Übungsblatt 1 Quantenfeldtheorie I SS 07

Aufgabe 1

Gegeben sei ein komplexes Skalarfeld ϕ mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* \ .$$

Berechnen Sie

a) die Euler-Lagrange Gleichungen, den konjugierten Impuls $\pi(x)$ sowie die Hamiltondichte $\mathcal{H}$.

b) Zeigen Sie, daß $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi$ eine Symmetrie von $\mathcal{L}$ ist und berechnen Sie den zugehörigen Noetherstrom und Noetherladung. Zeigen Sie

$$Q = i \int d^3x (\phi^* \pi^* - \pi \phi) \ ,$$

und überprüfen Sie die Erhaltungssätze für j^μ und Q.

c) Berechnen Sie den Energie-Impulstensor T^μ_ν und überprüfen Sie $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$.

Aufgabe 2

a) Lösen Sie die Klein-Gordon Gleichung durch den Ansatz

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \, \tilde{\phi}(p) \, e^{ip_\mu x^\mu} \ ,$$

und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Lösung aus der Vorlesung

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \, (2E_{\vec{p}})^{-1/2} (a_{\vec{p}} \, e^{-ip_\mu x^\mu} + a^\dagger_{\vec{p}} \, e^{ip_\mu x^\mu})|_{p^0 = E_{\vec{p}}} \ . \tag{1}$$

Hinweis:

Es gilt: $\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ wobei x_i die Nullstellen von f sind und $f' \equiv \partial_x f$.

Weiterhin gilt $\tilde{\phi}(-p) = \tilde{\phi}^\dagger(p)$. (Warum?)

b) Ausgehend von (1) berechen Sie $\pi(x)$ und drücken Sie dann $a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}$ durch ϕ und π aus.

c) Zeigen Sie

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} (a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}]) \ .$$

Aufgabe 3

Gegeben sei

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

für $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

a) Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen für A_μ?

b) Drücken Sie $\mathcal{L}$ und die E-L-GL. durch

$$E^i = F^{i0} \ , \quad \epsilon^{ijk} B^k = -F^{ij}$$

aus.

c) Wie lauten die homogenen Maxwell-Gl. ausgedrückt durch $F_{\mu\nu}$?

d) Zeigen Sie, daß die Wirkung S invariant ist unter der Eichtransformation

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \ ,$$

falls j^μ erhalten ist.