Aufgabe 1

a) Geben Sie für ein System aus 3 nicht-wechselwirkende Fermionen mit den 1-Teilchenzuständen $|n_i\rangle$ die orthonormierten Eigenzustände $|n_1, n_2, n_3\rangle_F$ an. Überprüfen Sie explizit die Antisymmetrie der Zustände und ihre Normierung.

b) Wie lauten die orthonormierten Eigenzustände $|n_1, n_1, n_2\rangle_B$ für 3 nicht-wechselwirkende Bosonen, wenn sich zwei der Bosonen im gleichen Zustand befinden. Überprüfen Sie explizit die Symmetrie der Wellenfunktion und ihre Normierung.

c) Nehmen Sie an, daß die 1-Teilchenzustände $|n_i\rangle$ die Eigenzustände des H-Atoms (mit Spin) sind. Wie lautet in diesem Fall die Energie für die in a) gefundenen Zustände? Geben Sie für dieses System den Grundzustand und seine Entartung an.

Aufgabe 2 (*ehemalige Klausuraufgabe*)

Die Spinzustände von zwei Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ können durch die vier Produktzustände

$$|\chi_1\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, \quad |\chi_2\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2, \quad |\chi_3\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, \quad |\chi_4\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$$

charakterisiert werden.

a) Berechnen Sie für alle vier Zustände $S_z|\chi_i\rangle$ und $\vec{S}^2|\chi_i\rangle$, wobei $\vec{S} := \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ gilt. ($\vec{S}_1$ ist der Spinoperator des 1. Teilchens, $\vec{S}_2$ der Spinoperator des 2. Teilchens.)

Hinweis: $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}$

und es gilt $S_+|\downarrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle,\ S_-|\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle$.

b) Welche Linearkombinationen der vier Produktzustände sind Eigenzustände von S_z und $\vec{S}^2$? Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ in allen 4 Zuständen.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein System von zwei spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen mit Hamiltonoperator

$$H = a\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \;, \qquad a \in \mathbb{R} \;,$$

wobei $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ die Spinoperatoren der beiden Teilchen seien.

a) Berechnen Sie $[H, \vec{S}_1]$, $[H, \vec{S}_1^2]$, $[H, \vec{S}]$, $[H, \vec{S}^2]$ mit $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$.

b) Bestimmen Sie einen vollständigen Satz von vertauschbaren Operatoren der H einschließt.

c) Wie lauten Eigenzustände und Eigenwerte von H und wie sind sie entartet?

Aufgabe 4 (*ehemalige Klausuraufgabe*)

Gegeben sei ein System von zwei nicht-wechselwirkenden Teilchen mit

$$H = H_1 + H_2 \;, \qquad \text{und} \qquad H_{1,2} \;=\; \frac{\vec{p}_{1,2}^{\,2}}{2m} - \frac{2e^2}{r_{1,2}} \;.$$

a) Wie lauten Grundzustand und erster angeregter Zustand, wenn beide Teilchen $s = 0$ haben? Geben Sie die Energieeigenwerte beider Zustände und ihre Entartung an.

b) Wie lauten Grundzustand und erster angeregter Zustand, wenn beide Teilchen $s = 1/2$ haben? Geben Sie die Energieeigenwerte beider Zustände und ihre Entartung an.

c) Wie lautet der Grundzustand, wenn beide Teilchen $s = 1$ haben? Geben Sie den Energieeigenwert und seine Entartung an.

Hinweis:

Es ist nicht notwendig die Zustände zu normieren, aber die Zustände sollten die richtigen Symmetrieeigenschaften haben.