $B$ , ist das magnetische Moment des Elektrons.

*Bemerkungen*

1. Die Definition ergibt sich natürlicherweise aus der Beobachtung, daß  $S^{(1)}$  im wesentlichen der zeitliche Mittelwert des Erwartungswertes  $i \langle H_{int} \rangle$  des Wechselwirkungshamiltonoperators der Einteilchentheorie ist. Die Funktionalableitung sowie die Division durch  $i$  sind also einfach Tricks, den *Wechselwirkungskoeffizienten* aus dem Ausdruck zu filtern.
2. Der Faktor 2 muß hier explizit hinzugefügt werden, da während der Rechnung immer mit  $\vec{\sigma}_k = 2\vec{S}_k$  gearbeitet wurde. Das Eigenmoment  $\mu$  muß aber selbstverständlich über den Eigendrehimpuls  $\vec{S}$  definiert werden, um in Korrespondenz zur klassischen Theorie zu bleiben.
3. Die Konsistenz mit dem auf gewöhnliche Weise erzieltm Ergebnis ist gewährleistet:

$$\frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta B} \frac{ie}{2m} B = \frac{e}{m}$$

---

<sup>4</sup>Für eine beliebige  $4 \times 4$ -Matrix  $A$  ergibt  $u_s^\dagger A u_s$  natürlich genau das Diagonalelement  $A_{ss}$

## 2.3 Zusammenfassung

Es sind nun alle Bestimmungsstücke einer Auswertung der S-Matrix in eine Form gegossen, die sich auch auf gekrümmten Raumzeiten verallgemeinern läßt. Ein Vergleich der Ergebnisse mit den zu Beginn formulierten Zielen zeigt:

- Die S-Matrix in der Form (2.21) benutzt als zentrales Konstituens die Zweipunktfunktion im Ortsraum.
- Das in 2.1 verwendete Skalierungsverfahren ergibt eine tragfähige Definition des nichtrelativistischen bzw. Impuls-0 Grenzfalles im Ortsraum.
- Definition 2 des magnetischen Momentes nimmt direkt Bezug auf die auch in gekrümmter Raumzeit wohldefinierte S-Matrix und wird so auch im Allgemeinen vernünftig bleiben.

Damit soll jetzt also der Übergang zu gekrümmten Raumzeiten gewagt werden.



## Kapitel 3

# Das magnetische Moment auf gekrümmter Raumzeit

Die Berechnung des magnetischen Momentes des Elektrons soll nun auf gekrümmte Raumzeiten übertragen werden. Dazu bedarf es zuerst einer Einführung und Definition des grundlegenden Begriffes des Spinors auf einer Mannigfaltigkeit und einer Übertragung der für Tensoren gewohnten Begriffe des Zusammenhanges, der kovarianten Ableitung und der Krümmung in Abschnitt 3.1. Soweit es der Rahmen zuläßt, werden die Verbindungen zur Tensorrechnung explizit untersucht. Danach erfolgt in 3.2 die Anwendung der so gewonnenen Begriffe auf die Robertson-Walker-Raumzeit, und die entsprechenden Wellengleichungen werden angegeben. In 3.3 werden Näherungslösungen für die spinorielle Klein-Gordon-Gleichung und für die Dirac-Gleichung erörtert und quantisiert, so daß der Begriff des adiabatischen Vakuums auf Spinorfelder verallgemeinert werden kann. Daraus soll dann die Zweipunktfunktion gewonnen werden, so daß in 3.4 die in Kapitel 2.2 vorgeführte Berechnung der S-Matrix in der Robertson-Walker-Raumzeit wiederholt werden kann.

### 3.1 Spinoren auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt müssen zunächst einmal die Fundamente für die Rechnung mit Spinoren auf Mannigfaltigkeiten gelegt werden. Im wesentlichen sind 3.1.1 - 3.1.3 eine kurze Zusammenfassung von [Lic64], siehe dazu auch [Dim82]. Die Beweise wurden, wo es vom Aufwand her möglich erschien, neu durchgerechnet und hier mit aufgenommen, da die Adaption des französischen Originals [Lic64] aus sprachlichen Gründen nicht jedermanns Sache ist.

Eine Erklärung der verwendeten Grundbegriffe aus der Differentialgeometrie usw. würde hier deutlich zu weit führen, siehe dafür z.B. [Nak90].

#### 3.1.1 Spin-Strukturen und -Zusammenhänge

Es sei also  $(\mathcal{M}, g)$  eine orientierbare, zeitorientierbare Lorentzmannigfaltigkeit.  $FM$  sei das Prinzipal- $\mathcal{L}_0$ -Bündel (Bündel von Orthonormalbasen) über  $\mathcal{M}$ , d.h. für  $\xi \in FM$  ist

$$\xi = (\xi_0, \dots, \xi_3) \quad \text{mit} \quad \xi_\alpha \in T_x M \quad \text{und} \quad g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \eta_{\alpha\beta} \quad .$$

Dabei bedeutet  $TM$  das zu  $FM$  assoziierte Faserbündel  $FM \times \mathcal{R}^4 / \mathcal{L}$ , also das Tangentialbündel.

Ein Vektorfeld  $v$  über  $\mathcal{M}$  ist ein Schnitt durch  $TM$ , m.a.W. eine glatte Abbildung

$v : \mathcal{M} \rightarrow TM$ , so daß  $v(x) \in T_x(\mathcal{M})$ . Ein Schnitt  $e : \mathcal{M} \rightarrow FM$  durch das Basisbündel definiert eine Tetradenbasis für  $TM$ , jedes  $v \in \mathcal{C}^\infty(TM)$  kann daher als  $v = v^\alpha e_\alpha$  ausgedrückt werden.

Eine Spin-Struktur ist gegeben durch ein Prinzipal- $Spin_0$ -Bündel  $SM$  und einen Homomorphismus  $p : SM \rightarrow FM$ . Dabei soll  $p$  den Basispunkt  $x$  und die Operation von  $Spin$  auf  $SM$  bzw.  $\mathcal{L}$  auf  $FM$  respektieren. Die Abbildung  $p$  ist also 2:1, da  $SM$  die universale Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $FM$  ist. Spinorfelder und Spintetraden werden wie bei Tensoren definiert: Eine Spintetrade  $E : \mathcal{M} \rightarrow SM$  ist ein Schnitt durch  $SM$ , ein Spinorfeld  $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow DM$  ist ein Schnitt durch das zu  $SM$  assoziierte Faserbündel  $DM$ . Die Menge der unendlich oft differenzierbaren Spinorfelder werde mit  $\mathcal{C}^\infty(DM)$  bezeichnet, analog ist  $\mathcal{C}^\infty(SM)$  definiert. Es gilt wieder  $\Psi = \Psi^A E_A$

Ist eine Spintetrade vorgegeben, so erhält man dazu eine Tetrade des Tangentialbündels durch  $e_\alpha = p \circ E_A$ . An dieser Stelle wird man bemerken, daß es keine Möglichkeit gibt, *Koordinatenbasen* für Spinoren zu definieren. Bei Tensoren gehen diese aus der Operation von  $Gl(4, R)$  auf die Tetradenbasisvektoren hervor. Für diese Matrizen gibt es aber keine Verallgemeinerungen auf Spinoren!

Die Dirac'schen  $\gamma$ -Matrizen werden auf beliebige Raumzeiten verallgemeinert, indem man die gewöhnlichen  $\gamma^\alpha$  des Minkowskiraumes als Komponenten eines  $\gamma$ -Feldes in Tetradenbasis auffaßt.

$$\gamma := \gamma^\alpha e_\alpha \quad \text{oder, mit Spinorindizes} \quad \gamma = \gamma^{\alpha A} e_\alpha E_A E^B \quad (3.1)$$

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta} \quad . \quad (3.2)$$

Durch eine Metrik  $g$  wird ein Zusammenhang auf  $\mathcal{M}$  gegeben. Damit kann eine kovariante Ableitung von Tensorfeldern definiert werden und es gilt:

$$\nabla e_\alpha = \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} e^\gamma e_\beta \quad (3.3)$$

wobei die  $\Gamma^\beta_{\gamma\alpha} e^\gamma e_\beta$  die Komponenten des Zusammenhanges in Vierbeinbasis sind. Es folgt z.B. für einen Vektor  $v$  mit Komponenten  $v_\alpha$  für die  $\beta$ -Komponente der Ableitung

$$\nabla_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} v^\gamma \quad .$$

Ein Spin-Zusammenhang  $\omega$  ist der pull-back der Zusammenhangs-1-Form  $\Gamma$  auf das Spintetradenbündel  $SM$ . Ohne jetzt genauer auf die beteiligten Lie-Algebren einzugehen, sei zur Veranschaulichung nur folgendes Diagramm gezeigt:

$$\begin{array}{ccc} SM & \xrightarrow{p} & FM \\ \omega \downarrow & & \Gamma \downarrow \\ Lie Spin & \xrightarrow{\Lambda} & Lie \mathcal{L} \end{array}$$

Man definiert also  $\omega$  als  $\omega := \Lambda^{-1} \circ \Gamma \circ p$ , wobei  $\Lambda$  den Isomorphismus der beiden Lie-Algebren bedeutet.  $\omega \circ E = \Lambda^{-1} \circ \Gamma \circ p$  ist also eine *Lie Spin*-wertige 1-Form auf  $\mathcal{M}$ .

Hiermit wird eine kovariante Ableitung von Spinorfeldern definiert

$$\nabla E_A = \omega_\alpha{}^B{}_A e^\alpha E_B \quad (3.4)$$

und für die  $\beta$ -Komponente der Ableitung der B-ten Spinorkomponente gilt dann

$$\nabla_\beta \Psi^B = \partial_\beta \Psi^B = \omega_\beta{}^B{}_A \Psi^A \quad . \quad (3.5)$$

Für einen gemischten Spinor-Tensor beliebiger Stufe werden die Ableitungen so definiert, daß sie via Leibniz-Regel auf die bisher definierten kovarianten Ableitungen zurückgeführt werden können. Noch ein Beispiel zur Orientierung: Es sei  $\Xi = \Xi_\alpha^A{}_B$  ein Spinortensor der durch die Indexstruktur angegebenen Ordnung. Dann ist

$$\nabla_\alpha \Xi_\beta^A{}_B = \partial_\alpha \Xi_\beta^A{}_B - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \Xi_\gamma^A{}_B + \omega_\alpha^A{}_C \Xi_\beta^C{}_B - \Xi_\beta^A{}_C \omega_\alpha^C{}_B \quad .$$

Die wichtigsten Folgerungen aus der Konstruktion seien nun in Form von zwei Sätzen vorgestellt:

**Satz 3.** *Die Spinorzusammenhangskomponenten  $\omega$  lassen sich durch den tensoriellen Zusammenhang  $\Gamma$  und das  $\gamma$ -Feld ausdrücken und es gilt:*

$$\omega_\alpha^A{}_B = -\frac{1}{4} \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} \gamma^{\gamma A}{}_C \gamma_\beta^C{}_B$$

Ein Beweis würde den hiesigen Rahmen sprengen, der Leser sei nochmals an [Lic64] verwiesen.

**Satz 4.** *Das  $\gamma$ -Feld ist kovariant konstant:*

$$\nabla \gamma = 0$$

*Beweis.* Der Übersichtlichkeit halber seien die Spinorindizes weggelassen. Dann hat man

$$\nabla \gamma = \nabla_\alpha \gamma_\beta = \partial_\alpha \gamma_\beta - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \gamma_\gamma + \omega_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \omega_\alpha$$

Dabei ist  $\partial_\alpha \gamma_\beta = 0$  gemäß Definiton. Es bleibt also zu zeigen:

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \gamma_\gamma = \omega_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \omega_\alpha \quad .$$

Einsetzen von  $\omega_\alpha = -\frac{1}{4} \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} \gamma^\beta \gamma_\gamma$  ergibt

$$\omega_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \omega_\alpha = -\frac{1}{4} \left( \Gamma^\delta{}_{\alpha\epsilon} \gamma^\epsilon \gamma_\delta \gamma_\beta - \gamma_\beta \Gamma^\delta{}_{\alpha\epsilon} \gamma^\epsilon \gamma_\delta \right) \quad (3.6)$$

$$= -\frac{1}{4} \Gamma^\delta{}_{\alpha\epsilon} \left( \gamma^\epsilon \gamma_\delta \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma^\epsilon \gamma_\delta \right) \quad . \quad (3.7)$$

Mit  $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$  erhält an für

$$\gamma_\beta \gamma^\epsilon \gamma_\delta = \gamma^\epsilon \gamma_\delta \gamma_\beta + 2\gamma_\delta \eta_{\beta\epsilon} - 2\eta_{\beta\delta} \gamma^\epsilon \quad .$$

Damit folgt

$$\omega_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \omega_\alpha = -\frac{1}{2} \Gamma^\delta{}_{\alpha\epsilon} \left( -\gamma_\delta \eta_{\beta\epsilon} + \eta_{\beta\delta} \gamma^\epsilon \right) \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma^\delta{}_{\alpha\beta} \gamma_\delta - \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\alpha\epsilon} \gamma^\epsilon \quad (3.9)$$

$$= \Gamma^\delta{}_{\alpha\beta} \gamma_\delta \quad , \quad (3.10)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Antisymmetrie der  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  im ersten und dritten Index herrührt.  $\square$

**Bitensoren und Bispinoren** Bitensoren (siehe dazu [DB60]) sind Größen, die an zwei verschiedenen Raumzeitpunkten definiert sind. Als einfachstes Beispiel diene etwa das Produkt zweier Vektoren aus verschiedenen Tangentialräumen (oder Kotangentialräumen)  $C^\alpha{}_\beta(x, y) := A^\alpha(x) B_\beta(y)$ . Der Index  $\alpha$  gehört also zum Punkt

$x$ , und  $\beta$  zu  $y$ .

Entsprechend darf bei der kovarianten Ableitung nach  $x$

$$\nabla_{\gamma,x} C^\alpha{}_\beta(x,y) = \partial_{\gamma,x} C^\alpha{}_\beta(x,y) + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\delta}(x) C^\delta{}_\beta(x,y)$$

nur die Zusammenhangskomponente bzgl.  $x$  auftauchen.

Ebenso dürfen natürlich auch Kontraktionen nur über Indizes des gleichen Tangentialraumes durchgeführt werden. Da in den folgenden Rechnungen immer klar ist, welcher Index auf welcher Variablen definiert ist, sollen die Indizes selbst nicht weiter gekennzeichnet werden. So ist z.B. in  $A_\alpha(x) B^\alpha{}_\beta(x,y) C^\beta(y)$  offensichtlich, daß  $\alpha$  zu  $x$  und  $\beta$  zu  $y$  gehört.

Die Verallgemeinerung auf Tensoren beliebiger Stufe liegt ebenso auf der Hand wie die Verallgemeinerung auf Spinoren, und muß hier nicht noch explizit gemacht werden.

### 3.1.2 Die Krümmung des Spinzusammenhanges

Die Krümmung des Spinzusammenhanges ist analog zur Riemann'schen Krümmung definiert.

**Definition 3.** *Die 2-Form*

$$\Pi^A{}_B := d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B$$

heißt *Spin-Krümmungs-2-Form*.

Die Komponenten  $P^A{}_B{}_{\alpha\beta}$  von  $\Pi^A{}_B$  heißen *Spin-Krümmungstensor*.

**Satz 5.** *Der Spin-Krümmungstensor kann durch*

$$P^A{}_B{}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \omega_\beta - \partial_\beta \omega_\alpha + \omega_\alpha \omega_\beta - \omega_\beta \omega_\alpha - \omega_\gamma (\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha})$$

aus den Zusammenhangskomponenten berechnet werden.

*Beweis.* Mit

$$\omega^A{}_B = \omega_\alpha{}^A{}_B e^\alpha$$

ergibt sich

$$\Pi^A{}_B = \partial_\beta \omega_\alpha{}^A{}_B e^\beta \wedge e^\alpha + \omega_\alpha{}^A{}_B d e^\alpha + \omega_\beta{}^A{}_C \omega_\alpha{}^C{}_B e^\beta \wedge e^\alpha$$

Einsetzen der Torsionsfreiheitsbedingung

$$d e^\alpha + \Gamma^\alpha{}_\beta e^\beta \wedge e^\alpha = 0 \implies d e^\alpha = -\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} e^\gamma \wedge e^\beta$$

ergibt

$$\Pi^A{}_B = (\partial_\beta \omega_\alpha{}^A{}_B + \omega_\beta{}^A{}_C \omega_\alpha{}^C{}_B - \omega_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}) e^\beta \wedge e^\alpha.$$

Durch Einsetzen der Definition des Dachproduktes

$$e^\beta \wedge e^\alpha = e^\beta \otimes e^\alpha - e^\alpha \otimes e^\beta$$

ergibt sich die Behauptung. □

**Satz 6.** *Der Spin-Krümmungstensor hängt über*

$$P^A{}_B{}_{\beta\alpha} = -\frac{1}{4} R^\gamma{}_{\delta\beta\alpha} (\gamma_\gamma \gamma^\delta)^A{}_B$$

mit dem Riemanntensor zusammen.

