Übungsblatt 3 — Quantenmechanik I — SS 06

Abgabetermin: 27.4.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

a) Ein unitärer Operator U erfüllt die Bedingung $U\,U^\dagger = U^\dagger\,U = 1$.

Welche Eigenwerte hat U?

b) Gegeben sei ein hermitescher Operator A. Zeigen Sie , daß $U = e^{iA}$ ein unitärer Operator ist und berechnen Sie die Eigenwerte von U als Funktion der Eigenwerte von A.

Hinweis: Die Exponentialfunktion eines Operators ist durch die Reihenentwicklung $e^{iA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iA)^n$ definiert.

c) Ψ sei die Eigenfunktion eines hermiteschen Operators A. Zeigen Sie

$$< \Psi|\,[A,B]\,|\Psi >= 0$$

für jeden beliebigen Operator B.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, $(\Delta p)^2$ und $\Delta x\,\Delta p$ im Eigenzustand ψ_n des 1-dim. harmonischen Oszillators.

Hinweis: : Benutzen Sie die Auf- und Absteigeoperatoren $a, a^\dagger$.

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich ein harmonischer Oszillator im Zustand $\Psi(x, t = 0) = c\,(\psi_0 + \psi_1)$, wobei ψ_0 und ψ_1 die normierten Eigenzustände des 1-dim. harmonischen Oszillators sind.

- Bestimmen Sie c, so daß Ψ normiert ist.
- Ist Ψ ein Eigenzustand von H?
- Geben Sie für $t > 0$ die zeitliche Entwicklung $\Psi(x, t)$ an.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

a) Lösen Sie die zeitunabhängige SG für den 1-dim harmonischen Oszillator mit $V(x) = \frac{m}{2}\,\omega^2\,x^2$ durch den Ansatz

$$\psi(x) = c\;\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] H\left(\frac{x}{x_0}\right) \qquad \text{mit} \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Zeigen Sie, daß die Funktion $H(\zeta)$ mit $\zeta = x/x_0$ die DGL

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta\,\frac{d}{d\zeta} + (\lambda - 1)\right] H(\zeta) = 0 \qquad (*)$$

erfüllt, wobei $E = \hbar\omega\;\lambda/2$ gesetzt wurde.

b) Mit dem Ansatz in a) erhält man normierbare Lösungen, wenn

$$\lambda = 2n + 1 \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

gilt. Die Lösung der DGL $(*)$ stellen die Hermiteschen Polynome

$$H_n(\zeta) = (-1)^n\;e^{\zeta^2}\;\frac{d^n}{d\zeta^n}\;e^{-\zeta^2}$$

dar. Zeigen Sie, daß die Hermiteschen Polynome die DGL (*) erfüllten.

Hinweis:

Zeigen Sie zunächst, daß $H_n' = 2\zeta\,H_n - H_{n+1} = 2n\,H_{n-1}$ gilt.

(Benutzen Sie dazu Aufgabe 2a) vom Blatt 2.)

c) Berechnen Sie explizit $H_0, \ldots, H_3$.