Übungsblatt 1 Quantenmechanik I SS 16

Aufgabe 1

Die Hamiltonfunktion $H(p_a, q_a)$ ist die Legendre Transformierte der Lagrangefunktion $L(\dot{q}_a, q_a)$ definiert durch

$$H(p_a, q_a) = \sum_{b=1}^{f} p_b \dot{q}_b - L(\dot{q}, q) \ , \qquad \text{mit} \qquad p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ .$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Definition H für ein Teilchen mit Masse m im Potential V, also mit

$$L = \tfrac{m}{2}\, \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - V(\vec{r}) \ .$$

b) Leiten Sie aus obiger Definition die Hamilton Gleichungen her.

Hinweis: Fassen Sie $\dot{q}_a$ als Funktion von p und q auf und berechnen Sie $\frac{\partial H}{\partial q_a}$ und $\frac{\partial H}{\partial p_a}$. Benutzen Sie an geeigneter Stelle die Euler-Lagrange Gleichungen.

Aufgabe 2

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q bewege sich im externen Magnetfeld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Die Lagrangefunktion des Systems lautet

$$L = \tfrac{m}{2}\, \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + q\, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}(t)) \ .$$

Berechnen Sie die Hamiltonfunktion H und stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf. Wie lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung?

Aufgabe 3

Für zwei Observablen $A(p_a, q_a), B(p_a, q_a)$ ist eine Poisson Klammer durch

$$\{A, B\} := \sum_{b=1}^{f} \Big(\frac{\partial A}{\partial q_b} \frac{\partial B}{\partial p_b} - \frac{\partial A}{\partial p_b} \frac{\partial B}{\partial q_b} \Big) \ .$$

definiert.

a) Zeigen Sie die folgende Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
&i) && \{A, B\} = -\{B, A\} \ , \\
&ii) && \{A, \lambda B + \mu C\} = \lambda \{A, B\} + \mu \{A, C\} \ , \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C} \ , \\
&iii) && \{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\} \ .
\end{aligned}
$$

b) Berechnen Sie $\{q_a, p_b\}$, $\{p_a, H\}$ und $\{q_a, H\}$.