*Beweis.* Zunächst erinnere man sich an die Formel für den Riemann-Tensor in Vierbeinbasis (z.B.[Nak90])

$$R^\gamma{}_{\delta\beta\alpha} = \partial_\beta \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} - \partial_\alpha \Gamma^\gamma{}_{\beta\delta} + \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\delta} \Gamma^\gamma{}_{\beta\epsilon} - \Gamma^\epsilon{}_{\beta\delta} \Gamma^\gamma{}_{\alpha\epsilon} - (\Gamma^\epsilon{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\beta}) \Gamma^\gamma{}_{\epsilon\delta} \quad (3.11)$$

Gemäß Satz 3 ist

$$\omega_\alpha{}^A{}_B = -\frac{1}{4} \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} (\gamma_\gamma \gamma^\delta)^A{}_B$$

Man erhält also sofort:

$$\partial_\beta \omega_\alpha - \partial_\alpha \omega_\beta = -\frac{1}{4} (\partial_\beta \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} - \partial_\alpha \Gamma^\gamma{}_{\beta\delta}) \gamma_\gamma \gamma^\delta \quad (3.12)$$

und

$$\omega_\gamma (\Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{4} \Gamma^\gamma{}_{\epsilon\delta} (\Gamma^\epsilon{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\beta}) \gamma_\gamma \gamma^\delta. \quad (3.13)$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\omega_\beta \omega_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta = -\frac{1}{4} (\Gamma^\epsilon{}_{\beta\delta} \Gamma^\gamma{}_{\alpha\epsilon} - \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\delta} \Gamma^\gamma{}_{\beta\epsilon}) \gamma_\gamma \gamma^\delta \quad (3.14)$$

Wir haben einerseits

$$\omega_\beta \omega_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta = \frac{1}{16} \gamma_\gamma \gamma^\delta \gamma_\epsilon \gamma^\eta (\Gamma^\gamma{}_{\beta\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\eta} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\beta\eta}) \quad (3.15)$$

und andererseits durch Umbenennen der Indizes

$$\omega_\beta \omega_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta = -\frac{1}{16} \gamma_\epsilon \gamma^\eta \gamma_\gamma \gamma^\delta (\Gamma^\gamma{}_{\beta\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\eta} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\beta\eta}). \quad (3.16)$$

Addition der Ausdrücke ergibt dann

$$2(\omega_\beta \omega_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta) = \frac{1}{16} [\gamma_\gamma \gamma^\delta, \gamma_\epsilon \gamma^\eta] (\Gamma^\gamma{}_{\beta\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\eta} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\beta\eta}). \quad (3.17)$$

Mit

$$\gamma_\gamma \gamma^\delta \gamma_\epsilon \gamma^\eta = \gamma_\epsilon \gamma^\eta \gamma_\gamma \gamma^\delta - 2\eta_\gamma{}^\eta \gamma_\epsilon \gamma^\delta + 2\eta^{\eta\delta} \gamma_\epsilon \gamma_\gamma - 2\eta_{\gamma\epsilon} \gamma^\delta \gamma^\eta + 2\eta^\delta{}_\epsilon \gamma_\gamma \gamma^\eta$$

folgt

$$[\gamma_\gamma \gamma^\delta, \gamma_\epsilon \gamma^\eta] = 2 (\eta_\gamma{}^\eta \gamma_\epsilon \gamma^\delta - \eta^{\eta\delta} \gamma_\epsilon \gamma_\gamma + \eta_{\gamma\epsilon} \gamma^\delta \gamma^\eta - \eta^\delta{}_\epsilon \gamma_\gamma \gamma^\eta) \quad (3.18)$$

und insgesamt

$$(\omega_\beta \omega_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta) = \frac{1}{16} (\eta_\gamma{}^\eta \gamma_\epsilon \gamma^\delta - \eta^{\eta\delta} \gamma_\epsilon \gamma_\gamma + \eta_{\gamma\epsilon} \gamma^\delta \gamma^\eta - \eta^\delta{}_\epsilon \gamma_\gamma \gamma^\eta) (\Gamma^\gamma{}_{\beta\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\eta} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\beta\eta}). \quad (3.19)$$

Dieser Ausdruck zerfällt in vier Teile, die insgesamt das gewünschte Ergebnis liefern:

1.

$$\gamma_\epsilon \gamma^\delta (\Gamma^\gamma{}_{\beta\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\gamma} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\delta} \Gamma^\epsilon{}_{\beta\gamma}) \quad (3.20)$$

$$= \gamma_\gamma \gamma^\delta (\Gamma^\epsilon{}_{\beta\delta} \Gamma^\gamma{}_{\alpha\epsilon} - \Gamma^\epsilon{}_{\alpha\delta} \Gamma^\gamma{}_{\beta\epsilon}) \quad (3.21)$$

durch einfaches Umbenennen der Indizes.

2.

$$-\gamma_\epsilon \gamma_\gamma (\Gamma^\gamma_{\beta\delta} \Gamma^\epsilon_{\alpha\delta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\delta} \Gamma^\epsilon_{\beta\delta}) \quad (3.22)$$

$$= -\gamma_\epsilon \gamma^\gamma (\Gamma_{\gamma\beta\delta} \Gamma^\epsilon_{\alpha\delta} - \Gamma_{\gamma\alpha\delta} \Gamma^\epsilon_{\beta\delta}) \quad (3.23)$$

$$= -\gamma_\gamma \gamma^\delta (\Gamma_{\delta\beta\epsilon} \Gamma^\gamma_{\alpha\epsilon} - \Gamma_{\delta\alpha\epsilon} \Gamma^\gamma_{\beta\epsilon}) \quad (3.24)$$

$$(3.25)$$

ebenfalls durch Umbenennen der entsprechenden Indizes. Durch Ausnutzung der Antisymmetrie der Rotationskoeffizienten im ersten und dritten Index ergibt sich schließlich

$$\gamma_\gamma \gamma^\delta (\Gamma^\epsilon_{\beta\delta} \Gamma^\gamma_{\alpha\epsilon} - \Gamma^\epsilon_{\alpha\delta} \Gamma^\gamma_{\beta\epsilon}) \quad (3.26)$$

3. Genauso ergeben

$$\gamma^\delta \gamma^\eta (\Gamma^\gamma_{\beta\delta} \Gamma_{\gamma\alpha\eta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\delta} \Gamma_{\gamma\beta\eta})$$

und

$$-\gamma_\gamma \gamma^\eta (\Gamma^\gamma_{\beta\delta} \Gamma^\delta_{\alpha\eta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\delta} \Gamma^\delta_{\beta\eta})$$

jeweils

$$\gamma_\gamma \gamma^\delta (\Gamma^\epsilon_{\beta\delta} \Gamma^\gamma_{\alpha\epsilon} - \Gamma^\epsilon_{\alpha\delta} \Gamma^\gamma_{\beta\epsilon})$$

womit sich insgesamt die Behauptung ergibt.  $\square$

**Satz 7.** Für die Nichtvertauschbarkeit von kovarianten Ableitungen erhält man wie bei Tensoren

$$(\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) \Psi^A = P^A_{B\beta\alpha} \Psi^B \quad .$$

*Beweis.* Einfaches Nachrechnen genügt:

$$(\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) \Psi^A = (\partial_\beta \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta) \Psi^A \quad (3.27)$$

$$- (\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \partial_\gamma - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma) \Psi^A \quad (3.28)$$

$$+ (\omega_\beta \partial_\alpha - \omega_\alpha \partial_\beta)^A_B \Psi^B \quad (3.29)$$

$$+ (\partial_\beta \omega_\alpha - \partial_\alpha \omega_\beta)^A_B \Psi^B \quad (3.30)$$

$$- (\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \omega_\gamma - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \omega_\gamma)^A_B \Psi^B \quad (3.31)$$

$$+ (\omega_\beta \omega_\alpha - \omega_\alpha \omega_\beta)^A_B \Psi^B \quad (3.32)$$

ergibt mit  $\partial_\beta \omega_\alpha = (\partial_\beta \omega_\alpha) + \omega_\alpha \partial_\beta$

$$= [(\partial_\beta \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta) - (\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) \partial_\gamma] \Psi^A + P^A_{B\beta\alpha} \Psi^B \quad (3.33)$$

Nun folgt aber aus

$$0 = d^2 \Psi^A = (\partial_\beta \partial_\alpha \Psi^A) e^\beta \wedge e^\alpha - (\partial_\beta \Psi^A) \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} e^\gamma \wedge e^\alpha \quad (3.34)$$

$$= e^\beta \otimes e^\alpha [(\partial_\beta \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta) - (\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) \partial_\gamma] \Psi^A \quad (3.35)$$

womit man die Behauptung erhalten hat.  $\square$

**Satz 8.** Für die Kontraktion des Spin-Krümmungstensors mit  $\gamma$ -Matrizen über ihre Vektorindizes gilt:

$$\gamma^\beta \gamma^\alpha P^A_{B\beta\alpha} = -\frac{1}{2} R \delta^A_B \quad ,$$

wobei  $R$  den Krümmungsskalar bedeutet.

*Beweis (nach [Lic64]).* Man definiere folgenden Spinor-Tensor (Spinorindizes werden im folgenden unterdrückt):

$$T^\alpha := R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta$$

Aus der 1.Bianchi-Identität für den Riemann-Tensor

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} = 0$$

folgt

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}(\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta + \gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\beta + \gamma^\delta\gamma^\beta\gamma^\gamma) = 0 \quad (3.36)$$

Antivertauschen von  $\gamma^\delta$  und  $\gamma^\beta$  im 2.Summanden ergibt

$$T^\alpha - R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\delta + 2R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\eta^{\delta\beta}\gamma^\gamma + R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma^\delta\gamma^\beta\gamma^\gamma = 0 \quad (3.37)$$

Wegen  $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma}$  wird aus dem letzten Anteil

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\delta = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma}\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\delta = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma^\delta\gamma^\beta\gamma^\gamma$$

Insgesamt bekommt man also

$$T^\alpha - 2R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\delta + 2R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\eta^{\delta\beta}\gamma^\gamma = 0 \quad (3.38)$$

Mit

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\delta = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta + 2R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\eta^{\gamma\beta}\gamma^\delta$$

folgt

$$3T^\alpha - 4R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\eta^{\gamma\beta}\gamma^\delta + 2R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\eta^{\delta\beta}\gamma^\gamma = 0 \quad (3.39)$$

Aus

$$2R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\eta^{\delta\beta}\gamma^\gamma = -2R^\alpha_{\beta\delta\gamma}\eta^{\delta\beta}\gamma^\gamma = -2R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\eta^{\gamma\beta}\gamma^\delta$$

erhält man dann

$$T^\alpha = 2R^\alpha_{\delta}\gamma^\delta \quad , \quad (3.40)$$

wobei mit  $R_{\alpha\delta}$  der Ricci-Tensor eingeführt wurde. Nun folgt

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\gamma_\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = \gamma_\alpha T^\alpha = 2R_{\alpha\delta}\gamma^\alpha\gamma^\delta \quad (3.41)$$

Aus der Symmetrieeigenschaft des Ricci-Tensors ergibt sich

$$R_{\alpha\delta}\gamma^\alpha\gamma^\delta = R_{\delta\alpha}\gamma^\alpha\gamma^\delta = -R_{\alpha\delta}\gamma^\alpha\gamma^\delta + 2R_{\delta\alpha}\eta^{\alpha\delta}$$

also

$$2R_{\alpha\delta}\gamma^\alpha\gamma^\delta = 2R$$

und damit

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = 2R \quad (3.42)$$

Die Behauptung folgt jetzt durch Einsetzen:

$$\gamma^\beta\gamma^\alpha P^A_{B\beta\alpha} = -\frac{1}{4}R^\gamma_{\delta\beta\alpha}\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma_\gamma\gamma^\delta \quad (3.43)$$

$$= -\frac{1}{4}R_{\gamma\delta\beta\alpha}\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\gamma\gamma^\delta \quad (3.44)$$

$$= -\frac{1}{4}R_{\beta\alpha\gamma\delta}\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\gamma\gamma^\delta \quad (3.45)$$

(aufgrund der Symmetrie des Riemann-Tensors in den so vertauschten Indizes)

$$= -\frac{1}{2}R \quad (3.46)$$

□

### 3.1.3 Der Dirac- und der spinorielle Klein-Gordon- Operator

Die Dirac-Gleichung

$$(-i\gamma^\alpha \nabla_\alpha + m)\Psi^A = 0 \quad (3.47)$$

lautet ausgeschrieben

$$(-i\gamma^\alpha \partial_\alpha - i\gamma^\alpha \omega_\alpha + m)\Psi^A = 0 \quad (3.48)$$

Anwendung des adjugierten Operators auf den so gewonnenen Ausdruck ergibt

$$(i\gamma^\beta \nabla_\beta + m)(-i\gamma^\alpha \nabla_\alpha + m)\Psi^A = (\gamma^\beta \nabla_\beta \gamma^\alpha \nabla_\alpha + m^2)\Psi^A \quad (3.49)$$

$$= (\gamma^\beta \gamma^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha + m^2)\Psi^A \quad , \quad (3.50)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen der kovarianten Konstanz des  $\gamma$ -Feldes gilt. Die weitere Berechnung dieses Ausdrucks ergibt

$$\gamma^\beta \gamma^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha = \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\beta, \gamma^\alpha\} + \frac{1}{2}[\gamma^\beta, \gamma^\alpha]\right) \nabla_\beta \nabla_\alpha \quad (3.51)$$

$$= \eta^{\beta\alpha} \nabla_\beta \nabla_\alpha + \frac{1}{2} \gamma^\beta \gamma^\alpha (\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) \quad (3.52)$$

$$= \nabla^\alpha \nabla_\alpha + \frac{1}{2} \gamma^\beta \gamma^\alpha P^A_{\ B\beta\alpha} \quad (3.53)$$

$$= \square - \frac{1}{4}R \quad , \quad (3.54)$$

so daß man insgesamt als „Quadrat“ der Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\beta \nabla_\beta + m)(-i\gamma^\alpha \nabla_\alpha + m)\Psi^A = (\square + m^2 - \frac{1}{4}R)\Psi^A \quad (3.55)$$

die spinorielle Fassung der Klein-Gordon-Gleichung erhält. Dabei wurde mit

$$\square := \nabla^\alpha \nabla_\alpha = \nabla^\alpha (\partial_\alpha + \omega_\alpha) \quad (3.56)$$

$$= \partial^\alpha \partial_\alpha - \Gamma^{\gamma\alpha}_{\ \alpha} \partial_\gamma + \omega^\alpha \partial_\alpha + \partial^\alpha \omega_\alpha - \Gamma^{\gamma\alpha}_{\ \alpha} \omega_\gamma + \omega^\alpha \omega_\alpha \quad (3.57)$$

$$= \partial^\alpha \partial_\alpha - \Gamma^{\gamma\alpha}_{\ \alpha} \partial_\gamma \quad (3.58)$$

$$+ 2\omega^\alpha \partial_\alpha + (\partial^\alpha \omega_\alpha) - \Gamma^{\gamma\alpha}_{\ \alpha} \omega_\gamma + \omega^\alpha \omega_\alpha \quad (3.59)$$

der spinorielle Wellenoperator eingeführt. Man beachte insbesondere die vier im Vergleich zum skalaren Fall zusätzlich auftretenden Terme (also die letzte Zeile).

### 3.1.4 Regeln für die partielle Integration von Spinoren

**Satz 9.** Es seien  $\Theta_A$  ,  $\Lambda^{\beta A}_{\ B}$  und  $\Xi^\alpha_{\ \beta}{}^B$  Spinor-Tensoren der durch ihre Indizes angegebenen Stufe, und  $d\mu$  das Integrationsmaß auf der Mannigfaltigkeit  $\sqrt{g}d^4x$ . Dann ist

$$\int d\mu \Theta_A(x) \nabla_\alpha \Lambda^{\beta A}_{\ B}(x) \Xi^\alpha_{\ \beta}{}^B(x) \quad (3.60)$$

$$= - \int d\mu \nabla_\alpha \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}_{\ B}(x) \Xi^\alpha_{\ \beta}{}^B(x) \quad (3.61)$$

$$- \int d\mu \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}_{\ B}(x) \nabla_\alpha \Xi^\alpha_{\ \beta}{}^B(x) \quad (3.62)$$



*Beweis.* durch Nachrechnen:

$$\int d\mu \Theta_A(x) \nabla_\alpha \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} &= \int d^4x \sqrt{g(x)} \Theta_A(x) \\ &\quad \times (\partial_\alpha \Lambda^{\beta A}{}_B(x) + \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} \Lambda^{\gamma A}{}_B(x) + \omega_\alpha{}^A{}_D \Lambda^{\beta D}{}_B(x) - \Lambda^{\beta A}{}_D(x) \omega_\alpha{}^D{}_B) \\ &\quad \times \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Durch partielle Integration ergibt sich

$$- \int dx \partial_\alpha \sqrt{g(x)} \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.65)$$

$$- \int d\mu \partial_\alpha \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.66)$$

$$- \int d\mu \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \partial_\alpha \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.67)$$

$$+ \int d\mu \Theta_A(x) (\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} \Lambda^{\gamma A}{}_B(x) + \omega_\alpha{}^A{}_D \Lambda^{\beta D}{}_B(x) - \Lambda^{\beta A}{}_D(x) \omega_\alpha{}^D{}_B) \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.68)$$

Mit  $\partial_\alpha \sqrt{g} = \sqrt{g} \Gamma^\beta{}_{\beta\alpha}$  folgt durch einfaches Umordnen

$$\int d\mu \Theta_A(x) \nabla_\alpha \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.69)$$

$$= - \int d\mu \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \Gamma^\gamma{}_{\gamma\alpha} \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.70)$$

$$- \int d\mu \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \partial_\alpha \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.71)$$

$$+ \int d\mu \Theta_A(x) \Lambda^{\gamma A}{}_B(x) \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.72)$$

$$- \int d\mu \Theta_A(x) \nabla_\alpha \Lambda^{\beta A}{}_D(x) \omega_\alpha{}^D{}_B \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.73)$$

$$- \int d\mu \partial_\alpha \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.74)$$

$$+ \int d\mu \Theta_A(x) \omega_\alpha{}^A{}_D \Lambda^{\beta D}{}_B(x) \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.75)$$

Nun ergeben aber (3.70) bis (3.73) gerade

$$- \int d\mu \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \nabla_\alpha \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.76)$$

und (3.74) und (3.75) gerade

$$- \int d\mu \nabla_\alpha \Theta_A(x) \Lambda^{\beta A}{}_B(x) \Xi^\alpha{}_\beta{}^B(x) \quad (3.77)$$

Die Verallgemeinerung auf beliebige Kombinationen von Spinor-Tensoren beliebiger Stufe liegt auf der Hand.  $\square$

Hat man Integrale über verschiedene Variablen über Bitensoren - oder Spinoren, gilt Satz 9 einzeln für jede Variable mit *ihren* Indizes, wie man leicht nachrechnen kann.

