

Abgabetermin: 23.5.

Aufgabe 1 [1a) 3 Punkte, 1b) 2 Punkte]

a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 \leq \langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle .$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen in der Ungleichung?

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $\psi = \alpha\phi + \chi$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\langle \phi | \chi \rangle = 0$.

b) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\| , \quad \text{mit} \quad \|\phi\| = \sqrt{\langle \phi | \phi \rangle} .$$

Aufgabe 2 [2a),2b) je 2 Punkte, 2c) 1 Punkt]

(ehemalige Klausuraufgabe)

a) Zeigen Sie

$$e^{-\lambda^2 + 2\lambda\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H_n(\zeta) \quad \text{mit} \quad H_n(\zeta) = (-1)^n e^{\zeta^2} \frac{d^n}{d\zeta^n} e^{-\zeta^2} , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Hinweis: Entwickeln Sie $e^{-(\zeta-\lambda)^2}$ um $\lambda = 0$ in eine Taylorreihe.

b) Gegeben sei ein physikalisches System mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{m}{2} \omega^2 x^2 & \text{falls } x > 0, \\ \infty & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Welche Randbedingung muß die Wellenfunktion bei $x = 0$ erfüllen?

Wie lauten die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen?

Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis aus a).

c) Wie lautet die allgemeine Lösung der zeitabhängigen SG?

Aufgabe 3 [3a) 3 Punkte, 3b) 2 Punkte]

Gegeben sei eine Potentialschwelle mit Potential

$$V(x) = V_0 \Theta(a - |x|), \quad V_0 > 0.$$

Benutzen Sie folgenden Ansatz zur Lösung von $H\psi = E\psi$ für $0 < E < V_0$

$$\begin{aligned} x \leq -a : \quad \psi_I &= e^{ikx} + A e^{-ikx}, & k &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar^2} \\ -a < x < a : \quad \psi_{II} &= B e^{-qx} + C e^{qx}, & q &= \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar^2} \\ x \geq a : \quad \psi_{III} &= S e^{ikx}. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen fordern ψ und ψ' stetig bei $x = \pm a$.

a) Zeigen Sie, daß sich die Randbedingungen in Matrixform wie folgt schreiben lassen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ A \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = M(-a) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie die 2x2 Matrix $M(a)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a)

$$S = \frac{1}{[M(a)M^{-1}(-a)]_{11}} = \frac{e^{-2ika}}{\cosh 2qa + i \frac{\epsilon}{2} \sinh 2qa} \quad \text{mit} \quad \epsilon = \frac{q}{k} - \frac{k}{q}.$$

Hinweis: Das Inverse einer 2x2 Matrix M lautet

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 [4a) 4b) je 2 Punkte, 4c) 1 Punkt]

Klassisch ist die Hamiltonfunktion eines rotierenden Körpers gegeben durch

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z} \right)$$

wobei I_x das Trägheitsmoment im Richtung x ist.

a) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und Energie-eigenwerte der Hamiltonoperator im Fall

$$I_x = I_y = I. \quad \text{Hinweis: Schreiben Sie } L_i^2 \text{ um zu } L^2 \text{ und } L_z^2$$

b) Argumentieren Sie dass das Spektrum der Energiewerte im Nhe des Grundzustand im Fall $I_z \ll I$ nür von ein Quantenzahl ('l') abhängig ist

c) Berechnen Sie die Energiedifferenz zwei aufeinanderfolgenden Energieniveaus.