V3: Spezielle Relativitätstheorie

3.1. Inertialsysteme

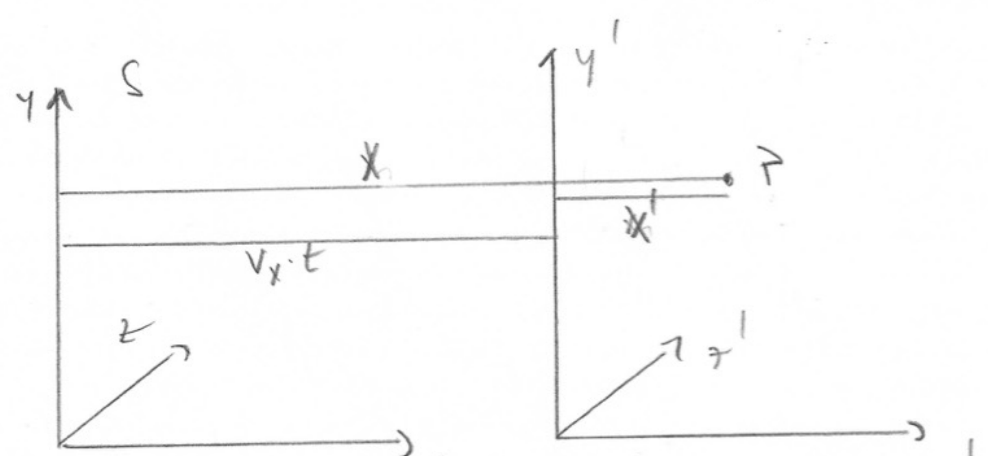
Implizites Postulat bisher:

Phy. Gesetze gelten unabhängig vom gewählten Koordinatensystem der Beschreibung

Math. Form der Gesetze hängt aber von Wahl des KS. ab.

Ausgezeichnete KS: math. Gleich. haben gleiche Form
$\hat{=}$ <u>Inertialsystem.</u>

Newtonsche Mechanik: Inertialsysteme ruhen od. bewegen sich geradlinig gleichförmig



$x' = x - v_x t$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$ Galilei-Transf.

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}'$ wenn $v_x =$ konst.

Problem:
Galilei-Transformation lasse
Max. Gl. nicht unverändert

Lichtsignal in S: $\dot{x} = c$

in S': $\dot{x}' = c - v$

Transformation die Max-Gl unverändert lassen:
Lorentz-Transf.

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad y' = y, \; z' = z$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

umgekehrt

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right), \quad y' = y, \; z' = z$$

Neues Element: Raum & Zeit transformieren ineinander

Prüfung: Geschwindigkeit in S: u
in S': u'

Galileo $u = u' + v$

Lorentz: $u = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \gamma^2 \underbrace{\frac{d}{dt'}(x' + vt')}_{u'+v} \left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} + \gamma^2 (u'+v)\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt} = \gamma^2(u'+v)$$

$$\Rightarrow \gamma^2 \frac{dx}{dt}\left(\gamma^{-2} + (u'+v)\frac{v}{c^2}\right) = \gamma^2(u'+v)$$

$$\Rightarrow u = \frac{dx}{dt} = \frac{u'+v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{u'v}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{u'+v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \overset{u' = v = c}{\approx} \frac{2c}{1+1} = c$$

$\Rightarrow$ Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} \to \begin{cases} u'+v & \text{für } c \to \infty \\ c & \text{für } u'=v=c \end{cases}$$

3.2. Postulate der SRT

Einstein (1905)

1. Phy. Gesetze sind in allen IS gleich. Diese sind durch LT (nicht GT) miteinander verbunden

2. $c =$ konstant in allen I.S.

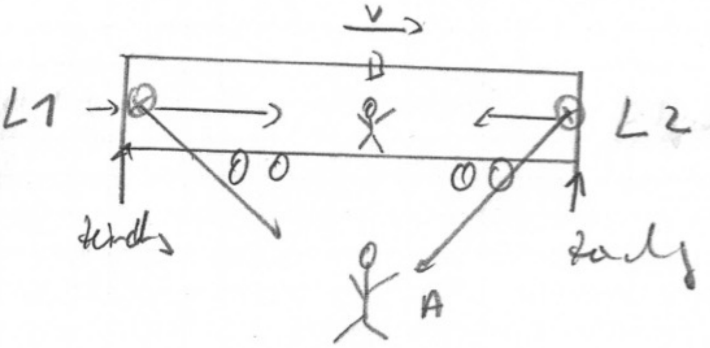
   c ist eine max. Grenzgeschwindigkeit und $v \leq c$

Kompatibel mit Maxwell, aber nicht mit Newton Mechanik $\Rightarrow$ Einstein entwickelte eine lorentzinvariante Mechanik $\equiv$ rel. Mechanik