## 3.2 Dirac- und Klein-Gordonfelder auf Robertson-Walker-Raumzeiten

Die vorhin eingeführten Kenngrößen sollen nun (Kapitel 3.2.2 und 3.2.3) für eine spezielle Beispielraumzeit ausgewertet werden. Insbesondere wird eine explizite Form der Dirac-Gleichung gesucht. Die Verbindung von relativer Unkompliziertheit mit physikalischer Bedeutsamkeit macht die „Robertson-Walker-Raumzeiten“ zu besonders geeigneten Exemplaren. Diese werden in 3.2.1 vorgestellt. Für eine ausführlichere Darstellung der dort nur angerissenen Themen, Begriffe und kosmologischen Hintergründe, siehe [Wal84], der auch dem Abschnitt 3.2.1 insgesamt zugrundeliegt.

### 3.2.1 Die Robertson-Walker-Raumzeit

Obwohl die Verteilung der (sichtbaren) Materie im Universum nach heutigem Beobachtungsstand starken Konzentrationsschwankungen unterliegt, so daß sich Haufen von Galaxienhaufen mit völlig leeren Räumen abwechseln, so sollte doch im allergrößten Maßstab das Universum im Ganzen homogen und isotrop sein. Die Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung bietet jedenfalls experimentell gute Anhaltspunkte für diese Annahme.

Akzeptiert man diese grundsätzliche Hypothese, so ergeben sich enorme Einschränkungen für die universale Hintergrundmetrik:

1. Die Raumzeit  $(\mathcal{M}, g)$  ist von der Form  $\mathcal{M} = \mathcal{R} \times \Sigma$ , oder, genauer gesagt existiert eine Einparameterfamilie von raumartigen Hyperflächen  $\Sigma_t$ , so daß für alle  $t$  der Schnitt  $\Sigma_t$  homogen ist.
2. Aus der Isotropie folgt die Konstanz der Krümmung  $\kappa$ , und daraus folgt wiederum:
3. Die Metrik  $g$  ist von der Robertson-Walker-Form

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (3.78)$$

Dabei hat  $\kappa$  die Werte  $\pm 1$  für positive bzw. negative räumliche Krümmung und  $\kappa = 0$  für keine Krümmung.

Insbesondere gilt für den flachen Fall  $\kappa = 0$ :

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.79)$$

Die Funktion  $a(t)$  muß für explizite kosmologische Modelle aus der Einstein-Gleichung berechnet werden. Zu ihrer Lösung wiederum bedarf es als input bestimmter Annahmen betreffend Natur und Menge des Materieinhaltes des Universums. Es zeigt sich z.B. für ein staubgefülltes Universum (Vernachlässigung thermischen Drucks, [Wal84]), daß die Relationen

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8}{3} \pi \rho \quad \text{und} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3} \pi \rho \quad (3.80)$$

bestehen, wobei  $\rho$  die durchschnittliche Massendichte des Universums bezeichnet. Die Hubble-„Konstante“  $\frac{\dot{a}}{a}$  ist eine observable Größe und wird derzeit in der Größenordnung  $\sim 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  angegeben. Die Massendichte  $\rho$  ist seit längerer Zeit Objekt von Forschung und Spekulation, da vor allem unklar bleibt, wie groß der Anteil dunkler, also unsichtbarer Materie im Universum zu veranschlagen ist. Für das im folgenden zugrundegelegte Modell ohne räumliche Krümmung genügt für

den Zweck dieser Arbeit die Feststellung, daß  $\frac{\ddot{a}}{a} \sim \frac{\dot{a}^2}{a^2}$  (3.80), und, (3.99) vorwegnehmend, die Krümmung  $R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \sim 12\frac{\dot{a}^2}{a^2}$  quadratisch in der Hubble-Konstanten ist.

### 3.2.2 Berechnung der Zusammenhänge und Krümmungen für die flache Robertson-Walker-Raumzeit

Die folgenden Berechnungen beschränken sich wie schon erwähnt auf den räumlich flachen Fall  $\kappa = 0$ , der allgemeine Fall wird in [Wel97] betrachtet.

#### Die Christoffelsymbole in Koordinatenbasis

Es gilt für die flache Robertson-Walker-Raumzeit:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right\}$$

mit (3.79)

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \delta_{\mu o} \delta_{\nu o} - a^2(t) \sum_i \delta_{i\mu} \delta_{i\nu} \\ g^{\mu\nu} &= \delta_{\mu o} \delta_{\nu o} - a^{-2}(t) \sum_i \delta_{i\mu} \delta_{i\nu} \end{aligned}$$

. Aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} &= -2a\dot{a} \sum_i \delta_{i\nu} \delta_{i\sigma} \delta_{o\mu} \\ \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} &= -2a\dot{a} \sum_i \delta_{i\mu} \delta_{i\sigma} \delta_{o\nu} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} &= -2a\dot{a} \sum_i \delta_{i\mu} \delta_{i\nu} \delta_{o\sigma} \end{aligned}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} (-2a\dot{a}) \left( \sum_i \delta_{i\nu} \delta_{i\sigma} \delta_{o\mu} + \sum_i \delta_{i\mu} \delta_{i\sigma} \delta_{o\nu} - \sum_i \delta_{i\mu} \delta_{i\nu} \delta_{o\sigma} \right) \\ &= a\dot{a} \delta_{o\rho} \sum_i \delta_{i\mu} \delta_{i\nu} + \frac{\dot{a}}{a} \sum_i (\delta_{i\rho} \delta_{i\nu} \delta_{o\mu} + \delta_{i\rho} \delta_{i\mu} \delta_{o\nu}) \end{aligned}$$

#### Transformation ins Vierbein

Die Transformationsmatrix ins Vierbein ist

$$A_{\alpha}^{\mu} = \delta_{\alpha o} \delta_{\mu o} + a^{-1}(t) \sum_i \delta_{\alpha i} \delta_{\mu i} \quad ,$$

so daß

$$A_{\alpha}^{\mu} A_{\beta}^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad .$$

Die (tensoriellen) Zusammenhangskomponenten in Vierbeinbasis sind gegeben durch

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = A_{\alpha}^{\mu} A^{-1}_{\lambda}{}^{\delta} \nabla_{\mu} A_{\beta}^{\lambda}$$

mit

$$\nabla_{\mu} A_{\beta}^{\lambda} = \partial_{\mu} A_{\beta}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\beta}^{\nu} \quad .$$

Die Berechnung erfolgt nun Schritt für Schritt:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} A_{\beta}^{\lambda} &= -a^{-2} \dot{a} \sum_i \delta_{\mu\nu} \delta_{\beta i} \delta_{\lambda i} \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\beta}^{\nu} &= \dot{a} \sum_i \delta_{\beta i} \delta_{o\lambda} \delta_{i\mu} + a^{-2} \dot{a} \sum_i \delta_{i\lambda} \delta_{o\mu} \delta_{\beta i} + \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \delta_{i\lambda} \delta_{i\mu} \delta_{\beta o} \\ \implies \nabla_{\mu} A_{\beta}^{\lambda} &= \dot{a} \sum_i \delta_{\beta i} \delta_{o\lambda} \delta_{i\mu} + \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \delta_{i\lambda} \delta_{i\mu} \delta_{\beta o} \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $A^{-1\lambda\delta} = \delta_{o\lambda} \delta_{o\delta} + a \sum_i \delta_{i\lambda} \delta_{i\delta}$  ergibt

$$\sum_{\lambda} A^{-1\lambda\delta} \nabla_{\mu} A_{\beta}^{\lambda} = \dot{a} \sum_i (\delta_{\beta i} \delta_{i\mu} \delta_{o\delta} + \delta_{i\mu} \delta_{\beta o} \delta_{i\delta}) \quad .$$

Durch Multiplikation mit  $A_{\alpha}^{\mu} = \delta_{o\alpha} \delta_{o\mu} + a^{-1} \sum_i \delta_{i\alpha} \delta_{i\mu}$  ergibt sich schließlich

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = a^{-1} \dot{a} \sum_i (\delta_{\beta o} \delta_{i\alpha} \delta_{i\delta} + \delta_{o\delta} \delta_{i\beta} \delta_{i\alpha}) \quad . \quad (3.81)$$

Man sieht leicht, daß die Ricci-Rotationskoeffizienten  $\Gamma_{\delta\alpha\beta}$  antisymmetrisch im ersten und dritten Index sind, wie es sein muß.

### Berechnung der Krümmung

Die Christoffelsymbole (3.81) müssen nun in den Riemanntensor (3.11) eingesetzt werden.

$$R^{\gamma}_{\delta\beta\alpha} = \partial_{\beta} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta} - \partial_{\alpha} \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} + \Gamma^{\epsilon}_{\alpha\delta} \Gamma^{\gamma}_{\beta\epsilon} - \Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\epsilon} - (\Gamma^{\epsilon}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\epsilon}_{\alpha\beta}) \Gamma^{\gamma}_{\epsilon\delta} \quad (3.82)$$

Es ist

$$\partial_{\beta} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta} = \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \sum_i \delta_{\beta o} \delta_{i\alpha} (\delta_{\gamma i} \delta_{\delta o} + \delta_{\gamma o} \delta_{\delta i}) \quad (3.83)$$

$$\implies \partial_{\beta} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta} - \partial_{\alpha} \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} = \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \sum_i (\delta_{\beta o} \delta_{i\alpha} - \delta_{\beta i} \delta_{o\alpha}) (\delta_{\gamma i} \delta_{\delta o} + \delta_{\gamma o} \delta_{\delta i}) \quad (3.84)$$

$$\Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\epsilon} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{ij\epsilon} \delta_{i\beta} (\delta_{\epsilon i} \delta_{\delta o} + \delta_{\epsilon o} \delta_{\delta i}) \delta_{i\alpha} (\delta_{\epsilon j} \delta_{\gamma o} + \delta_{\epsilon o} \delta_{\gamma j}) \quad (3.85)$$

$$= \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{ijk} \delta_{\beta i} \delta_{\alpha j} (\delta_{\delta i} \delta_{\gamma j} + \delta_{k i} \delta_{\delta o} \delta_{\gamma o} \delta_{k j}) \quad (3.86)$$

$$= \frac{\dot{a}^2}{a^2} \left( \sum_{ij} \delta_{\beta i} \delta_{\alpha j} \delta_{\delta i} \delta_{\gamma j} + \sum_i \delta_{\beta i} \delta_{\alpha i} \delta_{\gamma o} \delta_{\delta o} \right) \quad . \quad (3.87)$$

Der zweite Teil ist symmetrisch in  $\alpha$  und  $\beta$ , so daß

$$\Gamma^{\epsilon}_{\alpha\delta} \Gamma^{\gamma}_{\beta\epsilon} - \Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\epsilon} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{ij} (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha j}) \delta_{\delta i} \delta_{\gamma j} \quad . \quad (3.88)$$

Der letzte Teil des Riemann-Tensors erfordert die Rechnung

$$\Gamma^\epsilon_{\beta\alpha} - \Gamma^\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \left\{ \delta_{\beta i} (\delta_{\epsilon 0} \delta_{\alpha i} + \delta_{\alpha 0} \delta_{\epsilon i}) - \delta_{\alpha i} (\delta_{\epsilon 0} \delta_{\beta i} + \delta_{\beta 0} \delta_{\epsilon i}) \right\} \quad (3.89)$$

$$= \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \delta_{\epsilon i} (\delta_{\alpha 0} \delta_{\beta i} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta 0}) \quad (3.90)$$

$$\Rightarrow (\Gamma^\epsilon_{\beta\alpha} - \Gamma^\epsilon_{\alpha\beta}) \Gamma^\gamma_{\epsilon\delta} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{ijk} \delta_{ik} \delta_{kj} (\delta_{\gamma 0} \delta_{\delta j} + \delta_{\gamma j} \delta_{\delta 0}) (\delta_{\alpha 0} \delta_{\beta i} - \delta_{\alpha i} \delta_{\beta 0}) \quad (3.91)$$

$$= -\frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_i (\delta_{\gamma 0} \delta_{\delta j} + \delta_{\gamma j} \delta_{\delta 0}) (\delta_{\beta 0} \delta_{\alpha i} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha 0}) \quad (3.92)$$

Insgesamt ergibt sich also

$$R^\gamma_{\delta\beta\alpha} = \frac{\ddot{a}}{a} \sum_i (\delta_{\gamma 0} \delta_{\delta i} + \delta_{\gamma i} \delta_{\delta 0}) (\delta_{\beta 0} \delta_{\alpha i} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha 0}) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{ij} (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha j}) \delta_{\delta i} \delta_{\gamma j} \quad (3.93)$$

Der Ricci-Tensor  $R_{\delta\alpha} = \sum_\beta R^\beta_{\delta\beta\alpha}$  ergibt sich dann mit

$$\sum_{\beta i} (\delta_{\beta 0} \delta_{\delta i} + \delta_{\beta i} \delta_{\delta 0}) (\delta_{\beta 0} \delta_{\alpha i} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha 0}) = \sum_i (\delta_{i\alpha} \delta_{i\delta} - \delta_{ii} \delta_{\alpha 0} \delta_{\delta 0}) \quad (3.94)$$

$$= \sum_i \delta_{i\alpha} \delta_{i\delta} - 3\delta_{\alpha 0} \delta_{\delta 0} \quad (3.95)$$

und

$$\sum_{ij\beta} (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha j}) \delta_{\delta i} \delta_{\beta j} = \sum_{ijk} (\delta_{\alpha i} \delta_{kj} \delta_{\delta i} \delta_{kj} - \delta_{ki} \delta_{\alpha j} \delta_{\delta i} \delta_{kj}) \quad (3.96)$$

$$= \sum_i 2\delta_{\alpha i} \delta_{\delta i} \quad (3.97)$$

insgesamt zu

$$R_{\delta\alpha} = \frac{\ddot{a}}{a} \sum_i (\delta_{\delta i} \delta_{\alpha i} - 3\delta_{\alpha 0} \delta_{\delta 0}) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_i 2\delta_{\alpha i} \delta_{\delta i} \quad (3.98)$$

Die Krümmung  $R = R^\alpha_{\alpha} = \sum_{\alpha\delta} \eta^{\alpha\delta} R_{\delta\alpha}$  ist dann

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \quad (3.99)$$

### Berechnung des Zusammenhangs $\omega_\alpha$

Es gilt (siehe Satz 3 oder gleich [Lic64])

$$\omega_\alpha = -\frac{1}{4} \Gamma_{\alpha\delta}^\beta \gamma^\delta \gamma_\beta$$

Damit erhalten wir in unserem Fall

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= -\frac{1}{4} \frac{\dot{a}}{a} \sum_{\beta,\delta} \sum_i \delta_{i\alpha} (\delta_{\beta\delta} \delta_{i\delta} \gamma^\delta \gamma_\beta + \delta_{\beta\delta} \delta_{i\beta} \gamma^\delta \gamma_\beta) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \delta_{i\alpha} (\gamma^i \gamma_0 + \gamma^0 \gamma_i) \end{aligned}$$

Mit  $\gamma_0 = \gamma^0$ ,  $\gamma_i = -\gamma^i$  und  $\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i\gamma^0$  wird

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \delta_{i\alpha} \gamma^0 \gamma^i \quad (3.100)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \delta_{i\alpha} \alpha^i \quad , \quad (3.101)$$

wobei die  $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$  den üblichen „relativistischen Geschwindigkeitsoperator“ bedeuten (siehe etwa [BD66]).

### Einige nützliche Folgerungen

An dieser Stelle sollen nun einige in der Rechnung auftauchende Kombinationen von  $\gamma$ -Matrizen und dem Spinzusammenhang  $\omega$  explizit für unsere Raumzeit angegeben werden.

