Aufgabe 1

Zeigen Sie

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu &= (\epsilon-2)\gamma^\nu \ , \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu &= 4\eta^{\nu\rho} - \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho \ , \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \ ,\end{aligned}$$

wobei $\epsilon = 4 - d$.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2-m^2}\,\frac{1}{(p+k)^2-m^2}$$

mit Hilfe dimensionaler Regularisierung.

b) Zeigen Sie in dimensionaler Regularisierung

$$\begin{aligned}-i\Sigma_2(p) \equiv \lim_{d\to 4}\ -e^2\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\gamma^\mu\,\frac{(\not{k}+m_0)}{k^2-m_0^2}\,\gamma_\mu\,\frac{1}{(p-k)^2-\mu^2} &= \\ \lim_{\epsilon\to 0}\ -i\frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1 dx\left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\!\left(\frac{\Delta e^\gamma}{4\pi}\right) + \mathcal{O}(\epsilon)\right)\Big((4-\epsilon)m_0 + (\epsilon-2)x\ \not{p}\Big)\end{aligned}$$

und berechnen Sie Δ.

c) Berechnen Sie $\left.\frac{d\Sigma_2}{d\not{p}}\right|_{\not{p}=m_0}$.

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde berechnet

$$\delta F_1(q=0) = 4ie^2 \int_0^1 dxdydz\, \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{-l^2/2 + (1-4z+z^2)\, m_0^2}{(l^2-\Delta)^3}$$

mit $\Delta = (1-z)^2 m_0^2 + z\mu^2$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1, daß der divergente Term in dimensionaler Regularisierung durch die Ersetzung

$$-\frac{l^2}{2} \to -\frac{(\epsilon-2)^2}{2d}\, l^2$$

gegeben ist.

Hinweis: Es gilt $\int d^d l \; l_\mu l_\nu = \frac{1}{d}\eta_{\mu\nu} \int d^d l \; l^2$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration

$$\int_0^1 dz\,(1-z)\ln\Delta(0) = \int_0^1 dz\, z\ln\Delta(0) - \int_0^1 dz\left[(1-z) - \frac{(1-z)(1-z^2)m_0^2}{\Delta(0)}\right],$$

für $\Delta(0) = (1-z)^2 m_0^2 + z\mu^2$

c) Zeigen Sie mit Hilfe von 2c), 3a) und 3b)

$$\delta F_1(q=0) \; + \; \frac{d\Sigma}{d\,\not{p}}\Big|_{\not{p}=m_0} = 0\;.$$