3.3. Konsequenzen

3.3.1. Gleichzeitigkeit

c = konstant ⇒ Konzept der Gleichzeitigkeit ändert sich



A: Blitzsignal gleichzeitig
B: sieht L2 vor L1

} ⇒ Relativität der Gleichzeitigkeit hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab

in Formeln:

$$\underset{\uparrow \text{ Zeit im Zug}}{t_2' - t_1'} \overset{LT}{=} \gamma\Big(\underbrace{t_2 - t_1}_{=0} - \frac{v}{c^2}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\neq 0}\Big) \neq 0$$

3.3.2 Zeitdilatation

$$T \equiv t_2 - t_1 = \gamma\Big(\underbrace{t_2' - t_1'}_{T'} + \frac{v}{c^2}\underbrace{(x_2' - x_1')}_{=0 \text{ Uhr ruht in } S'}\Big) = \gamma T' \overset{\gamma > 1}{>} T'$$

⇒ • Bewegte Uhren (aus Sicht von S) gehen langsamer

• Zeit einer ruhenden Uhr = Eigenzeit der Uhr = T' ist immer die schnellste

3.3.3 Längenkontraktion

Maßstab ruht in S', bewegt in S:

$$l' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1 - v(\underbrace{t_2 - t_1}_{=0}))$$

$=0$ Länge gemessen zu einem Zeitpunkt

$\rightarrow l' = \gamma l > l$

$\Rightarrow$ · Bewegte Längen (l) sind kürzer

· Ruhelänge = Eigenlänge = l' ist die größte

3.4. Minkowski-Raum(-zeit), 4er-Vektoren

Ortsraum $\mathbb{R}^3$ ist euklidischer Raum

mit Abstand zwischen 2 Punkten

$$d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = |\vec{x}_2-\vec{x}_1|^2 \geq 0$$

Problem d^2 ist nicht LI

Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,3}$ (pseudo-euklidisch)

mit Abstand

$$s^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$

$$= c^2(t_2-t_1)^2 - (\vec{x}_2-\vec{x}_1)^2$$

Es gilt $s' = s \Rightarrow s$ ist LI

$$s^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 = c^2\gamma^2\left((t_2'-t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')\right)^2$$

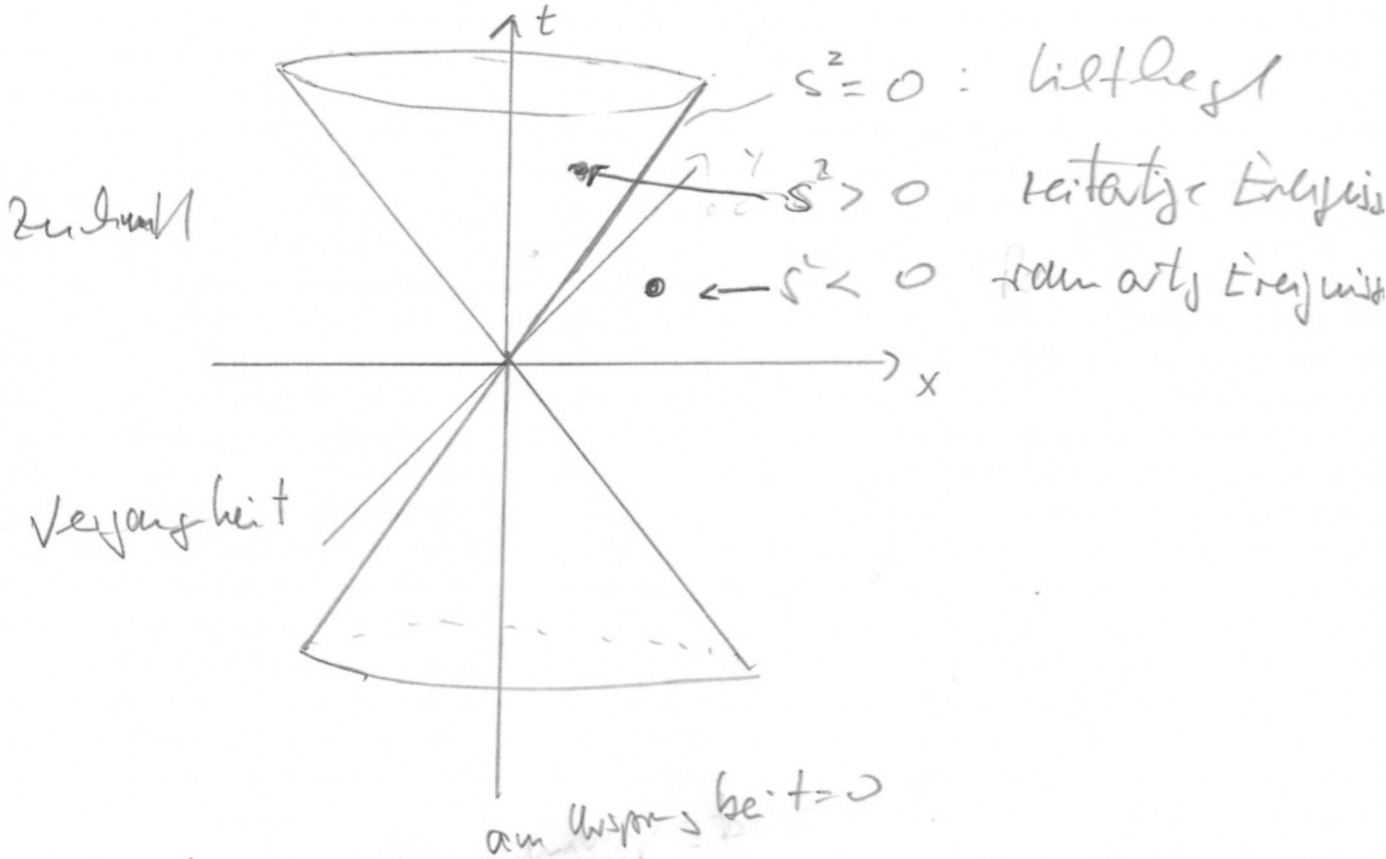
$$-\gamma^2\left((x_2'-x_1') + v\,(t_2'-t_1')\right)^2$$