- Zunächst einmal ist

$$\gamma^\alpha \omega_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \sum_\alpha \delta_{i\alpha} \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^i \quad (3.102)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \gamma^i \gamma^0 \gamma^i \quad (3.103)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \gamma^0 \gamma^i \gamma^i \quad (3.104)$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \gamma^0 \quad . \quad (3.105)$$

- Genauso ergibt sich

$$\omega_\alpha \gamma^\alpha = -\frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \gamma^0 \quad . \quad (3.106)$$

- Damit folgt weiter

$$\gamma^\alpha \omega_\alpha \gamma^j = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \gamma^0 \gamma^j \quad (3.107)$$

$$\gamma^j \omega_\alpha \gamma^\alpha = -\frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \gamma^0 \gamma^j \quad (3.108)$$

$$\implies \gamma^\alpha \omega_\alpha \gamma^j + \gamma^j \omega_\alpha \gamma^\alpha = \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} (\gamma^0 \gamma^j - \gamma^j \gamma^0) \quad (3.109)$$

$$= 3 \frac{\dot{a}}{a} \gamma^0 \gamma^j \quad (3.110)$$

$$= 3 \frac{\dot{a}}{a} \alpha^j \quad . \quad (3.111)$$

Als weiteres Ergebnis ist festzustellen:

**Satz 10.** *In einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit gibt es kein nichttriviales kovariant-konstantes Spinorfeld.*

*Beweis.* Ein kovariant-konstantes Spinorfeld müßte folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\nabla_\alpha f^A = 0 \quad (\text{ausnahmsweise mit Spinorindizes}) \quad (3.112)$$

$$\text{also} \quad \partial_\alpha f^A = -\omega_\alpha{}^A{}_B f^B \quad (3.113)$$

Mit  $\partial_\alpha = A_\alpha{}^\mu \partial_\mu = a^{-1} \sum_i \sum_\mu \delta_{i\mu} \delta_{i\alpha} \partial_\mu = a^{-1} \sum_i \delta_{i\alpha} \partial_i$  ergeben sich die zwölf Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f^A \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \dot{a} \alpha^i A_B f^B \quad .$$

Dieses Gleichungssystem ist offensichtlich überbestimmt, und leider, wie im Folgenden zu sehen ist, widersprüchlich.

Wir haben nämlich

$$\begin{array}{llll} \partial_1 f^1 & = & f^4 & \partial_2 f^1 & = & -i f^4 & \partial_3 f^1 & = & f^3 \\ \partial_1 f^2 & = & f^3 & \partial_2 f^2 & = & i f^3 & \partial_3 f^2 & = & -f^4 \\ \partial_1 f^3 & = & f^2 & \partial_2 f^3 & = & -i f^2 & \partial_3 f^3 & = & f^1 \\ \partial_1 f^4 & = & f^1 & \partial_2 f^4 & = & i f^1 & \partial_3 f^4 & = & -f^2 \end{array}$$

Daraus folgt aber z.B.:

$$\partial_2 \partial_1 f^1 = i f^1 \quad \text{und} \quad \partial_1 \partial_2 f^1 = -i f^1 \quad ,$$

womit der Widerspruch gezeigt ist, da die gewöhnlichen partiellen Ableitungen vertauschen.  $\square$

Das Ergebnis ist natürlich nur ein anderer Ausdruck dafür, daß der Spin-Krümmungstensor  $P^A{}_{B\beta\alpha}$  nicht verschwindet. Mit Satz 6 und (3.93) ergibt sich nämlich

$$P^A{}_{B\beta\alpha} = -\frac{1}{4} \left( \frac{\ddot{a}}{a} \sum_i (\delta_{\gamma 0} \delta_{\delta i} + \delta_{\gamma i} \delta_{\delta 0}) (\delta_{\beta 0} \delta_{\alpha i} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha 0}) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{ij} (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha j}) \delta_{\delta i} \delta_{\gamma j} \right) \gamma_\gamma \gamma_\delta \quad (3.114)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\ddot{a}}{a} \sum_i \gamma^0 \gamma^i (\delta_{\beta 0} \delta_{\alpha i} - \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta i}) + \frac{1}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \gamma^j \gamma^i \sum_{ij} (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} - \delta_{\beta i} \delta_{\alpha j}) \quad (3.115)$$

Die Krümmung (3.99) ergibt sich dann gemäß Satz 8.

### 3.2.3 Der Dirac- und der Klein-Gordon-Operator

Mit (3.105) wird die Dirac-Gleichung (3.48) zu

$$(-i \gamma^\alpha \partial_\alpha - i \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \gamma^0 + m) \Psi^A = 0 \quad . \quad (3.116)$$

Als Klein-Gordon-Gleichung erhält man aus (3.55) mit

$$\Gamma^{\gamma\alpha}{}_\alpha = \eta^{\alpha\beta} \Gamma^{\gamma\beta}{}_\alpha \quad (3.117)$$

$$= \frac{\dot{a}}{a} \sum_{\alpha,\beta,i} \eta^{\alpha\beta} \delta_{i\beta} (\delta_{\gamma 0} \delta_{i\alpha} + \delta_{\gamma i} \delta_{\alpha 0}) \quad (3.118)$$

$$= -\frac{\dot{a}}{a} \sum_{\alpha,i} \delta_{i\alpha} \delta_{\gamma 0} \delta_{i\alpha} \quad (3.119)$$

$$= -\frac{\dot{a}}{a} \sum_i \delta_{ii} \delta_{\gamma 0} \quad (3.120)$$

$$= -3 \frac{\dot{a}}{a} \delta_{\gamma 0} \quad , \quad (3.121)$$

$$\omega^\alpha \partial_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \sum_{\alpha,\beta,i} \eta^{\alpha\beta} \delta_{i\beta} \alpha^i \partial_\alpha \quad (3.122)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \sum_{\alpha,i} \delta_{i\alpha} \alpha^i \partial_\alpha \quad (3.123)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \sum_i \alpha^i \partial_i \quad , \quad (3.124)$$

$$\partial^\alpha \omega_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \omega_\alpha \quad (3.125)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,i} \eta^{\alpha\beta} (\partial_\beta \frac{\dot{a}}{a}) \delta_{i\alpha} \alpha^i \quad (3.126)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\beta,i} (\partial_\beta \frac{\dot{a}}{a}) \delta_{i\beta} \alpha^i \quad (3.127)$$

$$= 0 \quad (3.128)$$

da  $\partial_\beta \frac{\dot{a}}{a}$  den kombinatorischen Faktor  $\delta_{0\beta}$  ergibt,

$$\Gamma^{\gamma\alpha}{}_\alpha \omega_\gamma = \eta^{\alpha\beta} \Gamma^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \omega_\gamma \quad (3.129)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,i} \eta^{\alpha\beta} \delta_{i\beta} (\delta_{\gamma 0} \delta_{i\alpha} + \delta_{\gamma i} \delta_{\alpha 0}) \delta_{i\gamma} \alpha^i \quad (3.130)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{\alpha,\gamma,i} \delta_{i\alpha} (\delta_{\gamma 0} \delta_{i\alpha} + \delta_{\gamma i} \delta_{\alpha 0}) \delta_{i\gamma} \alpha^i \quad (3.131)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{\alpha,\gamma,i} (\delta_{i\alpha} \delta_{\gamma 0} \delta_{i\alpha} \delta_{i\gamma} + \delta_{\gamma i} \delta_{\alpha 0} \delta_{i\gamma} \delta_{i\alpha}) \alpha^i \quad (3.132)$$

$$= 0 \quad , \quad (3.133)$$

und

$$\omega^\alpha \omega_\alpha = \eta^{\alpha\beta} \omega_\beta \omega_\alpha \quad (3.134)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{\alpha,\beta,i,j} \eta^{\alpha\beta} \delta_{i\alpha} \alpha^i \delta_{j\beta} \alpha^j \quad (3.135)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{\alpha,i,j} \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} \alpha^i \alpha^j \quad (3.136)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_{i,j} \delta_{ij} \alpha^i \alpha^j \quad (3.137)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sum_i \alpha^i \alpha^i \quad (3.138)$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (3.139)$$

$$(3.140)$$

schließlich

$$\square + m^2 - \frac{1}{4} R = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial t} - \partial^i \partial_i + \frac{\dot{a}}{a} \alpha^i \partial_i - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + m^2 - \frac{1}{4} R \quad , \quad (3.141)$$

wobei  $\partial_i$  als Ableitung nach der  $i$ -ten Vierbeinkomponente  $\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i}$  bedeutet (siehe zur Notation auch Anhang A.1.).



### 3.3 Lösungen der Klein-Gordon- und der Dirac-Gleichung in einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit und Berechnung der Zweipunktfunktion

Nachdem nun die Dirac-Gleichung gefunden wurde, muß also als nächstes eine Lösung derselben angegeben werden. Dieses geschieht in zwei Schritten: Ausgehend von der vorliegenden Theorie *skalarer* Klein-Gordon-Felder wird in 3.3.1 eine Lösung der *spinoriellen* Klein-Gordon-Gleichung konstruiert. Aus dieser wiederum kann mit (3.55) eine Lösung der Dirac-Gleichung berechnet werden. Dies soll in 3.3.3 geschehen. Deren Quantisierung in 3.3.4 folgt dem Modell der skalaren Theorie, welches in 3.3.2 kurz skizziert wird. Nach der Quantisierung kann dann die Zweipunktfunktion als Vakuumerwartungswert der Feldoperatoren berechnet werden.

Der Begriff der adiabatischen Näherung bzw. des adiabatischen Vakuums, der in diesem Abschnitt eine zentrale Rolle spielen wird, wurde ursprünglich eingeführt in [Par69]. [Ful89] und [BiD82] geben eine Einführung innerhalb eines allgemeinen Rahmens, die formal maßgebliche Formulierung findet man schließlich in [LR90] und daran anschließend in [Jun95].

#### 3.3.1 Die adiabatische Näherungslösung der Klein-Gordon-Gleichung

Zuerst sollen klassische Lösungen der skalaren sowie der spinoriellen Klein-Gordon-Gleichung angegeben werden.

Zunächst ein kleiner Überblick über die skalare Klein-Gordon-Gleichung:  
Für ein skalares Feld  $\Phi$  reduziert sich (3.141) auf

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi + m^2 \Phi = 0$$

und läßt sich separieren in den zeitabhängigen Teil  $T_k(t)$  mit

$$\ddot{T} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{T} + \omega^2 T = 0 \quad , \quad \omega^2 = \frac{|\vec{k}|^2}{a^2} + m^2 \quad (3.142)$$

und den räumlichen Anteil

$$\phi(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

so daß

$$\Phi(t, \vec{x}) = \int d^3 k T_k(t) e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad .$$

Für die spinorielle Klein-Gordon-Gleichung (3.141) soll daher ebenfalls der Ansatz gemacht werden:

$$\Phi^A(t, \vec{x}) = \int d^3 k e^{i\vec{k}\vec{x}} T_k^A(t) \quad (3.143)$$

$T_k^A(t)$  ist also die auf den flachen räumlichen Hyperflächen  $\Sigma_t$  fouriertransformierte  $\hat{\Phi}(t, \vec{k})$ . Dadurch erhält man jetzt für  $T_k^A(t)$  ( formal wie im skalaren Fall) die Gleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \omega_k^2 \right) T_k^A(t) = 0 \quad . \quad (3.144)$$

Dabei ist  $\omega_k^2$  jetzt die Matrix

$$\frac{|\vec{k}|^2}{a^2} + i \frac{\dot{a}}{a^2} \alpha^i k_i - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + m^2 - \frac{1}{4} R(t) \quad (3.145)$$

Der einzig wesentlich matrixwertige Ausdruck  $\sim \alpha^i$  läßt sich noch diagonalisieren, so daß  $\alpha^i k_i = \begin{pmatrix} |\vec{k}| & 0 \\ 0 & -|\vec{k}| \end{pmatrix}$  in der Basis  $\{u_{k,s}^A, v_{k,s}^A\}$ .

In der Darstellung durch die kanonischen Basen sind

$$u_{k,1}^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_3}{|\vec{k}|} \\ \frac{k^+}{|\vec{k}|} \end{pmatrix} u_{k,-1}^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{k^-}{|\vec{k}|} \\ -\frac{k_3}{|\vec{k}|} \end{pmatrix} v_{k,1}^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{k_3}{|\vec{k}|} \\ -\frac{k^+}{|\vec{k}|} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_{k,-1}^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{k^-}{|\vec{k}|} \\ \frac{k_3}{|\vec{k}|} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.146)$$

mit  $k^+ := k_1 + ik_2$  und  $k^- := k_1 - ik_2$  und den  $u_s$  als Eigenvektoren zu  $|\vec{k}|$  und den  $v_s$  als denjenigen zu  $-|\vec{k}|$ . Die Spinoren  $u, v$  sind auch orthonormiert:  $u_s^\dagger u_{s'} = v_s^\dagger v_{s'} = \delta_{ss'}$  und  $u_s^\dagger v_{s'} = 0$

So ergibt sich

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial t} + \omega_{k\pm}^2(t) \right) T_{k\pm}(t) = 0 \quad , \quad (3.147)$$

wobei jetzt

$$\omega_{k+}^2 = \frac{|\vec{k}|^2}{a^2} + i \frac{\dot{a}}{a^2} |\vec{k}| - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + m^2 - \frac{1}{4} R(t) \quad (3.148)$$

auf die beiden oberen Komponenten  $T_{k+}$  wirkt, und

$$\omega_{k-}^2 = \frac{|\vec{k}|^2}{a^2} - i \frac{\dot{a}}{a^2} |\vec{k}| - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + m^2 - \frac{1}{4} R(t) \quad (3.149)$$

entsprechend auf die unteren Komponenten  $T_{k-}$  des Spinors  $T_k$  bezüglich der angegebenen Basis.

Wir haben somit zwei skalare Gleichungen vom Typus (3.142) erhalten. Diese Art von Gleichung kann durch die bekannte WKB-Prozedur genähert werden, ein Verfahren, das im Zusammenhang der Quantenfeldtheorie auf Robertson- Walker-Raumzeiten als adiabatische Näherung bekannt geworden ist (siehe dazu die oben angegebene Literatur).

**Definition 4.** *Die Funktionen*

$$T_{k\pm}^{(n)\mp}(t) = \frac{1}{a^{3/2}(t) \sqrt{2\Omega_{k\pm}^{(n)}(t)}} e^{\mp i \int_{t_0}^t \Omega_{k\pm}^{(n)}(t') dt'}$$

heißen eine Näherungslösung n-ter adiabatischer Ordnung zur Differentialgleichung (3.142) bzw. (3.147).

Dabei sind die  $\Omega_k^{(n)}$  iterativ definiert durch

$$(\Omega_k^{(0)})^2 := \omega_k^2 \quad (3.150)$$

$$(\Omega_k^{(n+1)})^2 = \omega_k^2 - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{\Omega}_k^{(n)}}{\Omega_k^{(n)}} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{\Omega}_k^{(n)}}{\Omega_k^{(n)}} \quad (3.151)$$

mit

$$\omega^2 = \frac{|\vec{k}|^2}{a^2} + m^2 \quad \text{im skalaren Fall (3.142), und} \quad (3.152)$$

$$\omega_{k\pm}^2 = \frac{|\vec{k}|^2}{a^2} \pm i \frac{\dot{a}}{a^2} |\vec{k}| - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + m^2 - \frac{1}{4} R(t) \quad (3.153)$$

im spinoriellen Falle (3.147)

Man beachte hier die Konvention, daß der obere  $\pm$ -Index das Vorzeichen der Quadratwurzel aus  $\omega^2$  bezeichnet, während der untere Index sich auf das Vorzeichen des Imaginärteils von  $\omega^2$  bezieht. Der angestammten Bezeichnung folgend, heiße jetzt  $T^-$  die Lösung positiver Energie, entsprechend  $T^+$  die Lösung negativer Energie.

Auf Fragen der Konvergenz soll hier nicht eingegangen werden, siehe dazu z.B. [Ful89].

Die Näherung ist offensichtlich unabhängig von der speziellen Form von  $\omega$ , weshalb diese in der Literatur für den skalaren Fall (3.142) gegebene Definition in den vorliegenden Fllen (3.148) und (3.149) sinnvoll bleibt.

In 0-ter Ordnung ergeben sich also die acht linear unabhängigen spinoriellen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung (3.141)

$$\Phi_{s+}^{(0)\mp A}(t, \vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x}} T_{k+}^{(0)\mp}(t) u_{k,s}^A \quad (3.154)$$

$$= \int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{1}{a^{3/2}(t) \sqrt{2\omega_{k+}(t)}} e^{\mp \int_{t_0}^t \omega_{k+}(t') dt'} u_{k,s}^A \quad (3.155)$$

und

$$\Phi_{s-}^{(0)\mp A}(t, \vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x}} T_{k-}^{(0)\mp}(t) v_{k,s}^A \quad (3.156)$$

$$= \int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{1}{a^{3/2}(t) \sqrt{2\omega_{k-}(t)}} e^{\mp \int_{t_0}^t \omega_{k-}(t') dt'} v_{k,s}^A \quad (3.157)$$

mit den in (3.146) definierten  $u_s$  und  $v_s$ . Diese reduzieren sich im skalaren Fall auf

$$\Phi^{(0)\mp}(t, \vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x}} T_k^{(0)\mp}(t) \quad (3.158)$$

$$= \int d^3k e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{1}{a^{3/2}(t) \sqrt{2\omega_k(t)}} e^{\mp \int_{t_0}^t \omega_k(t') dt'} \quad (3.159)$$

### 3.3.2 Vakuumzustände des skalaren Klein-Gordon-Feldes für eine flache Robertson- Walker-Raumzeit in 0-ter adiabatischer Näherung

Nun soll aus dem vorhin für das klassische Feld erreichte eine Quantenfeldtheorie konstruiert werden. Diese ist für die skalaren Klein-Gordon-Felder auf allgemeinen Robertson-Walker-Raumzeiten schon bekannt ([LR90],[Jun95]). Es folgt eine kurze Zusammenfassung.

