Aufgabe 1

Für das reelle Skalarfeld gilt

$$a_{\vec{p}} = (2E_{\vec{p}})^{-1/2} \int d^3x \, e^{ip\cdot x} \Big(E_{\vec{p}} \, \phi(x) + i\pi(x) \Big)$$

a) Zeigen Sie $\partial_t a_{\vec{p}} = 0$.

b) Zeigen Sie $i\partial_t \phi = [\phi, H]$.

c) Zeigen Sie $[\pi, H] = i(\Delta - m^2)\phi$ und folgern Sie daraus, daß $i\partial_t \pi = [\pi, H]$ gilt falls ϕ die Klein-Gordon Gleichung erfüllt.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j(x)\,\phi \ ,$$

für eine klassische Quelle $j(x)$.

a) Berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen und geben Sie ihre Lösungen mit Hilfe der retardierten Greens-Funktion G_R an.

b) Zeigen Sie, daß für nicht verschwindendes j in der Vergangenheit gilt

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \, (2E_{\vec{p}})^{-1/2} \Big\{ \Big(a_{\vec{p}} + i(2E_{\vec{p}})^{-1/2} \tilde{\jmath}(p) \Big) \, e^{-ip\cdot x} + c.c \Big\} \ ,$$

für $\tilde{\jmath}(p) \equiv \int d^4y e^{ip\cdot y} j(y)$.

c) Berechnen Sie $\langle 0|H|0\rangle$ nachdem j abgeschaltet ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei der Differentialoperator

$$J^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \ .$$

a) Zeigen Sie, daß für infinitesimale Drehungen um die Winkel θ_i und für infinitesimale Lorentz-Transformationen mit Geschwindigkeit v_i gilt

$$\delta x^i = -\frac{i}{2}\theta_k \epsilon^{kmn} J^{mn} x^i \ , \qquad \delta x^\mu = -i v_k J^{0k} x^\mu \ .$$

b) Zeigen Sie

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i\left(\eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho}\right)$$