Aufgabe 1

Stellen Sie die Operatoren L_x, L_y, L_z und $\vec{L}^2$ in Kugelkoordinaten dar und zeigen Sie

$$L_x = -\tfrac{\hbar}{i}\left(\sin\varphi\,\partial_\theta + \cot\theta\cos\varphi\,\partial_\varphi\right)\,, \qquad L_y = \tfrac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\,\partial_\theta - \cot\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi\right)\,, \qquad L_z = \tfrac{\hbar}{i}\,\partial_\varphi\,,$$
$$L^2 = -\hbar^2\Big(\partial_\theta^2 + \cot\theta\,\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\partial_\varphi^2\Big) = -\hbar^2\Big(\frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\theta\,\sin\theta\,\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\partial_\varphi^2\Big)\,.$$

Benutzen Sie dazu

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi, \qquad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi, \qquad z = r\,\cos\theta\,,$$
$$\partial_x = \sin\theta\,\cos\varphi\,\partial_r + \tfrac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\,\partial_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi\,,$$
$$\partial_y = \sin\theta\sin\varphi\,\partial_r + \tfrac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\,\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi\,,$$
$$\partial_z = \cos\theta\,\partial_r - \tfrac{1}{r}\sin\theta\,\partial_\theta\,.$$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, daß die Legendrepolynome

$$P_l(\xi) := \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\xi^l}(\xi^2-1)^l$$

die Legendresche Differentialgleichung

$$(1-\xi^2)\,\frac{d^2P_l}{d\xi^2} - 2\xi\,\frac{dP_l}{d\xi} + l(l+1)P_l = 0$$

erfüllen. *Hinweis*: Differenzieren Sie dazu $(l+1)$-mal die Gleichung

$$(\xi^2-1)\frac{d}{d\xi}(\xi^2-1)^l = 2l\xi(\xi^2-1)^l$$

b) Berechnen Sie explizit als Funktion von θ, φ die Kugelflächefunktionen Y_{lm} für $l = 0, 1, 2$.
Hinweis:

$$Y_{lm} = (-1)^{\frac{1}{2}(m+|m|)}\sqrt{\tfrac{(2l+1)}{4\pi}\tfrac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\;P_{l|m|}\,e^{im\varphi}\,, \qquad P_{l|m|} = (1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{d\xi^m}P_l(\xi)$$

Aufgabe 3

Ein physikalisches System befinde sich im Eigenzustand ψ_{lm} zu $\vec{L}^2$ und L_z. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle L_x \rangle$, $\langle L_y \rangle$ sowie ΔL_x, ΔL_y.

Hinweis: Drücken Sie L_x, L_y durch $L_\pm$ aus.

Aufgabe 4

Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2a} \vec{L}^2 \ , \qquad a \in \mathbb{R} \ .$$

a) Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte von H an.

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das physikalische System im Zustand

$$\psi(\theta, \varphi) = c \left(\sin\theta \cos\varphi + \cos\theta \right) \ , \qquad c = \in \mathbb{R} \ .$$

Berechnen Sie c so, daß ψ ein normierter Zustand ist.

Hinweis: Drücken Sie ψ durch die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} aus und benutzen Sie die Orthogonalität der Y_{lm}.

c) Wie lautet die Wellenfunktion $\Psi(\theta, \varphi, t)$?

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte von H und L_z im Zustand Ψ.

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

für $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1, \epsilon_{iij} = 0.$

b) Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist definiert als $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$. Zeigen Sie

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \, x_j \, p_k$$

in einer kartesichen Basis $\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} L_i \vec{e}_i$.

c) Zeigen Sie

$$[L_i, x_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} x_k \ , \qquad [L_i, p_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} p_k \ , \qquad [L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \ .$$