**Satz 11 (Theorem 3.18 in [Jun95]).** *Die homogenen und isotropen Fockzustände des freien Klein-Gordon-Feldes in einer Robertson-Walker-Raumzeit sind gegeben durch die Feldoperatoren*

$$\hat{\Phi}(t, \vec{x}) = \int d^3k [a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \overline{T_k(t)} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} T_k(t)]$$

auf einem bosonischen Fockraum über dem Einteilchenhilbertraum  $L^2(\Sigma)$  und Erzeugern und Vernichtern  $a$   $a^\dagger$  mit den üblichen Vertauschungsrelationen

$$[a(f_1), a^\dagger(f_2)] = \int d^3k \overline{f_1(\vec{k})} f_2(\vec{k}) \quad \text{oder aber} \quad [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad .$$

Da die klassische Lösung nur näherungsweise bekannt ist, können auch die zugehörigen  $a$   $a^\dagger$  und damit das „Vakuum“ nicht eindeutig bestimmt werden. Da das Problem an den einschlägigen Stellen (s.o.) ausführlich diskutiert ist, folgt hier nur kurz eine

**Definition 5.** *Es sei wie oben*

$$\hat{\Phi}(t, \vec{x}) = \int d^3k [a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \overline{T_k}(t) + a^\dagger(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} T_k(t)],$$

allerdings die  $T_k$  nur eine bis zur  $n$ -ten adiabatischen Ordnung bekannt. Dann heißt der durch

$$a|0\rangle = 0$$

definierte Zustand adiabatisches Vakuum  $n$ -ter Ordnung.

### 3.3.3 Die Dirac-Gleichung in der flachen Robertson-Walker-Raumzeit

Aus der Identität (3.55) und Definition 4 können nun Näherungslösungen der Dirac-Gleichung bestimmt werden.

**Definition 6.** *Es sei  $\Phi_{k,s\pm}^{A(n)\mp} = T_{k\pm}^{(n)\mp} e^{i\vec{k}\vec{x}} u_{k,s}^A$  bzw.  $T_{k\pm}^{(n)\mp} e^{i\vec{k}\vec{x}} v_{k,s}^A$  mit den  $u_s$ ,  $v_s$  aus (3.146) und  $T_{k\pm}^{(n)\mp}(t) = \frac{1}{a^{3/2}(t) \sqrt{2\Omega_{k\pm}^{(n)}(t)}} e^{\mp \int_{t_0}^t \Omega_{k\pm}^{(n)}(t') dt'}$  die adiabatische Näherungslösung der spinoriellen Klein-Gordon-Gleichung (3.141). Dann heiße die sich daraus ergebende Näherung der Dirac-Gleichung  $\Psi_{k,s\pm}^{A(n)\mp} := (i\gamma^\alpha \nabla_\alpha + m) \Phi_{k,s\pm}^{A(n)\mp}$  die adiabatische Näherung  $n$ -ter Ordnung der Dirac-Gleichung.*

Es ergeben sich also zunächst acht Lösungen der Dirac-Gleichung, aus denen später vier als Basis des Lösungsraumes ausgewählt werden werden.

Zuvor ergibt sich noch

**Satz 12.** *Die adiabatischen Näherungen  $n$ -ter Ordnung der Dirac-Gleichung in der flachen Raumzeit lautet mit den obigen Bezeichnungen*

$$\Psi_{k,s\pm}^{A(n)-} = (\Omega_{k\pm}^{(n)} \gamma^0 - \frac{i \dot{\Omega}_{k\pm}^{(n)}}{2 \Omega_{k\pm}^{(n)}} \gamma^0 \mp \frac{|\vec{k}|}{a} \gamma^0 + m) \Phi_{k,s\pm}^{A(n)-} =: \Xi_{k\mp}^+ A_B \Phi_{k,s\pm}^{B(n)-} \quad (3.160)$$

$$\Psi_{k,s\pm}^{A(n)+} = (-\Omega_{k\pm}^{(n)} \gamma^0 - \frac{i \dot{\Omega}_{k\pm}^{(n)}}{2 \Omega_{k\pm}^{(n)}} \gamma^0 \mp \frac{|\vec{k}|}{a} \gamma^0 + m) \Phi_{k,s\pm}^{A(n)+} =: \Xi_{k\mp}^- A_B \Phi_{k,s\pm}^{B(n)+} \quad (3.161)$$

*Beweis.* Es sei zur Illustration der Fall ( $s = 1, +$ ) für positive Energie nachgerechnet:

$$\Psi_{k,1+}^{A(n)-} = (i\gamma^\alpha \nabla_\alpha + m) \Phi_{k,1+}^{A(n)-} \quad (3.162)$$

$$= (i\gamma^0 \partial_0 + i \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \gamma^0 + i\gamma^i \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} + m) \Phi_{k,1+}^{A(n)-} \quad (3.163)$$

Der Beitrag  $i\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\gamma^0$  kürzt sich mit der Zeitableitung des  $a^{-\frac{3}{2}}$ , und mit  $i\gamma^i\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x^i}e^{i\vec{k}\vec{x}} = -\gamma^i\frac{k_i}{a}e^{i\vec{k}\vec{x}}$  sowie

$$-\gamma^i\frac{k_i}{a}u_{k,1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_3 & -k^- \\ 0 & 0 & -k^+ & k_3 \\ k_3 & k^- & 0 & 0 \\ k^+ & -k_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_3}{|\vec{k}|} \\ \frac{k^+}{|\vec{k}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-|\vec{k}|}{a} \\ 0 \\ \frac{k_3}{a} \\ \frac{k^+}{a} \end{pmatrix} = -\gamma^0\frac{|\vec{k}|}{a}u_{k,1}$$

ergibt sich das gewünschte Ergebnis.

Die anderen Fälle ergeben sich in offensichtlicher Weise entsprechend.  $\square$

Es sei zur Kontrolle der bisherigen Ergebnisse noch  $(-i\gamma^\alpha\nabla_\alpha + m)\Psi_{k,s+}^{A(n)-}$  berechnet. Es ist gemäß der Definition der adiabatischen Näherungen zu zeigen (Indizes einmal beiseite gelassen):

$$(-i\gamma^\alpha\nabla_\alpha + m)\Psi = (\square + m^2 + \frac{1}{4}R)\Phi = (-\frac{1}{2}\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{3}{4}\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2} - \frac{3}{2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{4}\frac{\dot{a}^2}{a^2})\Phi$$

Es ist

$$(-i\gamma^\alpha\nabla_\alpha + m)(\Omega\gamma^0 - \frac{i}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\gamma^0 - \gamma^i\frac{k_i}{a} + m)\Phi \quad (3.164)$$

$$= (-i\dot{\Omega} - \frac{1}{2}(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}) + i\frac{\dot{a}}{a}\gamma^i\frac{k_i}{a} + m)\Phi \quad (3.165)$$

$$+ (\Omega\gamma^0 - \frac{i}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\gamma^0 + \gamma^i\frac{k_i}{a} + m)(-\Omega\gamma^0 + \frac{i}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\gamma^0)\Phi \quad (3.166)$$

$$+ (\Omega\gamma^0 - \frac{i}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\gamma^0 - \gamma^i\frac{k_i}{a} + m)m\Phi \quad (3.167)$$

$$+ \gamma^i\frac{k_i}{a}(\Omega\gamma^0 - \frac{i}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\gamma^0 - \gamma^i\frac{k_i}{a} + m)\Phi \quad , \quad (3.168)$$

wobei in (3.166)  $\gamma^i$  durch  $-\gamma^i$  ersetzt wurde, da das  $i\gamma^0\partial_0$  durch den Ausdruck durchgetauscht wurde. Ausmultiplizieren ergibt weiter

$$= (-\Omega^2 - \frac{1}{2}(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}) + i\frac{\dot{a}}{a}\gamma^i\frac{k_i}{a} + \frac{1}{4}\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2} + m^2 - \gamma^i\gamma^j\frac{k_ik_j}{a^2})\Phi \quad (3.169)$$

$$= (-\Omega^2 - \frac{1}{2}(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}) + i\frac{\dot{a}}{a}\gamma^i\frac{k_i}{a} + \frac{1}{4}\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2} \quad (3.170)$$

$$+ m^2 + \frac{|\vec{k}|}{a^2} + \frac{1}{4}R - \frac{1}{4}R - \frac{3}{4}\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3}{4}\frac{\dot{a}^2}{a^2})\Phi \quad (3.171)$$

$$= (-\frac{1}{2}(\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2}) + \frac{1}{4}\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2} + \frac{1}{4}R + \frac{3}{4}\frac{\dot{a}^2}{a^2})\Phi \quad . \quad (3.172)$$

Mit  $R = -6(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2})$  hat man schließlich

$$= (-\frac{1}{2}\frac{\ddot{\Omega}}{\Omega} + \frac{3}{4}\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2} - \frac{3}{2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{4}\frac{\dot{a}^2}{a^2})\Phi \quad , \quad (3.173)$$

wie es sein muß.  $\square$

Die Lösungen  $\Psi_{k,s}$  sollen nun noch für  $a(t) = 1$  normiert werden. Es ist

$$u_k^\dagger \bar{T}_{k+}^- (\Xi_{k-}^+)^{\dagger} \Xi_{k-}^+ T_{k+}^- u_k |_{a(t)=1} \quad (3.174)$$

$$= \frac{1}{|\sqrt{2\Omega_{k+}}|^2} e^{-i \int_{t_0}^{x_0} \Omega_{k+}(t') dt'} \overline{e^{-i \int_{t_0}^{x_0} \Omega_{k+}(t') dt'}} \quad (3.175)$$

$$\times u_k^\dagger \left( \overline{\Omega_{k+}} \gamma^0 + \frac{i}{2} \left( \frac{\dot{\Omega}_{k+}}{\Omega_{k+}} \right) \gamma^0 - \frac{|\vec{k}|}{a} \gamma^0 + m \right) \quad (3.176)$$

$$\times \left( \Omega_{k+} \gamma^0 - \frac{i}{2} \left( \frac{\dot{\Omega}_{k+}}{\Omega_{k+}} \right) \gamma^0 - \frac{|\vec{k}|}{a} \gamma^0 + m \right) u_k |_{a(t)=1} \quad (3.177)$$

$$= e^{2 \int_{t_0}^{x_0} \text{Im} \Omega_{k+}(t') dt'} \frac{1}{|\sqrt{2\Omega_{k+}}|^2} \quad (3.178)$$

$$\times u_k^\dagger \left( |\Omega_{k+}|^2 + m^2 + \frac{|\vec{k}|^2}{a^2} + \frac{1}{4} \left| \frac{\dot{\Omega}_{k+}}{\Omega_{k+}} \right|^2 - 2 \text{Re} \Omega_{k+} \frac{|\vec{k}|}{a} + 2 \text{Re} \Omega_{k+} \gamma^0 m - 2 \frac{|\vec{k}|}{a} \gamma^0 m \right) \quad (3.179)$$

$$+ \frac{|\vec{k}|}{a} i \text{Im} \left( \frac{\dot{\Omega}_{k+}}{\Omega_{k+}} \right) + i \text{Im} \left( \frac{\dot{\Omega}_{k+}}{\Omega_{k+}} \overline{\Omega_{k+}} \right) - i \text{Im} \left( \frac{\dot{\Omega}_{k+}}{\Omega_{k+}} \gamma^0 m \right) |_{a(t)=1} u_k \quad (3.180)$$

$$=: N_{k+}^- \quad (3.181)$$

Für alle anderen Lösungen gilt entsprechendes, wobei nur zu beachten ist, daß sich für die Lösungen negativer Energie ein abnehmender Exponentialfaktor ergibt.

Aus den acht betrachteten Lösungen soll nun eine Basis angegeben werden.

**Satz 13.** Die Lösungen  $\Psi_{k,s+}^-$  und  $\Psi_{k,s-}^+$  bilden in 0-ter adiabatischer Näherung ein orthogonales System.

*Beweis.* Aus der vorhergehenden Rechnung zur Normierung ergibt sich sofort das Skalarprodukt von  $\Psi_{k,1+}^-$  mit  $\Psi_{k,-1+}^-$ . Die Matrix zwischen den  $u_k$  ist von der Form  $a + b\gamma^0$ , mit  $a, b \in \mathcal{C}$ . Aus der Definition (3.146) ergibt sich aber, daß sowohl  $u_{k,1}^\dagger u_{k,-1}$  als auch  $u_{k,1}^\dagger \gamma^0 u_{k,-1} = 0$ .

Die Berechnung des Skalarproduktes  $(\Psi_{k,s+}^-)^\dagger \Psi_{k,s-}^+$  führt auf den Ausdruck

$$u_{k,s}^\dagger \left( \bar{\omega}_{k+} \gamma^0 - \frac{i \dot{\omega}_{k+}}{2 \omega_{k+}} \gamma^0 - \frac{|\vec{k}|}{a} \gamma^0 + m \right) \left( -\omega_{k-} \gamma^0 - \frac{i \dot{\omega}_{k-}}{2 \omega_{k-}} \gamma^0 + \frac{|\vec{k}|}{a} \gamma^0 + m \right) v_{k,s'}$$

Da aber  $\bar{\omega}_{k+} = \omega_{k-}$  (3.153), fallen alle matrixwertigen Ausdrücke zwischen den  $u, v$  heraus. Mit  $u_{k,s}^\dagger v_{k,s'} = 0$  ergibt sich das Ergebnis.  $\square$

Man erhält damit als allgemeine Lösung 0-ter adiabatischer Ordnung

$$\Psi^A(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3k \frac{1}{a^{3/2}} \times \left( \frac{1}{\sqrt{N_{k+}^-}} \tilde{\psi}_{s+}(\vec{k}) \Xi_k^+ u_s^A(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} T_{k+}^{(0)-} + \frac{1}{\sqrt{N_{k-}^+}} \tilde{\psi}_{s-}(\vec{k}) \Xi_k^- v_s^A(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} T_{k-}^{(0)+} \right), \quad (3.182)$$

wobei die  $\tilde{\psi}$  die Fourierkoeffizienten sind. Der erste Summand besteht aus den Eigenlösungen positiver Energie, der zweite aus denen negativer Energie.

### 3.3.4 Quantisierung der Dirac-Gleichung und Berechnung der Zweipunktfunktion in erster Näherung

Inspiziert durch die Ergebnisse beim skalaren Klein-Gordon-Feld in Abschnitt 3.3.2 soll nun auch das Dirac-Feld in Analogie zum Minkowskiraum quantisiert werden.<sup>1</sup>

**Behauptung 1.** *Man erhält einen homogenen und isotropen Fockzustand für das freie Dirac-Feld in einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit durch folgende Darstellung des Feldoperators:*

$$\hat{\Psi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3k \frac{1}{a^{3/2}} \left( \frac{1}{\sqrt{N_{k+}^-}} b_s(\vec{k}) \Xi_{k-}^+ u_s(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} T_{k+}^{(0)-} + \frac{1}{\sqrt{N_{k-}^+}} d_s^\dagger(\vec{k}) \Xi_{k+}^- v_s(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} T_{k-}^{(0)+} \right) \quad (3.183)$$

$$=: \Psi^+ + \Psi^- \quad (3.184)$$

Dabei sind die  $b, b^\dagger$  und  $d, d^\dagger$  die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf dem Unterraum positiver bzw. negativer Energie des fermionischen Fockraums über dem Ein-Teilchen-Raum  $(L_2(\Sigma))^4$ . Die  $b$ 's und  $d$ 's genügen dabei den kanonischen Antivertauschungsrelationen

$$\{b_s(\vec{k}), b_{s'}(\vec{k}')^\dagger\} = \{d_s(\vec{k})^\dagger, d_{s'}(\vec{k}')\} = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ss'} \quad (3.185)$$

Der „Vakuumzustand“ sei definiert durch  $b|0\rangle = d|0\rangle = 0$ .

Falls die Behauptung wahr ist, läßt sich die Zweipunktfunktion  $S^+$  aus

$$-iS^+(x, y) = \langle 0 | \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle = \{ \Psi^-(x), \bar{\Psi}^+(y) \} \quad (3.186)$$

berechnen. Aus (3.184) und (3.185) folgt nämlich

$$\{ \Psi^-(x), \bar{\Psi}^+(y) \} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \int d^3k \frac{1}{N_{k+}^-} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(y^0)} \quad (3.187)$$

$$\times \Xi_{k-}^+ u_{s,k} T_{k+}^{(0)-}(x^0) \overline{\Xi_{k-}^+ u_{s,k} T_{k+}^{(0)-}(y^0)} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \quad (3.188)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \int d^3k \frac{1}{N_{k+}^-} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(y^0)} \quad (3.189)$$

$$\times \Xi_{k-}^+ u_{s,k} u_{s,k}^\dagger (\Xi_{k-}^+)^{\dagger} \gamma^0 T_{k+}^{(0)-}(x^0) \bar{T}_{k+}^{(0)-}(y^0) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (3.190)$$

Da somit nur noch die positiven Energielösungen zu  $\omega_{k+}$  auftauchen, sollen ab jetzt der Übersichtlichkeit halber sämtliche  $\pm$ -Indizes unterdrückt werden. Mit

$$\sum_s u_{s,k} u_{s,k}^\dagger = \frac{1}{2} \left( \mathbf{1} + \alpha^i \frac{k_i}{|\vec{k}|} \right) \quad (3.191)$$

<sup>1</sup>Die Spinorindizes werden im folgenden, wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, der Übersichtlichkeit halber nicht mehr explizit mitgeführt

folgt dann

$$-iS^+(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{N_k} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(y^0)} \quad (3.192)$$

$$\times \Xi_k(x^0) \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \alpha^i \frac{k_i}{|\vec{k}|}) \Xi^\dagger(y^0) \gamma^0 T(x^0) \bar{T}(y^0) e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \quad (3.193)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{N_k} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(y^0)} \quad (3.194)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\omega(x^0)}} \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}(y^0)}} e^{-i \int_{t_0}^{x^0} \omega(t') dt'} e^{i \int_{t_0}^{y^0} \bar{\omega}(t') dt'} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \quad (3.195)$$

$$\times (\omega\gamma^0 - \frac{i\dot{\omega}}{2\omega}\gamma^0 - \frac{k_i}{a(x^0)}\gamma^i + m) \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \alpha^i \frac{k_i}{|\vec{k}|}) (\bar{\omega} + \frac{i\dot{\bar{\omega}}}{2\bar{\omega}} + \frac{k_i}{a(y^0)}\gamma^i \gamma^0 + m\gamma^0), \quad (3.196)$$

wobei  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$  benutzt wurde.

