2. Übungsklausur — Quantenmechanik I — SS 06

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich frei in einem kugelförmigen Hohlraum. Das Potential lautet somit

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < r_0 \\ \infty & \text{für } r > r_0 \end{cases} \quad , \quad r_0 = konstant.$$

a) Benutzen Sie den Ansatz $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$, wobei Y_{lm} die Eigenfunktionen von $\vec{L}^2$ und L_z sind, und leiten Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für $R(r)$ her. Wie lauten die Randbedingungen für $R(r)$?

Hinweis: $\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}$

b) Zeigen Sie, daß $R = \frac{\sin \kappa r}{r}$ die Schrödingergleichung für $l = 0$ löst und bestimmen Sie κ. Welche Bedingung erfüllen die Energieeigenwerte auf Grund der Randbedingungen?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei der Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \ , \qquad H_1 = \alpha x^2 \ ,$$

wobei α konstant ist.

a) Fassen Sie H_1 als kleine Störung von H_0 auf und berechnen Sie die Korrektur zu den Eigenwerten von H_0 in 1. und 2. Ordnung Störungstheorie.

Hinweis: $x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$, $\quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$,

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n|H_1|m\rangle|^2}{E_n - E_m} \ .$$

b) Finden Sie die exakten Eigenwerte von H. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Ergebnissen aus a).

Hinweis: $\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \dots$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben seien die Produktzustände

$$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\ , \quad |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\ , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \pm |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\Big)\ ,$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von S_z und $\vec{S}^2$ dieser 4 Zustände, wenn $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ der Gesamtspin ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ in allen 4 Zuständen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ bewege sich in einem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$.

a) Zeigen Sie $[\vec{L}^2, V(r)] = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie $[\vec{L}^2, \vec{r}^2] = 0$ mit Hilfe von $[L_i, x_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} x_k$.

b) Das System habe 2 Energieniveaus E_0, E_1, wobei die Zustände mit Energie E_0 die Drehimpulsquantenzahl $l = 0$ und die Zustände mit Energie E_1 die Drehimpulsquantenzahl $l = 1$ haben. Wieviele Zustände gibt es zu jedem Energieniveau?

c) Nun sollen sich 2 identische Teilchen mit $s = \frac{1}{2}$ wechselwirkungsfrei im Potential $V(r)$ befinden. Berechnen Sie Energie und Entartung aller Produktzustände.