Universität Hamburg, Department Physik

1. Klausur Quantenfeldtheorie I SS 07

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei ein komplexes Skalarfeld ϕ mit einer Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - m^2\phi\phi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

wobei

$$D_\mu\phi := \partial_\mu\phi + iqA_\mu\phi\ , \qquad F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\ .$$

a) Berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für ϕ, ϕ^* und A_μ.

b) Berechnen Sie den Noetherstrom zur Symmetrie

$$\phi \to \phi' = e^{iq\alpha}\phi\ , \qquad \alpha, q \in \mathbf{R}\ ,$$

und zeigen Sie, daß er erhalten ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Euler-Lagrangegleichung für A_μ.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie

$$\gamma^2(\gamma^\mu)^*\gamma^2 = a\gamma^\mu\ , \qquad \gamma^0(\gamma^\mu)^*\gamma^0 = b\,(\gamma^\mu)^T\ ,$$

und berechnen Sie a und b.

Hinweis: Für die Herleitung der 2. Beziehung ist $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = (\gamma^\mu)^\dagger$ nützlich.

b) Zeigen Sie, daß $\psi_c := \gamma^2\psi^*$ unter infinitesimalen Lorentztransformationen wie ein Spinor transformiert, d.h.

$$\delta\psi_c = -\frac{i}{2}\,d\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\psi_c\ .$$

Berechnen Sie d falls $\delta\psi = -\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\psi$ gilt.

c) Wie lautet die Lorentz-kovariante Differential Gleichung 1. Ordnung, die ψ_c erfüllt?

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Für einen 4-komponentigen Diracspinor ψ definiert man

$$\psi = \psi_L + \psi_R \ , \qquad \psi_L := \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\,\psi \ , \qquad \psi_R := \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\,\psi \ .$$

a) Zeigen Sie

$$\bar{\psi}_L = \frac{1}{2}\,\bar{\psi}\,(1+\gamma^5) \ , \qquad \bar{\psi}_R = \frac{1}{2}\,\bar{\psi}\,(1-\gamma^5) \ ,$$

sowie

$$\bar{\psi}_R \psi_R = 0 = \bar{\psi}_L \psi_L \ , \qquad \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L = 0 = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R \ .$$

Hinweis: $(\gamma^5)^2 = 1, \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$.

b) Drücken Sie $\bar{\psi}\psi$ und $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ durch $\psi_L, \psi_R, \bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R$ aus.

Hinweis: Benutzen Sie $\gamma^5\psi_L = -\psi_R \ , \gamma^5\psi_R = \psi_L$.

c) Wie lautet die Dirac Lagrangedichte ausgedrückt durch $\psi_L, \psi_R, \bar{\psi}_L, \bar{\psi}_R$?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei der Operator

$$\vec{P} := -i \int d^3x\, \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi \ .$$

Benutzen Sie

$$\psi(x, t=0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,(2E_{\vec{p}})^{-\frac{1}{2}} \sum_s \left(a^s_{\vec{p}}\, u^s(p)\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^{\dagger s}_{\vec{p}}\, v^s(p)\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \ ,$$

um zu zeigen

$$\vec{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec{f} \sum_s \left(a^{\dagger s}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + g\, b^s_{\vec{p}} b^{\dagger s}_{\vec{p}} \right) \ .$$

Berechnen Sie $\vec{f}, g$.

Hinweis:

Es gilt $u^{s\dagger}(p)\, u^{s'}(p) = 2E_{\vec{p}}\,\delta^{ss'} = v^{s\dagger}(p)\, v^{s'}(p)$ und $u^{s\dagger}(\vec{p})\, v^{s'}(-\vec{p}) = 0$.

Darüberhinaus gilt $\int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$.