Zur Durchführung des limes  $k \rightarrow 0$  soll die Zweipunktfunktion nun genau wie im Minkowskiraum skaliert werden. Es sei also wieder

$$S_\lambda^+(x, y) := \frac{1}{\lambda^{3/2}} S^+(x^0, y^0; \frac{\vec{x}}{\lambda}, \frac{\vec{y}}{\lambda}) \quad (3.197)$$

Damit folgt nach Substitution  $\frac{k}{\lambda} \rightarrow k$  für

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{\lambda^2 |\vec{k}|^2}{a^2} + m^2 + \lambda i \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\vec{k}|}{a} - \frac{1}{4} R - \frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2}} \quad (3.198)$$

Zur weiteren Vereinfachung soll eine schwache Krümmung angenommen werden, so daß Ausdrücke quadratisch in der Hubble-Konstanten  $\frac{\dot{a}}{a}$  vernachlässigt werden können. Wie in 3.2.1 skizziert, sei auch  $\frac{\ddot{a}}{a}$  von der Ordnung  $\frac{\dot{a}^2}{a^2}$ . Unter Einführung des Parameters  $\lambda'$  haben wir dann

$$\omega_{\lambda\lambda'} = \sqrt{\frac{\lambda^2 |\vec{k}|^2}{a^2} + m^2 + \lambda\lambda' i \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\vec{k}|}{a} - \lambda'^2 \frac{3}{2} \frac{\ddot{a}}{a} - \lambda'^2 \frac{9}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2}} \quad (3.199)$$

Der Beitrag 1.Ordnung in  $\lambda$  oder  $\lambda'$  ist dann

$$\omega = m + O(\lambda\lambda') + O(\lambda^2) + O(\lambda'^2) \dots \quad (3.200)$$

Für den Normierungsfaktor (3.181) ergibt die Entwicklung nach  $\lambda$

$$N_k \rightarrow u_k^\dagger m (1 - \frac{\lambda |\vec{k}|}{m}) (1 + \gamma^0) u_k \quad (3.201)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N_k} = \frac{1}{m - \lambda |\vec{k}|} = \frac{1}{m} (1 + \frac{\lambda |\vec{k}|}{m} + O(\lambda^2) + O(\lambda\lambda')) \quad (3.202)$$

da  $\omega$  in erster Ordnung rein reell ist,  $u_k^\dagger \gamma^0 u_k = 0$  ist, und die Zeitableitungen höhere Ordnungen in  $\lambda'$  beibringen würden. Entsprechend soll der Beitrag  $\sim \dot{\omega}$  in den  $\Xi$ 's vernachlässigt werden. Für  $\Xi_k u_k u_k^\dagger \bar{\Xi}$  erhält man dann

$$(m\gamma^0 - \lambda\gamma^i \frac{k_i}{a(x^0)} + m) \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \alpha^i \frac{k_i}{|\vec{k}|}) (m + \lambda\gamma^i \gamma^0 \frac{k_i}{a(y^0)} + m\gamma^0) \quad (3.203)$$



Ausmultiplikation des ersten Teiles (mit der 1) ergibt

$$\frac{1}{2} \left( 2m^2(1 + \gamma^0) - m\lambda(1 + \gamma^0)\gamma^i \frac{k_i}{a(y^0)} - m\lambda(1 - \gamma^0)\gamma^i \frac{k_i}{a(x^0)} \right) \quad . \quad (3.204)$$

Unter Berücksichtigung von  $(\gamma^i k_i)^2 = -|\vec{k}|^2$  erhält man für den Anteil  $\sim \alpha^i$

$$\frac{1}{2} \left( m(1 + \gamma^0) - \lambda\gamma^i \frac{k_i}{a(x^0)} \right) \left( m \frac{k_i}{|\vec{k}|} \gamma^0 \gamma^i (1 + \gamma^0) - \lambda \frac{|\vec{k}|}{a(y^0)} \right) \quad (3.205)$$

$$= \frac{1}{2} \left( m^2 \frac{k_i}{|\vec{k}|} (1 + \gamma^0) \gamma^0 \gamma^i (1 + \gamma^0) - m\lambda(1 + \gamma^0) \left( \frac{|\vec{k}|}{a(y^0)} + \frac{|\vec{k}|}{a(x^0)} \right) \right) \quad . \quad (3.206)$$

Mit  $(1 + \gamma^0)\gamma^0 = (1 + \gamma^0)$  und  $(1 + \gamma^0)\gamma^i(1 + \gamma^0) = 0$  verschwindet der erste Summand von (3.206) und die Zweipunktfunktion erhält damit insgesamt die Gestalt

$$\begin{aligned} -iS_\lambda^+(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\lambda^{3/2}} \frac{1}{a^{3/2}}(x_0) \frac{1}{a^{3/2}}(y_0) \frac{1}{2m^2} \left( 1 + \frac{\lambda|\vec{k}|}{m} + O(\lambda^2) + O(\lambda\lambda') \right) e^{-im(x^0 - y^0)} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left( 2m^2(1 + \gamma^0) - m\lambda(1 + \gamma^0)\gamma^i \frac{k_i}{a(y^0)} - m\lambda(1 - \gamma^0)\gamma^i \frac{k_i}{a(x^0)} \right. \\ &\quad \left. - m\lambda(1 + \gamma^0) \left( \frac{|\vec{k}|}{a(y^0)} + \frac{|\vec{k}|}{a(x^0)} \right) + O(\lambda^2) \right) e^{i\vec{k}(\frac{\vec{x}}{\lambda} - \vec{y})} \quad . \end{aligned} \quad (3.207)$$

Die auftretenden Summanden sollen nun einzeln ausintegriert werden.

•

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\lambda^{3/2}} m^2 (1 + \gamma^0) e^{i\vec{k}(\frac{\vec{x}}{\lambda} - \vec{y})} \quad (3.208)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \lambda^{3/2} m^2 (1 + \gamma^0) e^{i\vec{k}(\vec{x} - \lambda\vec{y})} \quad (3.209)$$

$$= \lambda^{3/2} m^2 (1 + \gamma^0) \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) \quad (3.210)$$

•

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\lambda^{3/2}} m\lambda(1 + \gamma^0)\gamma^i \frac{k_i}{a(y^0)} e^{i\vec{k}(\frac{\vec{x}}{\lambda} - \vec{y})} \quad (3.211)$$

$$= \lambda^{3/2} im\lambda(1 + \gamma^0)\gamma^i \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) \quad (3.212)$$

•

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\lambda^{3/2}} m\lambda(1 - \gamma^0)\gamma^i \frac{k_i}{a(y^0)} e^{i\vec{k}(\frac{\vec{x}}{\lambda} - \vec{y})} \quad (3.213)$$

$$= \lambda^{3/2} im\lambda(1 - \gamma^0)\gamma^i \frac{1}{a(x^0)} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) \quad (3.214)$$

•

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\lambda^{3/2}} m\lambda(1 + \gamma^0) \left( \frac{|\vec{k}|}{a(y^0)} + \frac{|\vec{k}|}{a(x^0)} \right) e^{i\vec{k}(\frac{\vec{x}}{\lambda} - \vec{y})} \quad (3.215)$$

$$= -\lambda^{3/2} m\lambda(1 + \gamma^0) \left( \frac{1}{a(y^0)} + \frac{1}{a(x^0)} \right) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k |\vec{k}| e^{i\vec{k}(\vec{x} - \lambda\vec{y})} \quad (3.216)$$

Die Fouriertransformierte (im Distributionssinne) von  $|\vec{k}|$  ist aber  $\sim P(\frac{1}{|\vec{x}|^4})$  ([Vil72]), wobei  $P$  den Hauptwert bedeutet. Der Beitrag ist dann

$$+\lambda^{3/2}m\lambda(1+\gamma^0)\left(\frac{1}{a(y^0)}+\frac{1}{a(x^0)}\right)8\pi P\left(\frac{1}{|\vec{x}-\lambda\vec{y}|^4}\right) \quad (3.217)$$

- Als letzte Kombination in 1.Ordnung  $\lambda$  ergibt sich noch die Paarung der ersten Korrektur der Normierung mit dem  $\lambda$ -freien Beitrag aus den  $\Xi$ :

$$\int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\lambda^{3/2}} 2m\lambda|\vec{k}|(1+\gamma^0)e^{i\vec{k}(\frac{\vec{x}}{\lambda}-\vec{y})} \quad (3.218)$$

$$= -2\lambda^{3/2}m\lambda(1+\gamma^0)8\pi P\left(\frac{1}{|\vec{x}-\lambda\vec{y}|^4}\right) \quad (3.219)$$

Die Zweipunktfunktion im Ortsraum lautet damit bis zur Ordnung  $5/2$  in  $\lambda$

$$\begin{aligned} -iS_{n.r.}^+(x,y) &= \lambda^{3/2} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(y^0)} \frac{1}{4m^2} e^{-im(x^0-y^0)} \\ &\times \left\{ (2m^2(1+\gamma^0) + im\lambda(1+\gamma^0)\gamma^i \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial x^i} + im\lambda(1-\gamma^0)\gamma^i \frac{1}{a(x^0)} \frac{\partial}{\partial x^i}) \delta(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \right. \\ &\quad \left. - m\lambda(1+\gamma^0) \left(2 - \frac{1}{a(y^0)} - \frac{1}{a(x^0)}\right) 8\pi P\left(\frac{1}{|\vec{x}-\lambda\vec{y}|^4}\right) \right\} \quad (3.220) \end{aligned}$$

$$\quad (3.221)$$

Genauso ergibt sich

$$\begin{aligned} -iS_{n.r.}^+(y,z) &= \lambda^{3/2} \frac{1}{a^{3/2}(y^0)} \frac{1}{a^{3/2}(z^0)} \frac{1}{4m^2} e^{-im(y^0-z^0)} \\ &\times \left\{ (2m^2(1+\gamma^0) - im\lambda(1+\gamma^0)\gamma^i \frac{1}{a(z^0)} \frac{\partial}{\partial z^i} - im\lambda(1-\gamma^0)\gamma^i \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial z^i}) \delta(\lambda\vec{y}-\vec{z}) \right. \\ &\quad \left. - m\lambda(1+\gamma^0) \left(2 - \frac{1}{a(y^0)} - \frac{1}{a(z^0)}\right) 8\pi P\left(\frac{1}{|\lambda\vec{y}-\vec{z}|^4}\right) \right\} \quad (3.222) \end{aligned}$$

$$\quad (3.223)$$

Das Ergebnis reduziert sich für  $a=1$  auf die Minkowskiraum-Zweipunktfunktion (2.26) bzw (2.27), wie es sein muß.

### 3.4 Das magnetische Moment in der flachen Robertson-Walker-Raumzeit

In diesem Abschnitt wird nun die Rechnung aus dem Minkowskiraum verallgemeinert. Das Matrixelement 1.Ordnung entsteht aus minkowskischen (2.21) durch Benutzung der Robertson-Walker-Zweipunktfunktion und Integration derselben über die Mannigfaltigkeit.

Das skalierte Matrixelement hat dann die Form

$$S_{\lambda(in/out)}^{(1)} = -ie \int d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 f^\dagger(x) S_\lambda^+(x,y) \gamma^\beta A_\beta(y) S_\lambda^+(y,z) \gamma^0 f(z) \quad (3.224)$$

Dabei sind die

$$d^4x \sqrt{g(x^0)} =: d\mu_1 \quad \text{usw.}$$

die invarianten Volumenelemente.

### 3.4.1 Die erste Näherung

Die Untersuchung beginnt mit der Ausmultiplikation des Integranden  $S_\lambda^+(x, y)\gamma^j A_j S_\lambda^+(y, z)$ . Es ergeben sich in 1. Ordnung  $\lambda$  folgende Kombinationen von  $\gamma$ -Matrizen:

$$(1 + \gamma^0)\gamma^j(1 + \gamma^0) = 0 \quad (3.225)$$

$$(1 + \gamma^0)\gamma^j(1 + \gamma^0)\gamma^i = 0 \quad (3.226)$$

$$(1 + \gamma^0)\gamma^i\gamma^j(1 + \gamma^0) = 2(1 + \gamma^0)\gamma^i\gamma^j \quad (3.227)$$

$$(1 + \gamma^0)\gamma^j(1 - \gamma^0)\gamma^i = 2(1 + \gamma^0)\gamma^j\gamma^i \quad (3.228)$$

$$(1 - \gamma^0)\gamma^i\gamma^j(1 + \gamma^0) = 0 \quad (3.229)$$

So verbleiben als Beitrag zur S-Matrix nur Anteile mit einer Ableitung der  $\delta$ -Funktion:

$$\begin{aligned} S_{\lambda(in/out)}^{(1)} &= \frac{e}{4m} \int d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \frac{1}{a^3(y^0)} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(z^0)} e^{-im(x^0 - z^0)} i\lambda^4 m f^\dagger(x) \\ &\quad \times \left( -\delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial z^i} \delta(\lambda\vec{y} - \vec{z}) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \lambda\vec{y}) \delta(\lambda\vec{y} - \vec{z}) (1 + \gamma^0) \gamma^i \gamma^j \right) \\ &\quad A_j(y) \gamma^0 f(z) \quad , \quad (3.230) \end{aligned}$$

womit die S-Matrix genau dieselbe Struktur wie die des Minkowskiraumes erhält (vgl. (2.32)). Es bleibt für diese Näherung also nur noch zu untersuchen, ob die auftretenden Skalenfunktionen  $a(t)$  irgendeine Veränderung der Rechnung bewirken. Dazu soll als nächstes die von den Ableitungen der  $\delta$ -Funktion geforderte partielle Integration durchgeführt werden. Die Verwendung der Vierbeinbasis, mit zeitabhängigem  $\partial_i = \frac{1}{a(x^0)} \frac{\partial}{\partial x^i}$  (siehe A.1 zur Notation) führt mit

$$\int d\mu_1 \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{x}) \quad (3.231)$$

$$= - \int dx^0 \sqrt{g(x^0)} \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial y^i} f(\vec{y}) \quad (3.232)$$

$$= - \int dx^0 \sqrt{g(x^0)} \partial_i f(\vec{y}) \quad (3.233)$$

auf

$$S_{\lambda(in/out)}^{(1)} = \frac{e}{4m} \int dx^0 \sqrt{g(x^0)} dz^0 \sqrt{g(z^0)} h(x^0) h(z^0) e^{im(x^0 - z^0)} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(z^0)} \quad (3.234)$$

$$\times \lambda^4 \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} \left( \partial_{\lambda,i} f^\dagger(\lambda\vec{y}) (1 + \gamma^0) \gamma^i \gamma^j A_j(y) \gamma^0 f(\lambda\vec{y}) \quad (3.235)$$

$$+ f^\dagger(\lambda\vec{y}) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) A_j(y) \partial_{\lambda,i} \gamma^0 f(\lambda\vec{y}) \right) \quad , \quad (3.236)$$

wobei die Testfunktion wieder als Produkt des Skalares  $h(x^0)$  mit dem Spinor  $f(\vec{x})$  aufgefasst (siehe Seite 12), und die Abkürzung  $\partial_{\lambda,i} = \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial \lambda y^i}$  für die Ableitung nach der skalierten Variable in Vierbeinbasis eingeführt wurde. Umschreiben auf

kovariante Ableitungen liefert mit  $\nabla_i f^A = \partial_i f^A + \omega_i^A B f^B$  (im Vierbein)<sup>2</sup>

$$S_{\lambda(in/out)}^{(1)} = \frac{e}{4m} \lambda^3 \int dx^0 \sqrt{g(x^0)} dz^0 \sqrt{g(z^0)} h(x^0) h(z^0) e^{im(x^0 - z^0)} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(z^0)} \quad (3.237)$$

$$\times \int d\mu_2 \frac{1}{a^3(y^0)} \left( \nabla_{y^i} f^\dagger(\lambda \vec{y}) (1 + \gamma^0) \gamma^i \gamma^j A_j(y) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \right) \quad (3.238)$$

$$- \omega_i f^\dagger(\lambda \vec{y}) (1 + \gamma^0) \gamma^i \gamma^j A_j(y) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (3.239)$$

$$+ f^\dagger(\lambda \vec{y}) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) A_j(y) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \omega_i \quad (3.240)$$

$$+ f^\dagger(\lambda \vec{y}) \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) A_j(y) \nabla_{y^i} \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (3.241)$$

Dabei ist durch Umschreiben von  $\frac{\partial}{\partial \lambda y^i}$  nach  $\frac{\partial}{\partial y^i}$  eine Potenz in  $\lambda$  entfallen.

