Übungsblatt 3 Quantenfeldtheorie I SS 07

Aufgabe 1

Gegeben seien

$$L^i := \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk} J^{jk}\ , \qquad K^i := J^{0i}\ ,$$

wobei $J^{\mu\nu}$ die (abstrakten) Generatoren der Lorentzgruppe sind.

a) Zeigen Sie, daß L^i und K^i die folgende Algebra erfüllen

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} L^k\ , \qquad [K^i, L^j] = i\epsilon^{ijk} K^k\ , \qquad [L^i, L^j] = i\epsilon^{ijk} L^k\ .$$

b) Definieren Sie $J^i_\pm := \frac{1}{2}\Big(L^i \pm iK^i\Big)$ und zeigen Sie

$$[J^i_\pm, J^j_\pm] = i\epsilon^{ijk} J^k_\pm\ , \qquad [J^i_+, J^j_-] = 0\ .$$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, daß $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ die Lorentz-Algebra erfüllt, falls $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$.

b) Zeigen Sie, daß gilt

$$[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^\mu_{\ \nu}\,\gamma^\nu\ .$$

Zeigen Sie, daß daraus folgt

$$\Lambda^{-1}_{1/2}\,\gamma^\mu\,\Lambda_{1/2} = \Lambda^\mu_{\ \nu}\,\gamma^\nu$$

für $\Lambda_{1/2} = 1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma}$.

c) Berechnen Sie die Lorentztransformationen von

$$j^\mu := \bar\psi\,\gamma^\mu\,\psi\ , \quad \text{und} \quad A^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\,\bar\psi\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,\psi\ .$$

Aufgabe 3

Gegeben sei $\mathcal{L} = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$.

a) Berechnen Sie den Noetherstrom und die Noetherladung zur Symmetrie $\psi \to \psi' = e^{-i\alpha}\psi$ und überprüfen Sie die Erhaltung.

a) Unter welcher Bedingung ist $\psi \to \psi' = e^{-i\alpha\gamma^5}\psi$ eine Symmetrie? Berechnen Sie in diesem Fall den Noetherstrom und überprüfen Sie die Erhaltung.