Übungsblatt 6 — Quantenmechanik I — SS 12

Abgabetermin: 10.5.

Aufgabe 1 [1a) 3 Punkte, 1b) 2 Punkte]

a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 \;\leq\; \langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle \; .$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen in der Ungleichung?

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $\psi = \alpha\phi + \chi$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\langle\phi|\chi\rangle = 0$.

b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$||\phi + \psi|| \;\leq\; ||\phi|| + ||\psi|| \; , \qquad \text{mit} \qquad ||\phi|| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle} \; .$$

Aufgabe 2 [2a),2b) je 2 Punkte, 2c) 1 Punkt]

(*ehemalige Klausuraufgabe*)

a) Zeigen Sie

$$e^{-\lambda^2+2\lambda\zeta} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(\zeta) \qquad \text{mit} \qquad H_n(\zeta) = (-1)^n \, e^{\zeta^2} \frac{d^n}{d\zeta^n} e^{-\zeta^2} \; , \quad \lambda \in \mathbb{R} \; .$$

Hinweis: Entwickeln Sie $e^{-(\zeta-\lambda)^2}$ um $\lambda = 0$ in eine Taylorreihe.

b) Gegeben sei ein physikalisches System mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{m}{2}\,\omega^2\,x^2 & \text{falls} \quad x > 0, \\ \infty \quad \text{falls} & x \leq 0 \end{cases}$$

Welche Randbedingung muß die Wellenfunktion bei $x = 0$ erfüllen?

Wie lauten die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen?

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus a).

c) Wie lautet die allgemeine Lösung der zeitabhängigen SG?

Aufgabe 3 [3a) 3 Punkte, 3b) 2 Punkte]

Gegeben sei eine Potentialschwelle mit Potential

$$V(x) = V_0\, \Theta(a - |x|)\ , \qquad V_0 > 0\ .$$

Benutzen Sie folgenden Ansatz zur Lösung von $H\psi = E\psi$ für $0 < E < V_0$

$$\begin{aligned} x \leq -a: &\quad \psi_I = e^{ikx} + A\, e^{-ikx}\ , & k = \tfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar^2} \\ -a < x < a: &\quad \psi_{II} = B\, e^{-qx} + C\, e^{qx}\ , & q = \tfrac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar^2} \\ x \geq a; &\quad \psi_{III} = S\, e^{ikx}\ . \end{aligned}$$

Die Randbedingungen fordern ψ und ψ' stetig bei $x = \pm a$.

a) Zeigen Sie, daß sich die Randbedingungen in Matrixform wie folgt schreiben lassen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ A \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = M(-a) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie die 2x2 Matrix $M(a)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a)

$$S = \frac{1}{[M(a)M^{-1}(-a)]_{11}} = \frac{e^{-2ika}}{\cosh 2qa + i\,\frac{\epsilon}{2}\, \sinh 2qa} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{q}{k} - \frac{k}{q}.$$

Hinweis: Das Inverse einer 2x2 Matrix M lautet

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 [4a), 4b) 1 Punkt, 4c) 3 Punkte]

a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

für $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1, \epsilon_{iij} = 0$.

b) Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist definiert als $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$. Zeigen Sie

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, x_j\, p_k$$

in einer kartesichen Basis $\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} L_i \vec{e}_i$.

c) Zeigen Sie

$$[L_i, x_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} x_k\ , \qquad [L_i, p_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} p_k\ , \qquad [L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k\ .$$