Partielle Integration nach Satz 9 ergibt dann letztendlich

$$S_{\lambda(in/out)}^{(1)} = \frac{\lambda^3 C' e}{4m} \left\{ i \int d\mu_2 \frac{1}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) \sigma^k B_k \otimes \mathbf{1}_2 (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \right. \quad (3.242)$$

$$+ \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) \nabla_i A^i (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (3.243)$$

$$- 2 \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) A^i \nabla_i (1 + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (3.244)$$

$$- \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) \omega_i A^j (1 + \gamma^0) \gamma^i \gamma^j \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (3.245)$$

$$\left. + \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) A^j \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \omega_i \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \right\} , \quad (3.246)$$

mit

$$B_k := -\epsilon_{jik} \nabla_j A_i \quad C' := \int dx^0 dz^0 \sqrt{g(x^0)} \sqrt{g(z^0)} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(z^0)} e^{-im(x^0 - z^0)} h(x^0) h(z^0), \quad (3.247)$$

wobei  $\nabla$  natürlich die kovariante Ableitung nach  $\vec{y}$  meint.<sup>3</sup> Unter Beachtung von  $\omega_i \gamma^i \gamma^j = -\gamma^j \gamma^i \omega_i$  (siehe für unsere Raumzeit (3.105) und (3.106)) lassen sich (3.245) und (3.246) zu

$$2 \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) A^j \gamma^j \gamma^i (1 + \gamma^0) \omega_i \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (3.248)$$

<sup>2</sup>dieses Vorgehen ist für den vorliegenden Fall eigentlich schon übertrieben, und man könnte natürlich einfach mit den gewöhnlichen Ableitungen weiterrechnen. Zum Testen der allgemeineren Möglichkeiten des Formalismus soll jedoch, wo immer möglich, wieder die kovariante Schreibweise eingesetzt werden

<sup>3</sup>Ohne den Kunstgriff der Verwendung von kovarianten Ableitungen in (3.241) hätte man hier  $-\epsilon_{jik} \partial_j A_i$  erhalten. Das ist natürlich kein Widerspruch, sondern folgt in unserer Raumzeit aus  $\Gamma^{\alpha}_{ji} A_\alpha = 0$  für  $A_0 = 0$ .

zusammenfassen, und dieser Ausdruck kürzt genau die Spinzusammenhänge des  $\nabla$  in (3.244), so daß nur gewöhnliche Ableitungen auf Testfunktionen wirken:

$$S_{\lambda(in/out)}^{(1)} = \frac{\lambda^3 C' e}{4m} \left\{ i \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) \sigma^k B_k \otimes \mathbf{1}_2 (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \right. \quad (3.249)$$

$$+ \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) \nabla_i A^i (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \quad (3.250)$$

$$\left. - 2 \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\lambda \vec{y}) A^i \partial_i (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\lambda \vec{y}) \right\} \quad (3.251)$$

$$= \frac{C' e}{4m} \left\{ i \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\vec{y}) \sigma^k B_k \otimes \mathbf{1}_2 (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \quad (RW.I)$$

$$+ \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\vec{y}) \nabla_i A^i (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \quad (RW.II)$$

$$\left. - 2\lambda \int \frac{d\mu_2}{a^3(y^0)} f^\dagger(\vec{y}) A^i(y^0, \frac{\vec{y}}{\lambda}) \partial_i (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \right\} \quad (RW.III)$$

**Berechnung des magnetischen Momentes** Zunächst zur Auswertung der Konstanten  $C'$ (3.247). Wie schon im Minkowskiraum muß  $h(x^0)$  normiert werden, so daß

$$\int dx^0 \sqrt{g(x^0)} \bar{h}(x^0) h(x^0) = \int dx^0 a(x^0)^3 \bar{h}(x^0) h(x^0) = 1 \quad . \quad (3.252)$$

Es soll daher  $h(x^0)$  von der Form

$$h(x^0) = \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \check{h}(x^0) \quad , \quad \int dx^0 \bar{\check{h}}(x^0) \check{h}(x^0) = 1$$

angesetzt werden. Damit wird wieder

$$C' = \hat{\check{h}}(m) \check{h}(m) \quad ,$$

welches wieder 1 gesetzt werden kann (siehe Seite 14).

Wegen  $(RW.III) \sim \lambda$  verschwindet  $(RW.III)$  im limes ruhender Teilchen. So verbleiben wir im limes  $\lambda \rightarrow 0$  wieder mit

$$\frac{ie}{4m} \int d\mu_2 \frac{1}{a^3(y^0)} f^\dagger(\vec{y}) \sigma^k B_k \otimes \mathbf{1}_2 (\mathbf{1} + \gamma^0) \gamma^0 f(\vec{y}) \quad . \quad (3.253)$$

Wird der Testspinor  $f$  in Analogie zu (2.57) noch angesetzt als

$$f^A(\vec{y}) = f(\vec{y}) u_s^A \quad \text{mit} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{usw.} \quad , \quad (3.254)$$

mit dem Unterschied, daß jetzt Vierbeinkomponenten gemeint sind, ergibt sich wiederum eine Reduktion auf die z-Komponente des Magnetfeldes. Wenn wieder die z-Richtung durch die Richtung des Magnetfeldes definiert wird, folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_{in/out}^{(1)} = \frac{ie}{2m} B \int d\mu_2 \bar{f} f = \frac{ie}{2m} B \quad (3.255)$$

mit  $d\mu_2 = a^3 d^4 y$  bei Auswertung über einen Zeitraum der Länge 1 .  
Die Funktionalableitung ergibt

$$\mu := \frac{2}{i} \frac{\delta S^{(1)}(f_\lambda, B)}{\delta B} \Big|_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{2}{i} \frac{\delta}{\delta B} \frac{ie}{2m} B = \frac{e}{m} \quad (3.256)$$

Zusammenfassend lautet also das bisherige Ergebnis:

**Satz 14.** *Es sei  $f_s^A(x)$  eine spinorielle Testfunktion derart, daß  $f^A(x) = h(x^0)f(\vec{x})u_s^A$  mit der ins Vierbein gelifteten Spinorbasis  $\{u_s\}$  aus (2.57),  $\int dx^0 \sqrt{g(x^0)} \bar{h}(x^0)h(x^0) = 1$  und  $\int d^3x \bar{f}(\vec{x})f(\vec{x}) = 1$ . Durch  $f_\lambda(\vec{x}) := \lambda^{3/2}f(\lambda\vec{x})$  werde eine Folge von Testfunktionen definiert. Weiterhin sei  $B_k = -\epsilon_{jik} \nabla_j A_i$  ein konstantes Magnetfeld in  $z$ -Richtung, welches über einen Einheitszeitraum angeschaltet werde. Dann hat das magnetische Moment  $\mu := \frac{2}{i} \frac{\delta S^{(1)}(f_\lambda, B)}{\delta B} \Big|_{\lambda \rightarrow 0}$  in niedrigster Ordnung der Hubble-Konstanten und 0-ter adiabatischen Näherung den Wert  $\frac{e}{m}$ . Es tritt somit keine Korrektur zum Minkowskiraum auf.*

### 3.4.2 Die nächste Näherung

Es zeigt sich also, daß die bisher gemachten Annahmen zu grob sind, um einen Effekt zu zeigen. Es soll daher ein kurzer Blick auf die folgende Korrektur geworfen werden.

Es sei also zu (3.199) zurückgekehrt, um die Näherung (3.200) etwas zu verfeinern. Um die in  $\lambda'$  linearen Terme mitzuberücksichtigen, muß die Ordnung  $\lambda\lambda'$  durch die vorige Rechnung mitgeführt werden. Es ist dann

$$\omega_k = m + i \frac{1}{2} \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\vec{k}|}{am} \quad . \quad (3.257)$$

Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen für die Rechnung:

1. Der Faktor  $\Xi_k u_k u_k^\dagger \Xi$  muß korrigiert werden.
2. Der Normierungsfaktor könnte sich verändern.
3. Der zeitliche Exponentialfaktor aus der adiabatischen Näherung erhält einen  $k$ -Abhängigen Zusatz.

Diese Aspekte werden nun der Reihe nach untersucht.

**Korrektur von  $\Xi_k u_k u_k^\dagger \Xi$**  Gleichung (3.203) muß um die Summanden

$$\frac{1}{2} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a}(x^0) \frac{|\vec{k}|}{a(x^0)m} \gamma^0 (1 + \alpha^i \frac{k_i}{|\vec{k}|}) m (1 + \gamma^0) \quad (3.258)$$

$$- \frac{1}{2} m (1 + \gamma^0) (1 + \alpha^i \frac{k_i}{|\vec{k}|}) i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a}(y^0) \frac{|\vec{k}|}{a(y^0)m} \quad (3.259)$$

erweitert werden. Damit sind dann alle Beiträge bis  $\lambda^2$  und  $\lambda'^2$  abgedeckt. Ausmultiplikation ergibt

$$\frac{1}{2} i \lambda \lambda' |\vec{k}| \left( \frac{\dot{a}}{a}(x^0) \frac{1}{a(x^0)} - \frac{\dot{a}}{a}(y^0) \frac{1}{a(y^0)} \right) (1 + \gamma^0) \quad (3.260)$$

$$+ \frac{1}{2} i \lambda \lambda' \left( \frac{\dot{a}}{a}(x^0) \frac{k_i}{a(x^0)} (1 - \gamma^0) - \frac{\dot{a}}{a}(y^0) \frac{k_i}{a(y^0)} (1 + \gamma^0) \right) \gamma^i \quad . \quad (3.261)$$

Ein Vergleich mit (3.207) zeigt, daß alle dort auftretenden Faktoren  $\frac{\vec{k}}{a(x^0)}$  durch  $\vec{k} \left( \frac{1}{a(x^0)} + \frac{1}{2m} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(x^0) \right)$ , und die  $\frac{\vec{k}}{a(y^0)}$  durch  $\vec{k} \left( \frac{1}{a(y^0)} - \frac{1}{2m} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(y^0) \right)$  ersetzt werden müssen.

**Der Exponentialfaktor** Mit (3.257) bekommt man für  $\bar{T}T$

$$\begin{aligned}
e^{-i \int_{t_0}^{x^0} \omega(t') dt'} \overline{e^{-i \int_{t_0}^{y^0} \omega(t') dt'}} &\rightarrow e^{-im(x^0 - y^0)} e^{\frac{1}{2} \lambda \lambda' \frac{|\vec{k}|}{m} \int_{t_0}^{x^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt'} e^{\frac{1}{2} \lambda \lambda' \frac{|\vec{k}|}{m} \int_{t_0}^{y^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt'} \\
&= e^{-im(x^0 - y^0)} \left( 1 + \frac{1}{4} \lambda \lambda' \frac{|\vec{k}|}{m} \left( \int_{t_0}^{x^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt' + \int_{t_0}^{y^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt' \right) + O(\lambda^2) + O(\lambda'^2) \right).
\end{aligned} \tag{3.262}$$

Wird dies nun in (3.207) eingesetzt, so ergibt sich nur der Zusatzterm

$$+\frac{1}{4} \lambda \lambda' |\vec{k}| \left( \int_{t_0}^{x^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt' + \int_{t_0}^{y^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt' \right) m(1 + \gamma^0) \quad , \tag{3.264}$$

da alle anderen so erzeugten Beiträge höherer Ordnung sind.

**Der Normierungsfaktor** Der Normierungsfaktor  $\bar{T}T u^\dagger \Xi^\dagger \Xi u$  (3.181) ändert sich ebenfalls, da  $\omega$  nun einen Imaginärteil besitzt.

$$e^{2 \int_{t_0}^{x^0} \text{Im } \omega dt'} \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \lambda \lambda' \frac{|\vec{k}|}{m} \int_{t_0}^{x^0} \dot{a} dt' \tag{3.265}$$

Der Anteil aus den  $u^\dagger \Xi^\dagger \Xi u$  bleibt nach Einsetzen der Entwicklung (3.257) in dieser Ordnung derselbe, da

$$|\omega|^2 = \omega \bar{\omega} = \left( m + \frac{1}{2} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\vec{k}|}{am} + \dots \right) \left( m - \frac{1}{2} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\vec{k}|}{am} + \dots \right) = m^2 + O(\lambda^2 \lambda'^2) \tag{3.266}$$

und auch die auftretenden Imaginärteile alle  $\sim \dot{\omega}$  sind, und damit mindestens  $\sim \lambda'^2$ . Damit muß für  $\frac{1}{N_k}$  der Ausdruck

$$1 + \frac{\lambda |\vec{k}|}{m} + \frac{1}{2} \lambda \lambda' |\vec{k}| \int_{t_0}^{x^0} \dot{a} dt' \Big|_{a(t)=1}$$

eingesetzt werden.

Insgesamt muß also (3.207) durch

$$\begin{aligned}
-i S_\lambda^+(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{1}{\lambda^{3/2}} \frac{1}{a^{3/2}}(x_0) \frac{1}{a^{3/2}}(y_0) \frac{1}{2m^2} \left( 1 + \frac{\lambda |\vec{k}|}{m} \right) e^{-im(x^0 - y^0)} \\
&\times \frac{1}{2} \left\{ 2m^2(1 + \gamma^0) \left[ 1 + \frac{1}{4} \lambda \lambda' \frac{|\vec{k}|}{m} \left( \int_{t_0}^{x^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt' + \int_{t_0}^{y^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt' + 2 \int_{t_0}^{x^0} \dot{a} dt' \Big|_{a(t)=1} \right) \right] \right. \\
&\quad - m \lambda (1 + \gamma^0) \gamma^i k_i \left( \frac{1}{a}(y^0) - \frac{1}{2m} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(y^0) \right) \\
&\quad - m \lambda (1 - \gamma^0) \gamma^i k_i \left( \frac{1}{a}(x^0) + \frac{1}{2m} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(x^0) \right) \\
&\quad \left. - m \lambda |\vec{k}| (1 + \gamma^0) \left( \frac{1}{a}(y^0) - \frac{1}{2m} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(y^0) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a}(x^0) + \frac{1}{2m} i \lambda \lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(x^0) \right\} e^{i \vec{k} \cdot (\frac{x}{\lambda} - \vec{y})}
\end{aligned} \tag{3.267}$$

ersetzt werden. Die Ortsraumausdrücke ändern sich entsprechend zu

$$\begin{aligned}
-iS_{n.r.}^+(x, y) &= \lambda^{3/2} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(y^0)} \frac{1}{4m^2} e^{-im(x^0-y^0)} \\
&\times \left\{ 2m^2(1+\gamma^0)\delta(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \right. \\
&\quad + im\lambda(1+\gamma^0)\gamma^i \left( \frac{1}{a}(y^0) - \frac{1}{2m}i\lambda\lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(y^0) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \\
&\quad + im\lambda(1-\gamma^0)\gamma^i \left( \frac{1}{a}(x^0) + \frac{1}{2m}i\lambda\lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(x^0) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \\
&\quad - m\lambda(1+\gamma^0) \left( 2 - \frac{1}{a}(y^0) + \frac{1}{2m}i\lambda\lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(y^0) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{a}(x^0) - \frac{1}{2m}i\lambda\lambda' \frac{\dot{a}}{a^2}(x^0) \right) 8\pi P\left(\frac{1}{|\vec{x}-\lambda\vec{y}|^4}\right) \\
&\quad - \frac{1}{4}\lambda\lambda'm(1+\gamma^0) \left( \int_{t_0}^{x^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt' \right. \\
&\quad \quad \left. + \int_{t_0}^{y^0} \frac{\dot{a}}{a^2} dt' + 2 \int_{t_0}^{x^0} \dot{a} dt' |_{a(t)=1} \right) 8\pi P\left(\frac{1}{|\vec{x}-\lambda\vec{y}|^4}\right) \left. \right\} . \quad (3.268)
\end{aligned}$$

Da die keine neuen Kombinationen von  $\gamma$ -Matrizen auftreten, treten bei der Berechnung der *S-Matrix* weiterhin in dieser Ordnung nur die Ableitungen der  $\delta$ -Funktion auf. Aus (3.230) wird also einfach

$$\begin{aligned}
S_{\lambda(in/out)}^{(1)} &= \frac{e}{4m} \int d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \frac{1}{a^3(y^0)} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(z^0)} e^{-im(x^0-z^0)} \\
&\quad i\lambda^4 m f^\dagger(x) \\
&\quad \times \left( - \left( 1 + \frac{1}{2m}i\lambda' \frac{\dot{a}}{a}(y^0) \right) \delta(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial z^i} \delta(\lambda\vec{y}-\vec{z}) \gamma^j \gamma^i (1+\gamma^0) \right. \\
&\quad \left. + \left( 1 - \frac{1}{2m}i\lambda' \frac{\dot{a}}{a}(y^0) \right) \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \delta(\lambda\vec{y}-\vec{z}) (1+\gamma^0) \gamma^i \gamma^j \right) \\
&\quad A_j(y) \gamma^0 f(z) \quad , \quad (3.269)
\end{aligned}$$

so daß hier einfach ein zusätzlicher Summand

$$\begin{aligned}
&- \frac{e}{4m} \int d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \frac{1}{a^3(y^0)} \frac{1}{a^{3/2}(x^0)} \frac{1}{a^{3/2}(z^0)} \frac{1}{2m} i\lambda' \frac{\dot{a}}{a}(y^0) e^{-im(x^0-z^0)} \\
&\quad i\lambda^4 m f^\dagger(x) \times \left( \delta(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial z^i} \delta(\lambda\vec{y}-\vec{z}) \gamma^j \gamma^i (1+\gamma^0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a(y^0)} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\vec{x}-\lambda\vec{y}) \delta(\lambda\vec{y}-\vec{z}) (1+\gamma^0) \gamma^i \gamma^j \right) \\
&\quad A_j(y) \gamma^0 f(z) \quad (3.270)
\end{aligned}$$

erscheint. Man beachte die gegenüber (3.230) veränderte Vorzeichenstruktur. Antivertauschen der  $\gamma$ , partielle Integration und Ausführung der  $\delta$ -Funktionen ergeben

$$\begin{aligned}
&- \frac{e}{4m} C' \int d\mu_2 \frac{1}{a^3(y^0)} \frac{1}{2m} i\lambda' \frac{\dot{a}}{a}(y^0) e^{-im(x^0-z^0)} i\lambda^3 m f^\dagger(\lambda\vec{y}) \\
&\quad \times (2\gamma^i \gamma^j A_j(y) \partial_i + \gamma^i \gamma^j \partial_i A_j + 2A^i \partial_i) \gamma^0 f(\lambda\vec{y}) \quad . \quad (3.271)
\end{aligned}$$

Man bekommt also im Vergleich zu den ähnlich gebauten Ausdrücken (2.32) und (3.230) den zusätzlichen Beitrag  $\sim 2\gamma^i \gamma^j A_j(y) \partial_i$ . Da die Ableitungen auf die Testfunktionen wieder eine Potenz  $\lambda$  liefern, ergibt sich aber daraus im limes  $\lambda \rightarrow 0$



nichts neues. Der Rest der Rechnung ist also identisch mit den vorherigen, und es ergibt sich eine Korrektur am magnetischen Moment

$$\mu = \left(1 - \frac{1}{2m} i \int dy^0 \frac{\dot{a}}{a}(y^0)\right) \frac{e}{m} \quad . \quad (3.272)$$

Der Korrekturbeitrag ist also rein imaginär! Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß das magnetische Moment  $\mu$  in Definition 2 implizit über den Erwartungswert  $\langle H_{int} \rangle$  des Wechselwirkungshamiltonians definiert wurde. Ein Blick auf die Dirac-Gleichung (3.116) zeigt aber, daß die Wechselwirkung mit dem Gravitationsfeld durch den antihermiteschen Operator  $i\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}$  beschrieben wird, und deshalb komplexe Eigenwerte zu erwarten sind. Soll also, wie üblich, die in der S-Matrix durch das Gravitationsfeld hervorgerufene Veränderung als Korrektur zum nicht-gravitativen Ein-Teilchen-Hamiltonoperator interpretiert werden, so ergeben sich *notwendigerweise* komplexe Energien.

