Aufgabe 1

Gegeben sei die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\psi \;+\; \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - g\,\phi\bar{\psi}\psi \;,$$

für einen Diracspinor ψ und ein reelles Skalarfeld ϕ. Es gelte $g \ll 1$.

a) Wie lautet H_I?

b) Zeichnen Sie die Feynman-Diagramme in führender Ordnung in g für den Streuprozess Fermion + Fermion $\to$ Fermion + Fermion und geben Sie $i\mathcal{M}$ an.

c) Wie lautet $i\mathcal{M}$ falls Anti-Fermionen streuen?

d) Zeichnen Sie das Feynman-Diagramm führender Ordnung in g für den Prozess Fermion + Anti-Fermion $\to$ Boson + Boson und geben Sie $i\mathcal{M}$ an.

e) Zeigen Sie

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{\vec{q}^2 + m^2} \;=\; \frac{1}{4\pi r}\,e^{-mr}$$

mit $r = |\vec{x}|$.

Hinweis: Benutzen Sie Kugelkoordinaten und führen Sie zunächst die Winkelintegration aus. Das verbleibende radiale Integral können Sie mit Hilfe des Residuensatzes berechnen.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie $\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2$ für den Streuprozess $e^-(p_1)\,\mu^-(p_2)\to e^-(p_1')\,\mu^-(p_2')$ im Limes $m_e\approx 0$ und zeigen Sie

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{8e^4}{(p_1-p_1')^4}\Big(p_1\cdot p_2\;p_1'\cdot p_2'+p_1\cdot p_2'\;p_1'\cdot p_2-m_\mu^2\;p_1\cdot p_1'\Big)$$

b) Wählen Sie $p_1=(k,0,0,k), p_2=(E,0,0,k)$ im Schwerpunktsystem und zeigen Sie

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2=\frac{2e^4}{k^2(1-\cos\theta)^2}\Big((E+k)^2+(E+k\cos\theta)^2-m_\mu^2(1-\cos\theta)\Big)\ ,$$

wobei θ der Streuwinkel ist.

c) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{CM}}$. Zeigen Sie zunächst

$$\Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_{\text{CM}}=\frac{1}{64\pi^2(E+k)^2}\;\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2$$

wobei $|v_A-v_B|=1+k/E$ gilt.

Aufgabe 3

a) Definieren Sie die Mandelstam Variablen

$$s:=(p_1+p_2)^2\ ,\qquad t:=(p_1'-p_1)^2\ ,\qquad u:=(p_2'-p_1)^2$$

und drücken Sie $\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2$ für den Streuprozess $e^-(p_1)\,\mu^-(p_2)\to e^-(p_1')\,\mu^-(p_2')$ im Limes $m_\mu\approx m_e\approx 0$ durch diese Variablen aus.

b) Wie lautet $\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2$ ausgedrückt durch Mandelstam Variablen für den in der Vorlesung berechneten Prozess $e^-(p_1)\;e^+(p_2)\to\mu^-(p_1')\;\mu^+(p_2')$ im Limes $m_\mu\approx m_e\approx 0$?

c) Zeigen Sie, daß ohne Näherung gilt

$$s+t+u=\sum_{i=1}^{4}m_i^2\ .$$