Übungsblatt 1 Statistische Physik und Thermodynamik WS 03/04

Abgabetermin: 27.10.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Lotto (6 aus 45) n Richtige zu haben ($n = 3, 4, 5, 6$)? Aus 10 Millionen Mitspielern wieviele haben n Richtige?

b) In einer Vorlesung sind n Studierende. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 2 Studierende am gleichen Tag Geburstag haben? Bei wievielen Studierenden würden Sie eine Wette eingehen, daß zwei am gleichen Tag Geburstag haben?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Zufallsvariable kann nur die Werte 0 und 1 annehmen, wobei mit der Wahrscheinlichkeit p der Wert 0 angenommen wird.

a) Argumentieren Sie, daß die Wahrscheinlichkeit nach N versuchen n mal 0 zu finden durch

$$w_n = p^n (1-p)^{N-n} \binom{N}{n} \tag{1}$$

gegeben ist.

b) Überprüfen Sie:

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = 1 \; , \qquad \langle n \rangle = Np \; , \qquad (\Delta n)^2 = np(1-p) \; .$$

Hinweis: drücken Sie $\langle n \rangle, (\Delta n)^2$ durch geeignete Ableitungen von w_n aus.

c) Zeigen Sie daß im Grenzübergang $p \to 0, N \to \infty$ mit $\bar{n} \equiv pN$ fest die Wahrscheinlichkeitsverteilung (1) in die Verteilung

$$w_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \tag{2}$$

übergeht.

Hinweis: Leiten Sie zunächst $w_n = \frac{\bar{n}^n}{n!}(1 - \frac{\bar{n}}{N})^N \frac{1(1-\frac{1}{N})\ldots(1-\frac{n-1}{N})}{(1-p)^n}$ her und führen Sie dann den Grenzübergang durch.

d) Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = 1, \qquad \langle n \rangle = \bar{n}, \qquad (\Delta n)^2 = \bar{n}.$$

Ein Bogenschütze trifft mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ ins Schwarze . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er bei 5 Schuss genau 3 mal trifft? Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß er bei 5 Schuss mindestens 3 mal trifft?

Hinweis: Benutzen Sie (1)

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Die Gauß'sche Normalverteilung ist durch

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \, e^{-\frac{(x-x^0)^2}{2\sigma^2}}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die charkteristische Funktion $\chi(k)$.

b) Zeigen Sie

$$\langle X \rangle = x^0 \ , \qquad (\Delta X)^2 = \sigma^2$$

mit Hilfe geeigneter Ableitungen von $\chi(k)$.