Diese wiederum sind aus der quantenmechanischen Streutheorie („Resonanzstreuung“) wohlbekannt (siehe dazu etwa [LL79]). Eine komplexe Energie bewirkt bei einer Wellenfunktion  $\sim e^{iEt}$  einfach einen Abfall aller auftretenden Wahrscheinlichkeiten mit  $e^{-2\text{Im}E t}$ , woraus sich eine Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit von  $w = \frac{2\text{Im}E}{\hbar}$  ergibt<sup>4</sup>. Der antihermitesche Anteil des Hamiltonoperators führt also zu einem exponentiell abfallendem Erwartungswert seines hermiteschen (also physikalischen) Anteils.

Die somit auf dem Niveau der Ein-Teilchen-Theorie zu beobachtende Abnahme der Wahrscheinlichkeiten soll hier provisorisch als Zerfall des Elektrons interpretiert werden, wobei erst eine eingehende Analyse den Zusammenhang mit den bekannten Teilchenerzeugungs- oder Vernichtungsprozessen im Gravitationsfeld zeigen müßte. Es sei nun zur Berechnung dieser Zerfallswahrscheinlichkeit wieder zu (3.272) zurückgekehrt. Zunächst sei bemerkt, daß das Integral nur über den Zeitraum der Wirkung des  $B$ -Feldes zu erstrecken ist. Geht man davon aus, daß  $\frac{\dot{a}}{a}(y^0)$  über den Integrationszeitraum konstant ist, was bei einem Zeitraum der Länge 1 bei dem heutigen Wert der Hubble-Konstanten von etwa  $1,78 \cdot 10^{-18} s^{-1}$  sicherlich möglich ist, so ergibt sich nach Berücksichtigung aller Faktoren  $\hbar$  und  $c$  eine Korrektur von

$$-i \frac{1}{2mc^2} \frac{\dot{a}}{a} \hbar \approx -i 10^{-39} \quad . \quad (3.273)$$

Unter Annahme eines Magnetfeldes von 1 Tesla ergibt sich eine Zerfallswahrscheinlichkeit von etwa  $10^{-28} s^{-1}$ , entsprechend einer mittleren Lebensdauer von ungefähr  $10^{20}$  Jahren.

Für den Erwartungswert der Energie gilt entsprechend in erster Ordnung eine observable Korrektur um  $2\vec{B}\text{Im}\vec{\mu}$ . Hier wäre also eine andere, sich an rein observablen Größen orientierende Definition des magnetischen Momentes möglich als  $\mu_{obs} := \text{Re}\mu + 2\text{Im}\mu$ , die dann eine reelle Korrektur der Größenordnung  $10^{-39}$  liefern würde.

### 3.5 Zusammenfassung und Diskussion

Das magnetische Moment des Elektrons wurde bei schwacher Hubble-Konstante für eine flache Robertson-Walker-Raumzeit berechnet. Es stellt sich heraus, daß in niedrigster Ordnung  $\frac{\dot{a}}{a}$  keine Korrekturen im Vergleich zum Minkowskiraum auftreten. Die verwendete Näherung (3.200) ist also zu grob gewählt, und kann durch die

<sup>4</sup>Wird die Dirac-Gleichung direkt als Wellenfunktion *eines* Teilchens aufgefaßt, so ergibt sich das hier gesagte direkt aus der Lösung aus Satz 12, die genau von der „quasistationären“ Form  $e^{-iEt} e^{-\frac{t}{2}}$  ist.

Näherung (3.257) verbessert werden. Das magnetische Moment bekommt dadurch einen imaginären Extrabeitrag, der die Instabilität der Ein-Teilchen-Zustände widerspiegelt. Dieses führt insbesondere auf einen exponentiell in der Zeit abfallenden Erwartungswert der Energie. Der observable Gehalt eines komplexen magnetischen Momentes besteht also in erster Ordnung in einer Korrektur der Energieerwartungswerte in einer Größenordnung von ungefähr  $10^{-39}$ . Nun ist diese Korrektur aber um den Faktor  $\sim 10^{28}$  kleiner, als die bisher berechneten und experimentell bestätigten Anomalien aus den Strahlungskorrekturen, und damit für alle praktischen Zwecke bedeutungslos.

Umgekehrt müßte die Hubble-Konstante etwa bei  $1,5 \cdot 10^9 s^{-1}$ , also 27 Größenordnungen über dem heutigen Wert liegen, damit ein Effekt innerhalb der heutigen Meßgenauigkeit von ungefähr  $10^{-12}$  auftreten würde. So ein großer Wert von  $\frac{\dot{a}}{a}$  wird aber allenfalls in sehr frühen Phasen des Universums erreicht. So zeigt sich denn, daß das zu Anfang gesteckte Ziel, einen meßbaren Effekt zu berechnen, mit der flachen Robertson-Walker-Raumzeit aufgrund der Kleinheit der Korrekturen im Rahmen des heute experimentell möglichen nicht zu erreichen ist.<sup>5</sup> Andererseits ist ein Beweis der Abhängigkeit einer fundamentalen Naturkonstante von den kosmischen Rahmenbedingungen sicherlich von konzeptionellem Interesse sowohl für die Elementarteilchenphysik als auch für die Kosmologie.

---

<sup>5</sup>Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, durch die Beobachtung sehr alter Objekte (z.B. Quasare) einen experimentellen Hinweis auf eine Änderung des magnetischen Momentes zu finden.

# Kapitel 4

## Ausblick

Von der hier vorgestellten Rechnung ergeben sich mehrere Pfade zum Weiterdenken. Der erste Weg geht zurück zu den Grundlagen und ergibt sich aus der Feststellung verschiedener Mängel dieser Arbeit. Wie schon vorher erwähnt fehlt bisher eine explizite Konstruktion der S-Matrix auf gekrümmter Raumzeit für die QED, obwohl keine prinzipiellen Unterschiede zur  $\phi^4$ -Theorie auftreten sollten. Ebenso bleibt die einfache und sinnvoll erscheinende aber unbewiesene Übertragung der Konstruktion der homogenen und isotropen Zustände aus der skalaren Theorie in Behauptung 1 letztlich unbefriedigend. Ebenso wäre eine Konstruktion der adiabatischen Näherungslösungen für die QED ohne Rückgriff auf die Klein-Gordon-Gleichung aus zwei Gründen wünschenswert. Erstens ist die Klein-Gordon-Gleichung aus theoretischer Sicht aus der Dirac-Gleichung abgeleitet (siehe die Konstruktion des Klein-Gordon-Operators in Abschnitt 3.1.3), so daß die bekannte skalare adiabatische Näherung als „Quadrat“ der spinoriellen Näherung darzustellen sein müßte; und zweitens sollte sich eigentlich die hier „per Hand“ durchgeführte Normierung der Dirac-Lösungen direkt aus dem Näherungsalgorithmus ergeben. Zu diesem Themenkreis siehe auch [Wel97].

Der zweite Weg geht in Richtung einer Verallgemeinerung der Rechnung auf andere Raumzeiten und höhere Ordnungen in der Hubble-Konstanten oder Störungstheorie. Die Verwendung der hier vorgestellten Methoden auf Robertson-Walker-Raumzeiten mit räumlicher Krümmung sollte mit etwas größerem technischem Aufwand möglich sein. Interessanter wäre jedoch sicherlich der Versuch, in einer Schwarzschild-Metrik zu rechnen, da erstens der Einfluß des Schwerefeldes der Erde auf die hier durchgeführten Experimente der Elementarteilchenphysik zur Diskussion gestellt werden könnte, und zweitens Sterne oder gar schwarze Löcher Gravitationsfelder in einer Größenordnung zur Verfügung stellen, die Effekte in einem beobachtbarem Maßstab erzeugen könnten.

Auch die Berechnung höherer Ordnungen in der Hubble-Konstanten in der flachen Robertson-Walker-Raumzeit könnte von theoretischem Interesse sein, da u.U. qualitativ neue Effekte auftreten.

Höhere Ordnungen Störungstheorie ließen sich vermutlich ebenfalls berechnen. Für eine Berechnung von loop-Graphen in der  $\phi^4$ -Theorie im Ortsraum sei auf [Pra97] verwiesen.

# Anhang A

## A.1 Notationen und Konventionen

Die *Fouriertransformation* wird durchgehend mit asymmetrischer  $\pi$ - Konvention benutzt:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \hat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}$$
$$\hat{f}(\vec{k}) = \int d^3 x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}}$$

Die *Tensorindizes*  $\alpha, \beta, \dots$  sind immer Vierbeinkomponenten, während  $\mu, \nu, \dots$  Koordinatenbasiskomponenten sind.

Die Ableitung  $\partial_\alpha$  ist also als  $A_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  definiert. Die räumlichen Indizes  $i, j, \dots$  sind immer Vierbeinkomponenten, insbesondere ist  $\partial_i$  von der Ableitung in Koordinatenbasis zu unterscheiden, die mit  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  immer ausgeschrieben wird.

Als *Spinorindizes* werden ausschließlich große lateinische Buchstaben  $A, B, \dots$  verwendet.

Oftmals wird für Spinoren der Ordnung (1,1) (also ein Index oben, einer unten) einfach die *Matrixschreibweise* benutzt. Dann bedeutet  $a^\dagger$  die adjungierte Matrix zu  $a$ , und  $\bar{a}$  ist die aus der Dirac-Theorie bekannte Kombination  $a^\dagger \gamma^0$ . Bei *Skalaren* bedeutet  $\bar{a}$  den konjugiert komplexen. Eine Verwechslung mit den quergestrichenen Matrizen ist hoffentlich ausgeschlossen.

## A.2 $\gamma$ -Matrizen

Es wird die Standarddarstellung der  $\gamma$ -Matrizen benutzt, d.h.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \sigma^i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\sigma^i & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Dies ist eine Darstellung der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta} \quad (\text{A.6})$$

Die bisweilen auftretenden Matrizen  $\alpha^i$  sind definiert durch

$$\alpha^i := \gamma^0 \gamma^i \quad (\text{A.7})$$

Eine nützliche und im Text mehrfach gebrauchte Folgerung ist

$$\gamma^i \gamma^j = i\epsilon_{ijk} \sigma^k \otimes \mathbf{1}_2 - \delta_{ij} \mathbf{1}_4 \quad (\text{A.8})$$

Dies folgt unmittelbar aus  $\sigma^i \sigma^j = -i\epsilon_{ijk} \sigma^k + \delta_{ij} \mathbf{1}_2$ .

# Literaturverzeichnis

- [BD66] J.D.Bjorken / S.D.Drell *Relativistische Quantenmechanik* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966
- [BiD82] N.D.Birell / P.C.W.Davies *Quantum Fields in Curved Space* Cambridge University Press, 1982
- [BF97] R.Brunetti / K.Fredenhagen *Interacting Quantum Fields in Curved Space: Renormalizability of  $\phi^4$*  gr-qc, 9701048,1997, Preprint
- [BFK96] R.Brunetti, K.Fredenhagen, M.Köhler *The microlocal spectrum condition and Wick polynomials of free fields on curved spacetime* Communications in Mathematical Physics, 180:312, 1996
- [DB60] B.S.DeWitt / K.Brehme *Radiation Damping in a gravitational Field* Annals of Physics, 9:220-259, 1960
- [Dim82] J.Dimock *Dirac Quantum Fields on a Manifold* Transactions of the American Mathematical Society, 269:133, 1982
- [Ful89] S.Fulling *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Spacetime* Cambridge University Press, 1989
- [Had96] M.J.Hadley *A Gravitational Explanation for Quantum Mechanics* quant-ph/9609021, 1996, Preprint
- [Has96] K.Hasselmann *The metron model. Elements of a Unified Deterministic Theory of Fields and Particles. Part 1-4* Physics Essays 9:311, 9:460 (Teile 1 und 2), 1996
- [HP96] S.Hawking / R.Penrose *The Nature of Space and Time* Princeton University Press, 1996
- [Jun95] W.Junker *Adiabatic Vakua and Hadamard States for Scalar Quantum Fields in Curved Spacetime* Ph.D.thesis, II.Institut f. Theoretische Physik, Hamburg,1995. DESY-Preprint 95-144
- [KW91] B.Kay / R.M.Wald *Theorems on the Uniqueness and Thermal Properties of Stationary, Non-Singular, Quasifree States on Spacetimes with a Bifurcate Killing Horizon* Physical Reports, 207:49, 1991
- [Lic64] A.Lichnerowicz *Champs spinoriels et propagateurs* Bull. Soc. Math. France, 92:11 1964
- [LL79] L.D. Landau / E.M. Lifschitz *Lehrbuch der theoretischen Physik Band III* 9.Auflage, Akademie-Verlag Berlin, 1979
- [LR90] C.Lüders / J.E.Roberts *Local quasiequivalence and adiabatic vacuum states* Comm. Math. Phys., 134:29, 1990

- [Nak90] M.Nakahara *Geometry, Topology and Physics* Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1990
- [Par69] L.Parker *Quantized fields and particle creation in expanding universes I* Phys. Rev. 183:1057, 1969 und *Quantized fields and particle creation in expanding universes II* Phys. Rev.D, 3:346, 1971
- [Pra97] D.Prange *Kausale Störungstheorie und differentielle Renormierung* Diplomarbeit, II.Institut für theoretische Physik, Universität Hamburg, 1997
- [Rad92] M.J.Radzikowski *The Hadamard condition and Kay's conjecture in quantum field theory on curved spacetime* Ph.D. thesis, Princeton University, 1992
- [Sch95] G.Scharf *Finite Quantum Electrodynamics* 2nd ed. Springer 1995
- [Vil72] N.Y.Vilenkin *Funktional Analysis* engl. ed. , Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1972
- [Wal84] R.M.Wald *General Relativity* The University of Chicago Press, 1984
- [Wal94] R.M.Wald *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* The University of Chicago Press, 1994
- [Wel97] M.Wellmann *Adiabatische Vakuumzustände des Dirac-Feldes auf einer gekrümmten Raumzeit* Diplomarbeit, II.Institut für theoretische Physik, Universität Hamburg, 1997

### **Danke schön**

Zuerst möchte ich mich bei meinem Betreuer K. Fredenhagen für die überaus geduldige und freundliche Unterstützung bei Anfertigung dieser Arbeit bedanken.

Ein großes „Danke schön“ an Dirk, Mark und Tim für zahllose fruchtbare und hilfreiche Diskussionen, die den Verlauf der Arbeit begleitet und mitgeprägt haben.

Dank auch an J.-P. Heymann für eine hingebungsvolle Einführung in den Umgang mit elektronischen Rechen- bzw. Textverarbeitungsmaschinen, und für jahrelanges gutes Teamwork während des Studiums.

Schließlich ein besonderer Dank an meine Eltern, die mir durch freizügige finanzielle Unterstützung ein sorgenfreies Studium ermöglicht haben.

### **Erklärung**

Ich versichere hiermit, diese Arbeit unter alleiniger Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel selbständig angefertigt zu haben.

Hamburg, den