Universität Hamburg, Fachbereich Physik

Übungsblatt 4 Quantenmechanik I SS 06

Abgabetermin: 4.5.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei die Wellenfunktion

$$\phi_\alpha(x) := c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x) , \qquad \alpha \in \mathbf{C} ,$$

wobei ψ_n die orthonormierten Eigenfunktionen des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators sind.

a) Zeigen Sie, daß ϕ_α Eigenfunktion des Absteigeoperators a ist und berechnen Sie den Eigenwert. Ist ϕ_α Eigenfunktion von H?

b) Bestimmen Sie c so, daß ϕ_α normiert ist.

c) Konstruieren Sie aus $\phi_\alpha(x)$ ein $\phi_\alpha(x,t)$ das die Schrödinger Gleichung erfüllt.

d) Berechnen Sie $\langle x \rangle$ im Zustand $\phi_\alpha(x,t)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei ein Teilchen im Potential

$$V(x) = -V_0\, \delta(x) , \qquad V_0 > 0.$$

a) Berechnen Sie Reflexions- und Transmissionskoeffizienten $|R|^2$ und $|T|^2$ für $E > 0$. Wie verhalten sie sich für $E \to \infty$?

Hinweis: Benutzen Sie zur Lösung von $H\psi = E\psi$ folgenden Ansatz

$$x < 0 : \quad \psi_I = e^{ikx} + R\, e^{-ikx} , \qquad x > 0 : \quad \psi_{II} = T\, e^{ikx} .$$

Nehmen Sie an, daß $\psi(x)$ bei $x = 0$ stetig ist, aber $\psi'(x)$ bei $x = 0$ einen Sprung hat. Zeigen Sie durch Integration von $H\psi = E\psi$ im Intervall $-\epsilon \le x \le \epsilon$ und den Grenzübergang $\epsilon \to 0$: $\psi_I'(0) - \psi_{II}'(0) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\, \psi(0)$.

b) Lösen Sie $H\psi = E\psi$ für $E < 0$. Wieviele gebundene Zustände gibt es?

Hinweis: Benutzen Sie $\psi_I = Ae^{qx}$, $\psi_{II} = Be^{-qx}$ als Lösungsansatz.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei eine Potentialschwelle $V(x) = V_0\,\Theta(a - |x|)$.

Benutzen Sie folgenden Ansatz zur Lösung von $H\psi = E\psi$ für $0 < E < V_0$

$$\begin{aligned} x \le -a : &\quad \psi_I = e^{ikx} + A\,e^{-ikx} \\ -a \le x \le a : &\quad \psi_{II} = B\,e^{-qx} + C\,e^{qx} \\ x \ge a\ ; &\quad \psi_{III} = S\,e^{ikx} \end{aligned}$$

a) Drücken Sie k und q durch E und V_0 aus.

b) Wie lauten die Randbedingungen bei $x = -a$ und $x = a$?

c) Zeigen Sie, daß sich die Randbedingungen in Matrixform wie folgt schreiben lassen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ A \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = M(-a) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie die 2x2 Matrix $M(a)$.

d) Zeigen Sie mit Hilfe von c) das gilt

$$S = \frac{1}{[M(a)M^{-1}(-a)]_{11}} = \frac{e^{-2ika}}{\cosh 2qa + i\,\frac{\epsilon}{2}\sinh 2qa} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{q}{k} - \frac{k}{q}.$$

Hinweis: Das Inverse einer 2x2 Matrix M lautet

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \frac{1}{detM} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}.$$