Übungsblatt 1 — Quantenmechanik I — SS 06

Abgabetermin: 10.4.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2$$

Berechnen Sie $\vec{x}(t)$, $\vec{p}(t)$ aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sowie die Energie entlang der Bahnkurve. Welche Bahn beschreibt das System im Phasenraum?

Aufgabe 2 (2 Punkte)

a) Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{p_i, x_j\}$, $\{x_i, x_j\}$, $\{p_i, p_j\}$, $\{p_i, H\}$ und $\{x_i, H\}$, wobei H die Hamiltonfunktion ist und $\vec{p} = \sum_{i=1}^{3} p^i \vec{e}_i$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x^i \vec{e}_i$.

b) Zeigen Sie, daß die Poisson-Klammer die Eigenschaften
$\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$ und $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$
besitzt, wobei f, g, h beliebige Funktionen von $\vec{p}$ und $\vec{x}$ sind.

c) Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$$

Hinweis:

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Für Operatoren A, B definiert man

$$[A, B] := AB - BA.$$

a) Berechnen Sie $[x_i, x_j]$, $[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}]$, $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]$.

b) Zeigen Sie $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$ und $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß die Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p\, \phi(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{x}\cdot\vec{p}-E(\vec{p})\,t)}$$

die Gleichung

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi$$

für $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ erfüllt. ($\Delta \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$)

b) Berechnen Sie explizit das Integral in a) für

$$\phi(\vec{p}) = A\, e^{-\frac{d^2(\vec{p}-\vec{p}_0)^2}{\hbar^2}} \;,$$

wobei A, d relle Konstanten sind.

Hinweis: Ergänzen Sie den Exponenten quadratisch und benutzen Sie $\int d^3p e^{-a\vec{p}^2} = (\frac{\pi}{a})^{\frac{3}{2}}$.

c) Zeigen Sie

$$|\psi|^2 = \frac{1}{[2\pi d^2(1+u^2)]^{\frac{3}{2}}}\; e^{-\frac{(\vec{x}-\frac{\vec{p}t}{m})^2}{2d^2(1+u^2)}}$$

und berechnen Sie u. Hierbei ist A so gewählt worden, daß $\int |\psi|^2 = 1$ gilt.