$$= c^2(t_2'-t_1')^2\underbrace{\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}_{=1} - (x_2'-x_1')^2\underbrace{\gamma^2\left(-\frac{v^2}{c^2}+1\right)}_{=1}$$

$$+2c^2\gamma^2\cancel{(t_2'-t_1')\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')} - 2\gamma^2 v\,\cancel{(x_2'-x_1')(t_2'-t_1')}$$

$$= c^2(t_2'-t_1')^2 - (x_2'-x_1')^2 = s'^2$$

Punkt im Minkowski-Raum: Ereignisse



- Bewegter Beobachter kann nur im Lichtkegel sein ($s^2>0$)

- Kausalität wird nicht verändert

- absolute Zukunft/Vergangenheit existiert weiterhin

Schreibweise mit einer Metrik g

$$\mathbb{R}^3: \quad d^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} (x_2^i - x_1^i)(x_2^j - x_1^j) \qquad x^i = (x, y, z)$$

$$\text{mit } g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^{1,3}: \quad s^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} (x_2^\mu - x_1^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)$$

$$\text{mit } g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = \nu = 1,2,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \qquad \text{4 e Vektor}$$

infinitesimal:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} \, dx^\mu dx^\nu \qquad \text{(Linienelement)}$$

<u>Eigenzeit:</u> $d\tau^2 = dt'^2 = \gamma^{-2} dt^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2$

$$= dt^2 - \frac{v^2}{c^2} dt^2 \overset{dx_1 = d(vt) = v\,dt}{=} \frac{1}{c^2}\left(c^2 dt^2 - dx_1^2\right)$$

allg. (ohne Beweis) $\quad c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = ds^2$

$\Rightarrow$ Eigenzeit ist LI.

3.5. Relativistische Mechanik

Formulierung LI mech. Gesetze

Formalismus: 4er Vektore

$$\text{rel. Newton-Gl.:} \quad f^\mu = m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \overset{!}{\underset{m \neq m(t)}{=}} \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Körper in Ruhe: $d\tau = dt \quad , \quad \vec{F} = 0$

$$f^0 = m \frac{d^2 t}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} t = 0$$

$$f^i = 0 = m \frac{d^2}{dt^2} x^i$$

Körper in Bewegung (nicht-rel.):

$$f^i = F^i = m \frac{d^2 x^i}{dt^2}$$

$$f^0 = m \frac{d^2}{dt^2} t = 0$$

Körper in relativistischer Bewegung ($v \approx c$):

$$\text{L.T. ergibt:} \quad f^i = F^i + (\gamma - 1) \, v^i \, \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{v^2}$$

$$f^0 = \gamma \, \vec{v} \cdot \vec{F}$$

Energie-Impuls Beziehung (Äquivalenz Energie/Masse)

Aus $\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu$ folgt $\vec{p} = m \gamma \vec{v}$

$$p^0 = \frac{E}{c}$$

$$\sum_\mu \sum_\nu p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = (cm)^2$$

$$\Leftrightarrow E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 \rightarrow E = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4} = \begin{cases} |\vec{p}| c & \text{für } m = 0 \\ m c^2 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{m} \end{cases}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x + \dots$$