Abgabetermin: 3.11.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Die Γ-Funktion ist definiert durch

$$\Gamma(n+1) := \int_0^\infty dt\, t^n e^{-t} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie $\Gamma(n+1) = n!$.

Hinweis: Führen Sie $\Gamma(n+1)$ durch geeignetes differenzieren auf $\int_0^\infty dte^{-at}$ zurück.

b) Zeigen Sie, daß für große n gilt (Stirlingsche Formel)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \ .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß der Integrand von $\Gamma(n+1)$ ein scharfes Maximum bei $t = n$ hat und passen Sie dann den Integranden bis zur zweiten Ordnung an die Funktion $Ae^{-\frac{(t-n)^2}{2a^2}}$ an.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Die quantenmechanische Dichtematrix ist definiert durch

$$\rho = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \ , \qquad \sum_i p_i = 1 \ , \qquad p_i \geq 0 \text{ und reell.}$$

a) Zeigen Sie

$$(i)\ \rho = \rho^\dagger \ , \qquad (ii)\ \langle\psi_n|\rho|\psi_n\rangle \geq 0 \ \forall n \ , \qquad (iii)\ Sp(\rho) = 1 \ .$$

b) Zeigen Sie $\langle A\rangle = Sp(\rho A)$.

c) Zeigen Sie

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \ = \ \frac{i}{\hbar}\,[\rho, H] \ .$$

d) Berechnen Sie $Sp(\rho^2)$ und zeigen Sie $Sp(\rho^2) \leq Sp(\rho)$. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Gegeben sein ein 1-dim. klassischer harmonischer Oszillator $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.

a) Welche Bahn beschreibt der Oszillator im Phasenraum wenn die Energie E konstant ist.

b) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen für $H \leq E$ und für $E \leq H \leq E + \Delta$

c) Bestimmen Sie die mikrokanonische Verteilungsfunktion ρ.

d) Berechnen Sie damit den Mittelwert der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ und den Mittelwert der potentiellen Energie $\langle U \rangle$ und zeigen Sie

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{E}{2} + \frac{\Delta}{4} \, .$$